



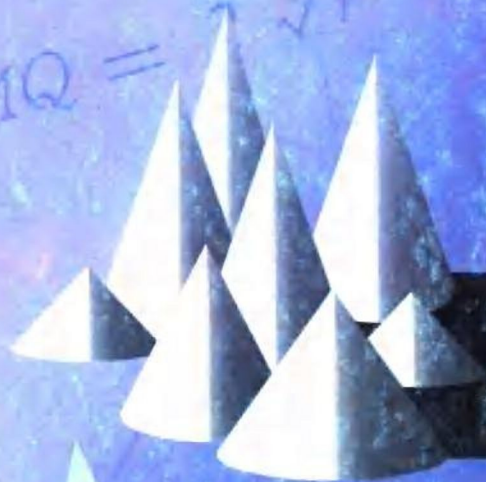
高等数学

上册

(第三版)

上海市高等专科学校《高等数学》编写组编

$$2MQ = \sqrt{r^2}$$



$$y = \dots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}$$



上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高等数学

(上册)

· 第三版 ·

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

责任编辑 周玉刚

高等专科学校试用教材

高等数学

(上册)

·第三版·

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 上海新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 14 字数 330 000

1985 年 5 月第 1 版

1992 年 4 月第 2 版

1998 年 6 月第 3 版 1998 年 6 月第 16 次印刷

印数: 440001—465000

ISBN 7-5323-4560-2/O · 211

定价: 11.30 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题
请向承印厂联系调换

前 言

为了迎接 21 世纪,在上海市教委的组织和领导下,由上海市各高等专科学校联合组成上海市高等专科学校《高等数学》编写组,从目前教改状况及发展要求出发,对编写大纲进行全面的探讨和大胆的改革,力求为培养 21 世纪人才提供一本具有专科特色的教材。

本教材从高等工程专科学校培养目标出发,参照高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》、《概率与数理统计课程教学基本要求》、《线性规划课程教学基本要求》、《线性代数课程教学基本要求》,在《高等数学》第一版、第二版的基础上进行编写的。

本教材在内容的选取上,除保证必要的系统外,尽量注意到本课程内容的应用性和针对性。重要的概念,尽量从实际问题引出,不过分追求理论证明和推导的严密性,而注意加强那些与实际应用联系较多的基础知识;加强基本运算方法的训练和能力的培养,而不追求过分复杂的计算。为有利于高级工程技术应用型人才的培养,在下册专辟一章讲解线性规划的基本概念、基本理论和基本方法。为有助于及时消化和理解概念及方法,每节或在适当的内容之后,配有练习题。每节后配有习题,每章后配有复习题。

全书内容采用模块式结构,分上、中、下三册。上册七章包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分的应用,常微分方程;中册五章包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,级数,数值计算初步;下册包括线性代数、线性规划、概率与数理统计课程内容。教学授课时数上、中册 110~130 学时,下册 70~84 学时。书中注有“*”号的内容(未计算学时)供不同专业、不同要求选用。

本教材由朱弘毅主编,秦耀堂、邵振和、陆晋奎分别为上、中、下册副主编。参加编写的还有(以姓氏笔划为序):金毛弟、邵建润、张宛平、沐国宝、陆信芳、陈孩未、张瑞瑾、曹颖中等。全书的框架结构由朱弘毅、秦耀堂负责组织。

本书由上海铁道大学朱学炎教授主审,参加审稿的还有(以姓氏笔划为序):王绍智、李兰舫、周玉刚、张起云、邱慈江、洪蓬、黄炳章、薛闻起等,他们认真地审阅了原稿,并提出了许多宝贵的改进意见,对此我们表示衷心的感谢。

