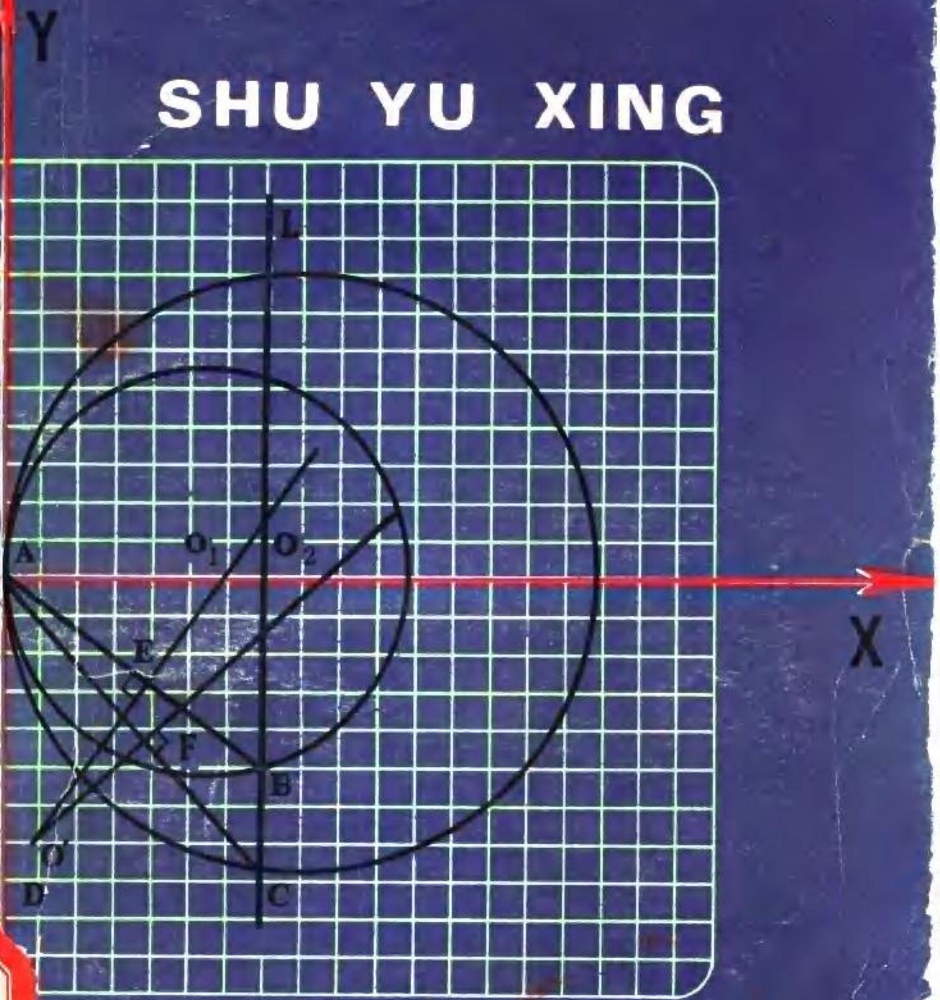
SHU YU XING



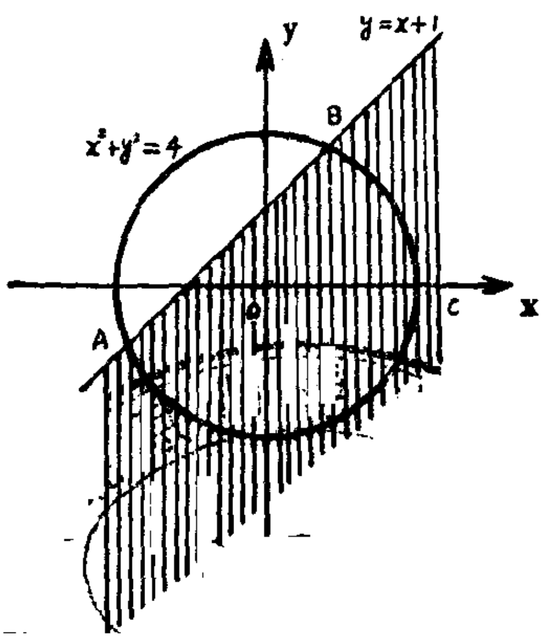
中学数学中的数与形

王 占 魁

安徽科学技术出版社

中学数学中的数与形

王占聪



安徽科学技术出版社

1981年 合肥

责任编辑：梁长森
封面设计：世　子

中学数学中的数与形

王　占　聪

*

安徽科学技术出版社出版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行
安徽新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：4.625　字数：96,000
1981年3月第1版　1981年3月第1次印刷
印数：1—45,800
统一书号：13200·19　定价：0.40元

