高等学校工科函授教材

（高等教育工科自学通用）

高等数学与工程数学

第二册

华南工学院　吴亚森　何淑芷　陈世雄　黄南泰　编

卢文　校

广东科技出版社

高等学校工科函授教材
（高等教育工科自学通用）

高等数学与工程数学

第 二 册

华南工学院 吴亚森 何淑芷 陈世雄 黄南泰 编
卢 文 校

广 东 科 技 出 版 社

内 容 简 介

《高等数学与工程数学》分四册出版，是专为高等学校工科函授教育编写的教材(高等教育工科自学通用)，已用作广东省业余大学、职工大学暂用教材．它是参照一九八〇年六月高等学校工科数学教材编审委员会扩大会议审订的《高等数学教学大纲》和《工程数学教学大纲》，结合函授教学的特点编写的。

本书第二册包括一元函数定积分及其应用、无穷级数和常微分方程等内容，叙述比较详细，每节附有复习思考题，每章附有学习方法指导、习题及自我测验题，书末附有答案，适合自学使用。

本书可作为高等工科院校函授教材，工科业余大学、广播电视大学、职工大学教学用书，也可作为具有高中文化程度的读者的自学用书．

高等学校工科函授教材

(高等教育工科自学通用)

高等数学与工程数学

第二册

华南工学院 吴亚森 何淑芷 陈世雄 黄南泰 编

卢 文 校

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

韶关新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 11,75印张 290,000字

1982年10月第1版 1982年10月第1次印刷

统一书号 7182·34 定价1.65元

目　录

第八章 定 积 分

定积分是高等数学中一个十分重要的基本概念。如同很多重要的数学概念一样，它的产生有着广泛的实际背景。我们将会看到，很多表面上看来迥然不同的具体问题，都可归结到用定积分去解决。因此在各种科学技术的领域里，在现代化的生产实践中，定积分都有着广泛的应用。

定积分在高等数学中不是孤立的概念，它不仅是一种极限，而且与导数和微分有着极其密切的联系，它的计算主要借助于不定积分。因此，这一章将会把以前学过的极限、导数、微分、不定积分等重要概念与定积分有机地联系起来，使微分学与积分学构成一个完整的整体。下面我们先从实际问题引出定积分的概念，然后讨论定积分的性质，再推导出微积分学基本定理和牛顿-莱布尼兹公式，最后介绍定积分的积分方法和广义积分的概念。

§8.1 定积分问题的例子

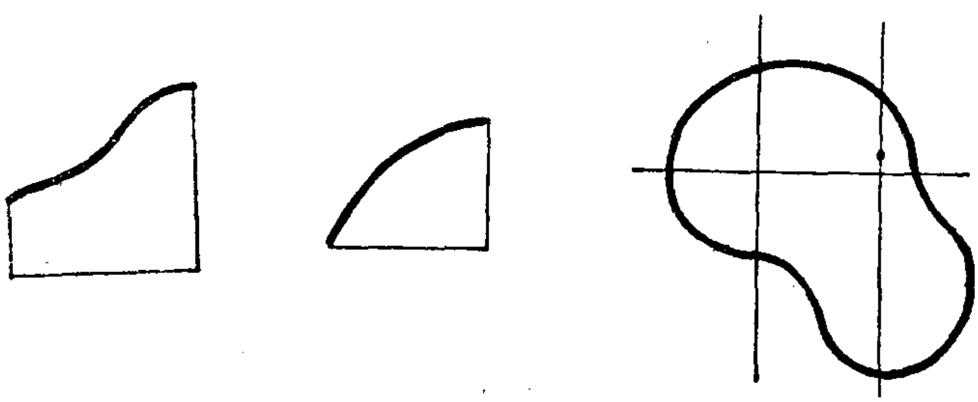
为了引出定积分概念，我们先讨论几个实际问题——曲边梯形的面积、变速直线运动的路程和变力沿直线所作的功。