限于编著水平,加之时间仓促,书中一定存在不妥之处,希望使用本书的同行和广大读者批评指正。

编 者

1997 年 6 月

目 录

第一章 函数、极限与连续	1	三、导数的几何意义	37
第一节 函数	1	四、可导与连续的关系	38
一、函数的概念	1	习题 2-1	39
二、函数的几种特性	2	第二节 求导法则	40
三、初等函数	4	一、导数的四则运算法则	40
四、双曲函数	5	习题 2-2(1)	42
习题 1-1	6	二、复合函数的求导法则	43
第二节 极限	7	三、反函数求导法则	44
一、数列的极限	7	四、初等函数的导数	46
二、函数的极限	8	习题 2-2(2)	48
三、无穷小与无穷大	11	第三节 高阶导数	49
习题 1-2	12	习题 2-3	51
第三节 极限的运算	12	第四节 隐函数及参数方程所确定	
一、极限的运算法则	12	的函数的导数	51
二、两个重要极限	15	一、隐函数求导法	51
三、无穷小的比较	18	二、由参数方程所确定的函数的求	
习题 1-3	19	导法	52
第四节 函数的连续性与间断点	20	习题 2-4	54
一、函数的连续性	20	第五节 微分及其在近似计算中	
二、函数的间断点	22	的应用	54
三、闭区间上连续函数的性质	24	一、微分概念	54
习题 1-4	25	二、微分的运算法则	57
第五节 再论极限概念	26	三、微分在近似计算中的应用	58
一、数列极限的“ ϵ - N ”定义	26	习题 2-5	60
二、函数极限的“ ϵ - X ”定义	27	复习题二	60
三、函数极限的“ ϵ - δ ”定义	28	第三章 导数的应用	63
四、几个定理的证明	29	第一节 微分中值定理	63
习题 1-5	30	一、极值的必要条件	63
复习题一	30	二、罗尔定理	64
第二章 导数与微分	33	三、拉格朗日中值定理	65
第一节 导数的概念	33	习题 3-1	66
一、函数的变化率——导数	33	第二节 函数的单调性和极值	67
二、求导数举例	35	一、函数单调性的判别法	67

二、极值存在的充分条件	69	复习题四	118
三、函数的最大值和最小值	71	第五章 定积分	121
习题 3-2	74	第一节 定积分的概念与性质	121
第三节 曲线的凹凸及函数图形 的描绘	75	一、定积分问题的两个实际 引例	121
一、曲线的凹凸及拐点	75	二、定积分的定义	123
二、铅直渐近线和水平渐近线	78	三、定积分的性质	124
三、函数图形的描绘	79	习题 5-1	125
习题 3-3	80	第二节 牛顿-莱布尼兹公式	126
第四节 洛必塔法则	81	一、变上限的定积分	126
一、 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定型的极限	81	二、牛顿-莱布尼兹(Newton- Leibniz)公式	127
二、其他未定型的极限	84	习题 5-2	129
习题 3-4	85	第三节 定积分的换元积分法与 分部积分法	130
第五节 曲率	85	一、定积分的换元积分法	130
一、曲率	85	二、定积分的分部积分法	132
二、曲率的计算公式	86	习题 5-3	134
三、曲率圆与曲率半径	88	第四节 广义积分	135
习题 3-5	89	一、积分区间为无穷区间的广义 积分	136
复习题三	89	二、无界函数的广义积分	137
第四章 不定积分	93	三、 Γ 函数	139
第一节 不定积分的概念与性质	93	习题 5-4	141
一、原函数与不定积分的概念	93	复习题五	141
二、不定积分的性质	95	第六章 定积分的应用	144
三、基本积分公式	95	第一节 定积分的微元法	144
习题 4-1	97	第二节 平面图形的面积	145
第二节 换元积分法	98	一、定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何 意义	145
一、第一类换元法	98	二、 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上所围的 面积	145
二、第二类换元法	103	三、参数方程形式下的面积 公式	147
习题 4-2	107	四、在极坐标系中的情形	148
第三节 分部积分法	108	习题 6-2	150
习题 4-3	110	第三节 体积	151
* 第四节 有理函数与三角函数 有理式的积分	111	一、平行截面面积为已知的立体	
一、有理函数的积分	111		
二、三角函数有理式的积分	114		
* 习题 4-4	115		
第五节 积分表的使用	116		
习题 4-5	118		