前　言

数学是研究空间形式与数量关系的一门重要的自然科学。数与形是数学研究中的两个不同的侧面，它们之间不仅有着紧密的联系，而且在一定的条件下，还可以互相转化、互相帮助！

在数与形之间架设一道桥梁，促成它们相互转化的功劳，应该归于十七世纪法国数学家笛卡儿与他的坐标系。因为通过坐标系的建立，人们把平面上的点与一个有序实数对联系起来，进而把曲线(图形)——具有某种性质的点的集合与方程统一起来，从而为用数量关系来研究图形性质，创造了条件。

当然，在研究问题的过程中，并非都是数帮形的忙，有些情况下，反过来形也会帮数的忙哩！

学生在中学数学学习中，掌握好数、形关系，使各部分数学内容紧密相联，融会贯通，是提高数学水平的重要途径。可是，不少同学由于不能很好掌握数、形关系，因而对一些稍复杂的题目，无从下手，特别对平面几何证明题感到棘手。笔者认为，不拘泥于传统的平面几何证法，有目的地系统介绍一些诸如："解析法"、"复数法"、"三角法"等新颖

的几何证明方法，借以使解析几何、代数、三角与平面几何的知识有机地联系起来，是处理数、形关系，提高平面几何论证能力的有效措施。在教学实践中，这种做法，已被越来越多的数学教师所重视。这本小书，就是打算在这个问题上作一点尝试。书中以较大的篇幅对平面几何证明问题中的“解析法”、“复数法”、“三角法”等证题方法作了较为详细的介绍。

本书素材，主要根据自己多年来在数学教学中的体会和积累的资料；其次还从国内外各种数学资料中选取了一些有代表性的题目作为补充例子。

由于水平有限，编写时间仓卒，缺点、错误一定很多，敬希读者批评指正。

作　者　1980年12月于合肥

目　录

第一章　数与形的对立统一……………………………（1）
§1　坐标平面上的点与有序实数对……………………（1）
§2　曲线与方程——数与形的对立统一……………（5）
第二章　数促形的初步探索……………………………（11）
§1　平面几何证明中的解析法
——以数促形的好方法……………………（11）
（一）怎样证两线段相等…………………………（13）
（二）怎样证两角相等……………………………（20）
（三）怎样证两线段平行…………………………（23）
（四）怎样证线段垂直……………………………（28）
（五）怎样证线段的和、差、倍、分的关系………（36）
（六）怎样证线段的积或有关比的关系……………（41）
（七）怎样证有关面积的问题………………………（49）
（八）怎样证定值与极值的问题……………………（59）
（九）怎样证点共线问题…………………………（71）
（十）怎样证线共点问题…………………………（76）
（十一）用解析法试证一些公式和定理……………（81）
（十二）怎样证轨迹问题…………………………（85）
§2　奇妙的复数…………………………………（90）
§3　大显其威的三角函数
——“三角法”在论证几何问题中的地位……（102）
第三章　形对数的“反作用”…………………………（123）
§1　几何图形与不等式、方程及其它……………（125）
§2　几何图形在求函数极值中的应用……………（136）

第一章　数与形的对立统一

§1.　坐标平面上的点与有序实数对

数是计算个数以及测量量的结果，由测量的结果所得到的数可以是整数，也可以是分数，它们合称有理数，此外还有无理数。有理数和无理数统称实数。

任何有理数都可以用一个既约分数$\frac{p}{q}$的形式来表示，而无理数则不能，它是无限不循环小数。除了大家都知道的$\pi=3.141592\cdots$，$e=2.718281\cdots$是无理数外，中学阶段还接触到了许许多多类型的无理数，概括说来，有：

开不尽的方根都是无理数，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$，$-\sqrt[5]{7}$等；