一、曲边梯形的面积

所谓曲边梯形是指由三条直线和一条连续曲线弧所围成

的平面图形；其中有两条直线相互平行，第三条直线与它们垂直，而且要求凡与第三条直线垂直的直线最多只与曲线弧交于一点(图 8 — 1 (a))。有时两条平行边当中的一条会缩成一个点(图 8 — 1 (b))，这可以看成是曲边梯形的特例。

为什么要研究曲边梯形的面积呢？客观实际常常要求我们计算由平面曲线围成的图形的面积。比如河流的横截面，船体被水平面所截的截面等等。而由平面曲线围成的图形，总可以用两组互相垂直的直线把它分成若干个曲边梯形(图 8 — 1 (c))。如果计算曲边梯形面积的问题解决了，也就可以算出由平面曲线围成的图形的面积了。

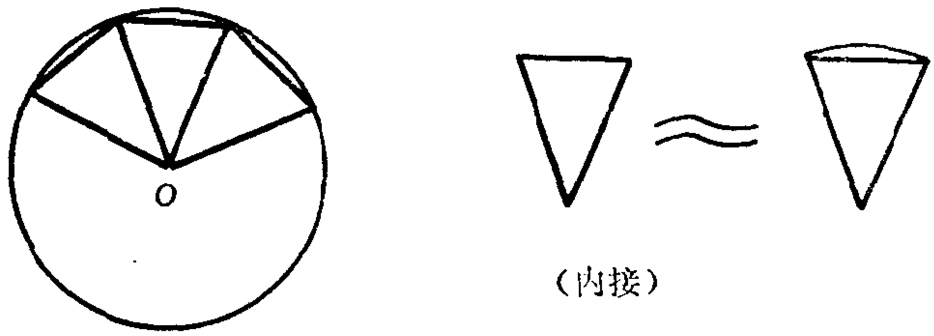


(a)　　(b)　　(c)

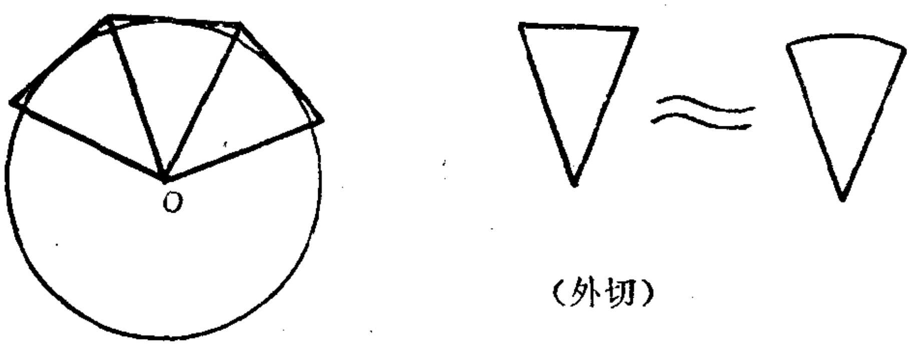
图 8 — 1

由平面曲线围成图形的面积，例如圆的面积，我们已经学过。在初等数学中，圆面积是以圆内接(或外切)正多边形面积当边数无限增多时的极限值来定义的，并由此得出圆面积公式。但为了计算圆内接正n边形面积，我们从圆心到正n边形各顶点作连线，把正n边形分为n个全等三角形，这些全等三角形面积之和就是这正n边形面积。其实，这样的计算过程也可以看为是把圆分割为n个圆扇形，而每个圆扇形面

积被相应的三角形面积近似地代替（图 8 — 2）。最后，当$n \to \infty$时，这些三角形面积之和的极限就是所求的圆面积。



（内接）



（外切）

图 8 — 2

解决圆面积问题的这种思想方法，可以用来解决曲边梯形的面积问题。假如这样来建立坐标系：x轴与曲边梯形的第三条直线重合，这样y轴自然与两条平行的边平行。如把曲线的弧放在x轴上方，并设曲线的方程为$y=f(x)$，那末$f(x)\geqslant 0$。于是曲边梯形就可以看成为由$y=0$，$x=a$，$x=b$，以及$y=f(x)$所围成的图形了（图 8 — 3）。