任何不等于零的有理数γ的三角函数值，如$\sin\gamma$，$\cos\gamma$，$\mathrm{tg}\gamma$，$\mathrm{ctg}\gamma$是无理数。在角度制中，$\sin\theta$、$\cos\theta$的函数值除0、$\pm\frac{1}{2}$、±1，$\mathrm{tg}\,\theta$、$\mathrm{ctg}\,\theta$的函数值除0、±1外，其余的函数值都是无理数；

在反三角函数中，自变量是有理数的任何非零函数值都是无理数；

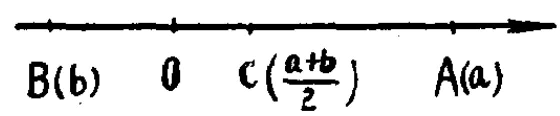
假定a、b是不等于1的正有理数，除特别情况$a^m=b^n$（m、n为非零整数）外，则$\log_b a$也是无理数；

有理数与无理数通过加、减、乘、除运算，只要这个有理数不等于零，结果必定还是无理数。但必须指出的是：无理数与无理数经过加、减、乘、除运算，其结果未必一定是无理数。

由上可见，中学阶段接触的无理数，真可谓名目繁多了。

有理数可以用数轴上的点表示，表示有理数的点叫有理点。

数轴上任意两个有理点 $A(a)$、$B(b)$ 之间，总可以插入其它有理点，如以 $\frac{a+b}{2}$ 为坐标的 C 点，就是介于 A、B 之间的一个点，因为 a、b 是有理数，所以 $\frac{a+b}{2}$ 也必是有理数，从而 C 就是有理点了。同理，我们可以在 B、C 之间插入有理点 D，在 C、A 之间插入有理点 E，反复应用以上的结论可以推得：



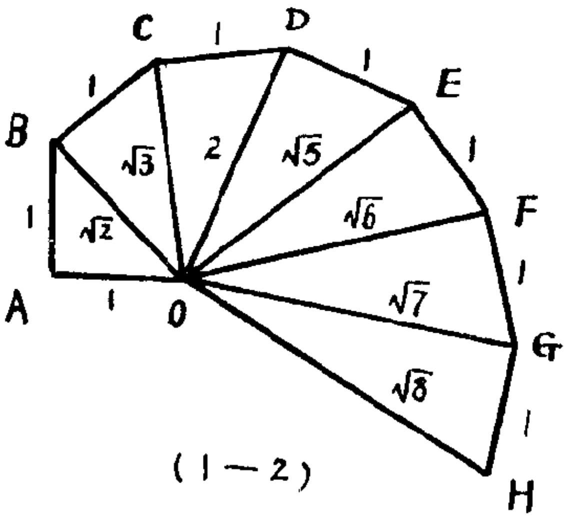
(1—1)

数轴上任意两个有理点，不论它们之间多么接近，我们总可以在它们之间插入任意多个有理点，由此不难想象，数轴上的有理点是处处稠密的。

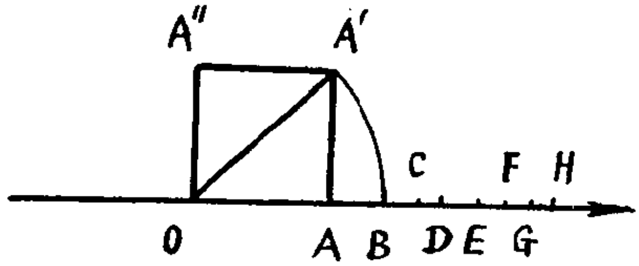
既然如此，我们能不能说整个数轴都被有理点所霸占呢？不能。其实，数轴上有大量的无理点！

例如 $\overline{OA}$ 为一个长度单位，以 $\overline{OA}$ 为一边作正方形 $OAA'A''$，则对角线 $\overline{OA'}$ 显然为 $\sqrt{2}$ 个长度单位，以0为圆心，$\overline{OA'}$ 长为半径画弧交数轴0点右方于 B，则 B 点无疑是一个无理点。象图(1—3)数轴上的 C、E、F、G、H 都是无理点。这样的点有多少呢？有无穷多个！因为我们在数轴上还可以

找到其它的无理点，而且与这些点的距离为有理数的点显然也是无理点。由此推知：数轴上的无理点也和有理点一样是处处稠密的。



（1—2）



（1—3）

由此，人们很自然地要提出一个问题：数轴上的有理点与无理点究竟哪个多？

答曰：无理点的“个数”比起有理点来，要占绝对压倒的优势！

这个结论可以用如下显而易见、中学生都能理解的方法来加以说明：

我们只要以每一个有理点为起点，向右移动一个边长为1的正方形对角线长的距离，就可以得到与有理点一样多的无理点，但我们还可以找到其他的无理点，而每一个无理点又可以“再生”许许多多的无理点，由此可见，无理点比有理点“多得多”。