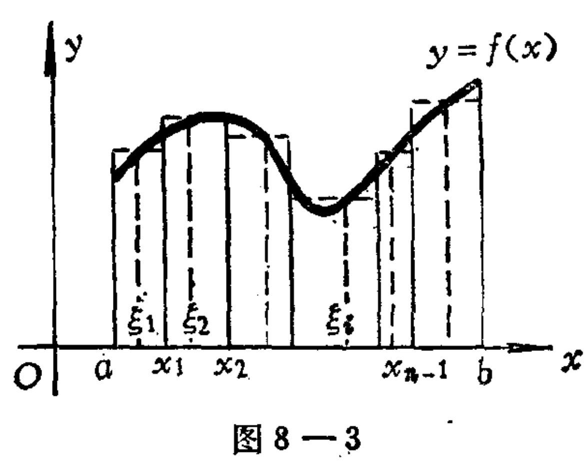


图 8 — 3

为把曲边梯形分成若干份，只需在区间$[a, b]$内插入若干个分点，且过各分点作x轴的垂线。比如在a与b之间插入$n-1$个分点，并记作：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

于是过每个分点且与x轴垂直的直线，就把原来的曲边梯形分成n个小曲边梯形。

这时区间$[a, b]$也被分成n个小区间：$[x_0, x_1]$，$[x_1, x_2]$，$\cdots$，$[x_{i-1}, x_i]$，$\cdots$，$[x_{n-1}, x_n]$。每个小区间都称为区间$[a, b]$的一个子区间，其长记为Δx_i，即$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

下面求每个小曲边梯形面积的近似值．考虑到$f(x)$是连续函数，在每个子区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$上函数值变化不大，故不妨任取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，以点$\xi_i$的函数值$f(\xi_i)$为高，以子区间的长度$\Delta x_i$为底作矩形，则其面积$f(\xi_i)\Delta x_i$就可以作为相应的小曲边梯形面积的近似值．

记整个曲边梯形的面积为S。由于每个小曲边梯形的面积都由对应的小矩形面积近似代替，因此，所有小矩形面积之和S_n就应该是S的近似值，即

$$S\approx S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

可以看出，如果分点的个数逐渐增多，S_n就逐渐接近S。因此，当$n\to\infty$，而最大子区间的长度无限缩小（记作$\max\Delta x_i\to 0$）时，如果S_n存在极限，自然就会认为这个极限就是曲边梯形的面积了，即

$$S=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

这种规定曲边梯形的面积的定义是构造性的，它不仅给出了曲边梯形面积的定义，而且也提供了一种计算曲边梯形面积的方法．虽然这种方法比较繁难，但曲边梯形面积问题也就基本解决了．

二、变速直线运动的路程

讨论导数的时候，我们研究过变速直线运动的瞬时速度．现在的问题恰恰与之相反：设质点在时刻$t=a$到$t=b$ $(a<b)$这一段时间内作变速直线运动，其速度$v(t)$是区间$[a, b]$上已知的连续函数，试求在这段时间内质点走过的路程s．

在中学物理课中，曾经讨论过匀速直线运动的路程，它的公式是$s=vt$，其中速度v是个常量，s和t分别代表路程和时间．

现在，速度$v(t)$是个变量，不能直接应用上述公式求路程．是否可以用类似于求曲边梯形面积的方法去解决它呢？我们设想，由于$v(t)$是个连续变量，如果时间间隔很短，$v(t)$的变化是不会很大的，故不妨近似地认为是等速的，并可选取这段时间内任一时刻的速度作为这段时间内的速度．于是，用它乘这段很短的时间，就得到在这段时间内质点走过的路程的近似值．将整段时间分成许多很短的时间段，在每小段时间内都这样求出路程的近似值．显然，这些近似值之和就是整段路程的近似值．路程的准确值，自然就是当每段时间间隔趋向于零时的极限了．