因为数轴上的点不是有理点便是无理点，所以实数与数轴上的点才能名符其实地，真正建立起一一对应的关系来。

大家知道，我们不仅可以用一个实数来表示实数轴的点，而且还可以用一个有顺序的实数对(x,y)来表示坐标平面上

的点，(x,y)称该点的坐标。

点在坐标平面上的位置不同，它们的坐标也就不同。下面我们来简略地归纳一下，坐标平面中的一些特殊位置点的坐标特征，这对我们是大有用处的。

假设点M的坐标为：(a,b)

若M在原点，则$a=0$，$b=0$；

若M在x轴上，则$b=0$；

若M在y轴上，则$a=0$；

若M在第一象限，则 $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$；

若M在第二象限，则 $\begin{cases} a<0 \\ b>0 \end{cases}$；

若M在第三象限，则 $\begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases}$；

若M在第四象限，则 $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$；

若M在第一、三象限的角平分线上，则$a=b$；

若M在第二、四象限的角平分线上，则$a=-b$；

根据以上坐标特征，就可以清楚地确定一个点在坐标平面中的位置。

下面我们再来看看，坐标平面上两个点的位置关系。设$A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$是不重合的两点：

若$x_A=x_B$，则A、B连线平行于y轴（当$x_A=x_B=0$，A、B都在y轴上）；

若$y_A=y_B$，则A、B连线平行于x轴（当$y_A=y_B=0$，A、B都在x轴上）；

当$x_A=x_B$，且$y_A=-y_B$时，A、B两点关于x轴为对称；

当$y_A=y_B$，且$x_A=-x_B$时，则A、B两点关于y轴为对称；

当$x_A=-x_B$，且$y_A=-y_B$时，则A、B两点关于原点为对称。

这就十分清楚地表明了，只要掌握点与点的坐标数量上的关系，就可以推导出点与点在坐标平面上的位置关系。

这些规律和特征，无不为我们解决后面的问题提供了极大的方便，在某种意义上说，它是我们利用"数"解决"形"的问题的重要基础。

§2. 曲线与方程

——数与形的对立统一

你见过流星吗？那光亮的点在漆黑的夜空中急速流动所成的曲线，给人们留下了多么难忘的印象！

点的运动因受到不同条件的制约而形成不同的曲线，所形成的曲线称为点的轨迹。同学们已在初中阶段学习了六种基本轨迹，它们是：

(1) 和一个已知点的距离等于定长的点的轨迹——是以已知点为圆心，定长为半径的圆；

(2) 和一个角的两边的距离相等的点的轨迹——是这个角的平分线；

(3) 和已知线段两端点距离相等的点的轨迹——是这个线段的垂直平分线；

(4) 到已知直线的距离等于定长的点的轨迹——是平行

于这条直线并且和这条直线距离等于定长的两条直线；

（5）和两条平行线距离相等的点的轨迹——是和这两条平行线距离相等的一条平行线；

（6）和已知线段的两端点的连线的夹角等于已知角的点的轨迹——是以此线段为弦，所含的圆周角等于已知角的两段弧（端点除外）。

因为一个点对应于一个有序实数对(x, y)，点的位置变动，显然点的坐标也跟着变动，这样就能找出点的横纵坐标之间相互制约的函数关系。这种关系，我们可以用一个二元方程$F(x, y)=0$来表达。这个$F(x,y)=0$，就称为这个点运动所成曲线的方程。

这样一来，我们就有可能把平面内关于点的几何轨迹，化为关于这些点的坐标的数的问题来进行研究了。

本来形与数是两个不同的侧面，在坐标系这个桥梁的沟通下，使它们达到了统一。这就是说，要研究图形的性质，只要研究在坐标系下组成这个图形的曲线的方程就可以了。

但是，必须注意，由于坐标系选取的不同，相同的曲线可能有不同的方程。例如我们要画一个圆，你必须首先确定圆心的位置，进而决定半径的大小，才能画出。因此在直角坐标中，圆心的位置和半径的大小，就是确定圆的方程至关重要的两个因素。在平面几何中只要两个圆的半径相同，就可以看作是一个圆；但在直角坐标系中，圆心位置不同，尽管半径相同，也是不同的圆，因为它们的方程不一样了！

圆心在原点，半径为r的圆的方程是：

$$x^2+y^2=r^2$$

圆心在(a,b)，半径还是r的圆的方程是：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

这两个方程虽然不同，但并不失去证明圆的有关性质的一般性，只不过位置选得好，方程简单，证明简便；位置选得不好，方程复杂，会造成一些麻烦罢了。

曲线的方程是一个十分严密的问题。大家知道，证明轨迹问题要两面证，即完备性、纯粹性，曲线的方程又何尝不是如此！

一个曲线L的方程若是$F(x,y)=0$，必须满足以下两个条件：

(1) 曲线L上任一点坐标(x, y)必须满足方程$F(x, y)=0$；

(2) 满足方程$F(x,y)=0$的一切点都在曲线L上。

怎样去求一条曲线的方程呢？它的主要步骤如下：

1.选系——根据所给的条件，选取适当的坐标系；

2.设点——在曲线上任取一点$P(x,y)$；

3.列式——根据曲线上的点所要满足的条件，列出等式来；

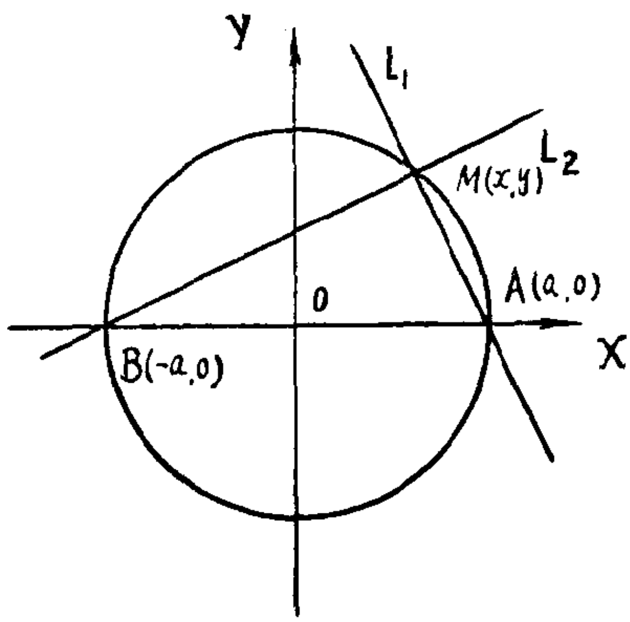
4.代换——用点的坐标及有关公式代入等式；

5.化简——整理化简，即得所求的曲线方程；

6.证明——因为从步骤1—5知，曲线上的任一点坐标，肯定满足所求得的方程了，所以只需证：凡满足方程的点都在曲线上就可以了。当然，如果化简的过程都是同解变形，则证明一步往往可以省略。