把上面的想法用数学式子表达出来，就是：在时间区间$[a, b]$内任意插入$n-1$个分点，记为

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=b.$$

把区间$[a, b]$分成n个子区间$[t_{i-1}, t_i]$，其长记为Δt_i，即

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，如图 8—4．

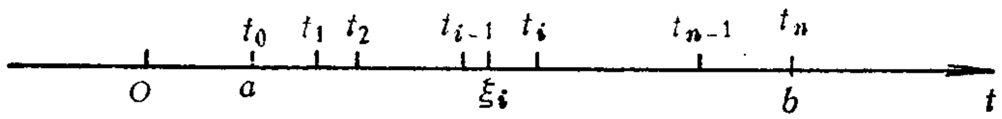


图 8—4

在每个子区间$[t_{i-1}, t_i]$内任取一点ξ_i，以$v(\xi_i)$作为质点从t_{i-1}到t_i这段时间内的速度，于是$v(\xi_i)\Delta t_i$就是质点在这段时间内走过的路程的近似值．把各段路程的近似值加起来，就得到整个路程的近似值s_n，即

$$s \approx s_n = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

当分点个数无限增多，最大子区间长度无限缩小时，如果s_n的极限存在，则该极限就是质点运动的路程s，即

$$s = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

与求曲边梯形面积的情形一样，这里不但定义了变速直线运动的路程，同时也直接提供了一种计算这个路程的方法，于是变速直线运动的路程问题也就基本解决了．

三、变力沿直线所作的功

当一个物体在恒力作用下沿力的方向走了一段路程，那么力就作了功．在中学物理课中功的计算公式为

$$W = Fs,$$

其中F为恒力，W和s分别表示功和路程．

但是，很多受力作用而运动的物体，它所受到的力往往不是一个恒量，而是随着物体在运动路径上所处的不同位置

而不同。例如，万有引力、电与磁的引力或斥力等都是如此。现在假定物体沿直线Ox运动，它的位置由x表示，物体所受的力F是变量x的函数$F=f(x)$，问题是要求出物体由位置$x=a$运动到$x=b$ $(a<b)$时，力F所作的功W（图8—5）。

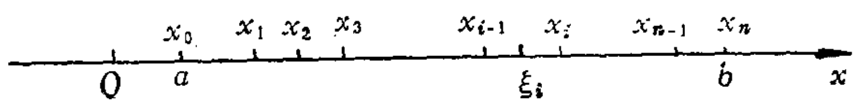


图8—5

用解决前两个问题同样的方法：用任意分法把区间$[a, b]$分成n个子区间$[x_{i-1}, x_i]$，其长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，在每个子区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，把物体在点ξ_i所受的力$f(\xi_i)$作为在整个子区间上受的力，于是力在这个小段路程中所作的功近似为$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$，力在各段所作的功的和W_n就是W的近似值。即

$$W\approx W_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果当$n\to\infty$，最大子区间长$\max\Delta x_i\to 0$时，功的近似值W_n的极限存在，则这个极限就是变力$f(x)$在$[a, b]$上所作的功。和上述两个问题完全一样，这里不但定义了功，同时也给出了一种计算功的方法。

§8.2 定积分的定义

上一节的例子中，有几何学的问题，也有物理学的问题，但所求的量都是一种具有特殊结构的和的极限。实际上，在很多科学技术领域和生产实践中，还会遇到大量的问

题，其解决办法也和上节的例子完全一样，都可归结为求这类有特殊结构的和的极限。因此，在数学上对这种类型的极限进行一般性的研究，就显得十分有意义了。

如果撇开上节各例子中具体的几何意义或物理意义，把所讨论的曲线、变速直线运动的速度、作功的变力，都抽象地看为是定义在有限区间上的一个函数，那么采取例子中的数学处理方法，就可得出定积分的概念。

定义 设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上定义，在$[a, b]$内任意插入$n-1$个分点，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把$[a, b]$分成n个子区间，其长度记为Δx_i，即

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

在每个子区间上任取一点$\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作出函数值$f(\xi_i)$与子区间长$\Delta x_i$之积的和数

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

如果不论把区间$[a, b]$怎样划分为n个子区间，也不论在每个子区间上的点ξ_i怎样选取，当分点个数无限增多，而最大子区间长度趋于零时和数S_n的极限存在，则极限S就称为函数$f(x)$自a到b的定积分。记作

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

这里$f(x)$称为被积函数，x称为积分变量，a与b分别称为积分下限与上限，区间$[a, b]$称为积分区间，而和数S_n又常称为积分和。

定积分的定义也可简单记为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

如果用《$\varepsilon-\delta$》的语言来叙述积分和S_n极限存在的定义，就是：设有常数S，若对于任意给定的正数ε，总存在一个正数δ，使得对于区间$[a, b]$分成n个子区间的任意分法，只要$\max\Delta x_i<\delta$，就不论点ξ_i（$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$）（$i=1, 2, \cdots, n$）怎样选取，都有

$$\left|S-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon.$$

根据定积分的定义，上节几个例子中所求的量，都可以用定积分表示了。

（一）由曲线$y=f(x)\geqslant 0$，直线$x=a$，$x=b$，以及直线$y=0$所围成的曲边梯形面积S，就是曲线的纵坐标$f(x)$由a到b的定积分：

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

（二）以速度$v(t)$作直线运动的物体，由时刻$t=a$到$t=b$所走过的路程s，就是速度$v(t)$自a至b的定积分：

$$s=\int_a^b v(t)dt.$$

（三）变力$f(x)$沿直线自位置$x=a$到$x=b$所作的功，就是变力$f(x)$自a到b的定积分：

$$W=\int_a^b f(x)dx.$$

关于定积分的概念，必须注意下列几点：

1. 定积分与积分变量的记号无关。因为仅仅改变积分变量的记法（例如把x换成t），和数式(1)右边毫无改变，其极限式(2)的右边也无改变，因此，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt.$$

2. 定义明确指出，不管用什么方法划分区间〔a，b〕，也不管在〔x_{i-1}，x_i〕上怎样选取点ξ_i，和数S_n都必须趋于同一极限。因此，当和数S_n的极限存在时，该极限就仅与被积函数$f(x)$及积分区间〔a，b〕有关。

3. 定义中积分下限a与积分上限b分别是区间〔a，b〕的左端点与右端点，故$a<b$。如果把积分下限换作b，积分上限换作a，仍假定$a<b$，那么由b到a的定积分又怎样定义呢？可以设想，如果在b与a之间仍然插入$n-1$个分点，则有

$$b=x_0>x_1>\cdots>x_{i-1}>x_i>\cdots>x_n=a,$$

于是，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$是负的，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$就与原来的积分和仅相差一个负号，其极限显然也仅相差一个负号。所以我们规定，当$b>a$时

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

4. 当积分下限a等于积分上限b时，就被认为是一种退化的情况，这可理解为一切$\Delta x_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$。所以我们规定

$$\int_a^a f(x)dx=0. \qquad (4)$$

有了定积分的定义，人们就会考虑，对函数$f(x)$有些什么要求，才能使得它在区间〔a，b〕上的定积分存在呢？定积分的存在定理，回答了这个问题。但存在定理的研究，要牵涉到较复杂的数学理论，这里我们只介绍一个对今后课程需用的结果，不加证明了。

存在定理 如果函数$f(x)$在闭区间〔a，b〕上连续，则$f(x)$在〔a，b〕上的定积分一定存在。