前面所讲的六个基本轨迹，乃是最简单、最基础的动点运动规律，所以轨迹的曲线是一目了然的。但在许多时候，情况就没有这么简单，往往光凭借给你的条件，是不能直观

看出什么曲线的，所以只能通过建立直角坐标系，利用求曲线方程的步骤去做，最后根据方程的特征，来得出是何曲线的结论。下面我们来看两个具体的例子。



（1—4）

例1 设两条直线绕两定点旋转，并且互相垂直相交，求它们的交点的轨迹。

解：设两定点为 A、B，两直交的直线为 L_1、L_2，取 AB 的中点为原点，AB 所在的直线为 x 轴，建立坐标系。

设 $M(x, y)$ 是轨迹上任一点，A 点坐标为 (a, o)，$B(-a, o)$

$\because\quad \angle BMA=90°,\qquad \therefore\quad |MB|^2+|MA|^2=|AB|^2$

$\because\quad |MA|^2=(x-a)^2+y^2,\ \ |MB|^2=(x+a)^2+y^2,$

$\quad\ \ |AB|^2=(2a)^2=4a^2$

$\therefore\quad (x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=4a^2$

$\quad\ \ 2(x^2+y^2+a^2)=4a^2$

化简为：$\quad x^2+y^2=a^2 \qquad (1)$

设 $M_1(x_1, y_1)$ 是满足方程(1)的任一点，则 $x_1{}^2+y_1{}^2=a^2$，

$\because\quad |M_1A|^2=(x_1-a)^2+y_1{}^2\quad |M_1B|^2=(x_1+a)^2+y_1{}^2$

$\therefore\quad |M_1A|^2+|M_1B|^2=(x_1-a)^2+y_1{}^2+(x_1+a)^2+y_1{}^2$

$$=2(x_1{}^2+y_1{}^2+a^2)$$

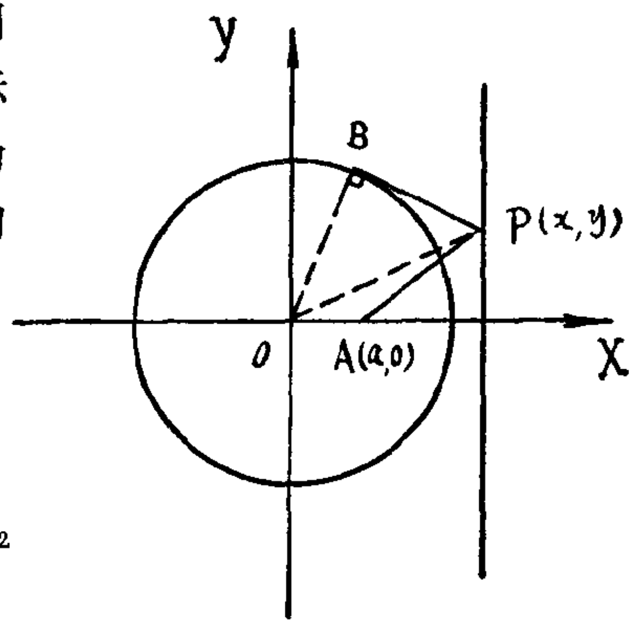
$$=2(a^2+a^2)=4a^2=|AB|^2$$

∴ M_1 在 L_1 与 L_2 交点的轨迹上。

因此 $x^2+y^2=a^2$ 就是所求的轨迹方程，它显然是以两定点A、B连成的线段为直径的圆。

例2 平面上有一半径为 r 的定圆 O, A 为圆内一定点，动点 P 到 A 的距离等于从它到圆的切线的长，求 P 点的轨迹。

解：坐标系的选取如图(1—5)所示，设A点的坐标为(a, o)，动点P的坐标为(x,y)，PB为从P到圆的切线，B为切点，连 OP、OB，则 $OB \perp PB$，依题意有：$|PA|=|PB|$



(1—5)

在直角△OPB中：

$|PB|^2=|OP|^2-|OB|^2$

∵ $|OP|^2=x^2+y^2$,

$|OB|^2=r^2$

∴ $|PB|^2=x^2+y^2-r^2$

故 $|PB|=\sqrt{x^2+y^2-r^2}$

而 $|PA|=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

∴ $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-r^2}$

两边平方得：

$$(x-a)^2+y^2=x^2+y^2-r^2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+y^2-r^2$$

$$2ax=a^2+r^2 \qquad \therefore \quad x=\frac{a^2+r^2}{2a}$$

这就是P点的轨迹方程，它显然是一条平行于y轴的直线(因化简过程是同解变形，所以证明省略)。

会求曲线的方程，就为用坐标法解决平面几何问题打下了重要的基础。

第二章　数促形的初步探索

§1. 平面几何证明中的解析法

——以数促形的好方法

所谓解析法，就是坐标法。它是通过坐标系的建立，把平面图形性质的有关问题，化为有关点和曲线的坐标的数量关系问题，进而用代数方法论证之。

我们平时所接触的平面几何证明题无非是这么两大类：

1.有关图形数量方面的。如求证线段、角、面积之类的大小关系。

2.有关图形位置方面的。如求证点共线、线共点、点共圆、圆相切等位置方面的关系。

位置方面的关系是可以借助一些定理和公式转化为数量关系的。例如证明 A、B、C、D 四点共圆，我们既可以把它转化为角的数量关系（即证连结这四点的四边形，对角 $\angle A+\angle C=180°$），也可以转化为线段间的数量关系（即证 A、B、C、D 四点到某点的距离都相等）。

有的同志把解析法证题的思路，通俗地概括为“几何问题代数化，图形性质坐标化”，是比较恰如其份的。

用解析法证题，关键要有两个基本功：一是要选好坐标