体积.....	151	方程.....	174
二、旋转体的体积.....	152	三、 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程 ...	175
习题 6-3	154	习题 7-3	176
第四节 平面曲线的弧长.....	154	第四节 二阶常系数线性微分	
习题 6-4	156	方程.....	176
第五节 定积分在物理方面的		一、二阶线性微分方程的解的	
应用.....	156	结构.....	177
一、变力沿直线所作的功.....	156	二、二阶常系数齐次线性微分方程	
二、液体的静压力.....	157	的解法.....	179
三、平均值和均方根.....	158	三、二阶常系数非齐次线性微分方	
习题 6-5	159	程的解法.....	181
复习题六.....	160	习题 7-4	186
第七章 常微分方程	163	第五节 微分方程应用举例.....	187
第一节 常微分方程的基本概念.....	163	一、一阶微分方程应用举例.....	187
习题 7-1	166	二、二阶微分方程应用举例.....	190
第二节 一阶微分方程.....	166	习题 7-5	191
一、可分离变量型微分方程.....	167	复习题七.....	192
二、齐次方程.....	168	附 录	196
三、一阶线性微分方程.....	169	附录一 部分习题答案.....	196
习题 7-2	172	附录二 基本初等函数的图形及其	
第三节 可降阶的高阶微分方程.....	173	性质.....	207
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程 ...	173	附录三 积分表.....	210
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分		附录四 平面常用曲线及其方程.....	216

第一章 函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象,极限概念是微积分学的理论基础.本章着重介绍函数的极限和连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一、函数的概念

定义 设 D 与 B 是两个非空实数集合,如果对于 D 中的每一个数 x ,按照某种对应法则 f , B 中存在唯一的数 y 与之对应,则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数.这里, D 称为函数的定义域.

对于每个 $x \in D$,按法则 f 所对应的唯一的 y 称为函数 f 在点 x 处的函数值,记为 $y = f(x)$. 而函数值的全体称为函数的值域,记为 W ,显然 $W \subseteq B$.

习惯上,又称 x 为自变量, y 为因变量.由于我们是通过函数值来研究函数,所以也称 $y = f(x)$ 是 x 的函数.

如果 $x_0 \in D$,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义,函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值记为

$$y|_{x=x_0} \text{ 或者 } f(x_0).$$

不同的对应法则表示不同的函数,例如, $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $y = \varphi(x)$ 等等.

通常,函数有三种表示法:解析法、图象法、表格法.

在实际问题中,有时有一个函数在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的情况.例如,脉冲发生器产生一个单三角脉冲,其波形如图 1.1 所示,它的电压 U 与时间 t 的函数关系为

$$U(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau}t, & t \in [0, \frac{\tau}{2}); \\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & t \in [\frac{\tau}{2}, \tau); \\ 0, & t \in [\tau, +\infty). \end{cases}$$

它表示了在区间 $[0, +\infty)$ 上不同的时间范围内,电压变化的不同规律.它是定义域 $D = [0, +\infty)$, 值域 $W = [0, E]$ 的一个函数,而不是三个函数.这种在定义域内不同的区间上用不同的解析式表示的函数,称为分段函数.

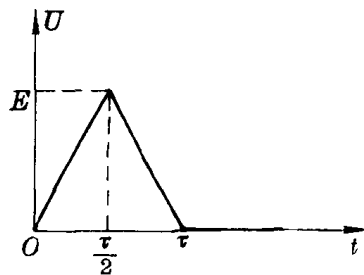


图 1.1

练 习

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\lg(x^2 - 3)}$; (2) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0; \\ 4^x, & x > 0. \end{cases}$

求 $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(x-1)$.

3. 设 $g(t) = t^2 + 1$, 求 $g\left(\frac{1}{t}\right)$, $g(t^2)$, $g[g(t)]$, $g\left[\frac{1}{g(t)}\right]$.

二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**; 如果对于任意 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 在平面直角坐标系中, 偶函数的图形关于 y 轴对称(图1.2), 奇函数的图形关于原点中心对称(图1.3).

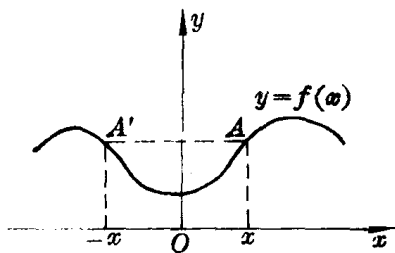


图 1.2

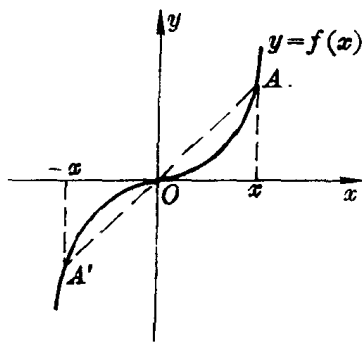


图 1.3

例如, $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数, $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数, 而 $y = x^4 + \sin 2x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是非奇、非偶的函数.

2. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上**单调增加**(图1.4); 当 $x_1 < x_2$ 时都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上**单调减少**(图1.5). 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**. 例如, $y = e^x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加函数, $y = \frac{1}{x}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的单调减

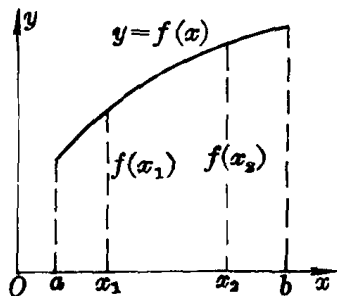


图 1.4

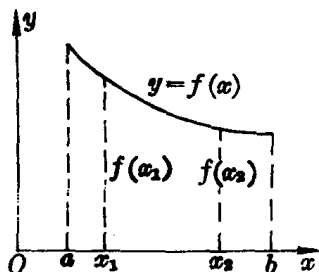


图 1.5

少函数,而 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少,在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

3. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,若存在一个常数 $T \neq 0$,使得对于任意 $x \in D$,必有 $x \pm T \in D$,并且使

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,其中 T 称为函数 $f(x)$ 的周期,周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

例如, $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.周期函数的图形可以由它在一个周期 $[a, a+T]$ 内的图形沿 x 轴向左、右两个方向平移后得到(图 1.6).

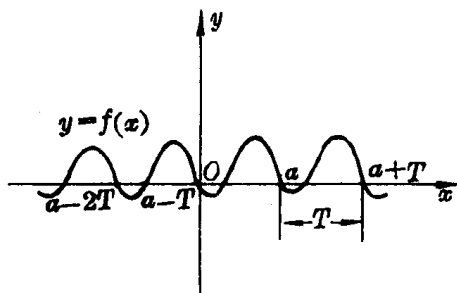


图 1.6

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,区间 $I \subset D$,如果存在一个正数 M ,使得对于任一 $x \in I$,都有 $|f(x)| \leq M$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界,也说 $f(x)$ 是 I 上的有界函数.否则称 $f(x)$ 在 I 上无界,也称 $f(x)$ 为 I 上的无界函数.

例如,函数 $y=\arctg x$,对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,都有不等式 $|\arctg x| < \frac{\pi}{2}$ 成立,所以 $y=\arctg x$ 是 $[-\infty, +\infty)$ 上的有界函数.

应该看到,函数的有界性与 x 取值的区间 I 有关,例如,函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上是无界的,但它在区间 $[1, +\infty)$ 上却是有界的.

练 习

1. 确定下列函数的奇偶性:

(1) $y = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ($a > 0, a \neq 1$);

(2) $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ($a > 0, a \neq 1$);

(3) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1; \\ 1, & |x| \leq 1; \\ x, & x > 1. \end{cases}$

2. 设在对称区间 $(-l, l)$ 上, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为偶函数, $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为奇函数,证明:

(1) $f_1(x) + f_2(x)$ 为偶函数;

(2) $g_1(x) + g_2(x)$ 为奇函数;

(3) $f_1(x) \cdot f_2(x)$ 与 $g_1(x) \cdot g_2(x)$ 都为偶函数;

(4) $f_1(x) \cdot g_1(x)$ 为奇函数.

3. 下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数指出其周期:

(1) $y = A \sin(\omega x + \varphi)$; (2) $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$.

4. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 (a, b) 上有界,证明:

在 (a, b) 上, $f(x) + g(x)$ 和 $f(x) \cdot g(x)$ 都是有界函数.

三、初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为**基本初等函数**. 关于它们的图形和简单性质,在中学里已作过详细介绍. 为了读者查阅方便,仅将它们列于附录一中.

为了介绍初等函数,首先引入复合函数的概念.

1. 复合函数

设 $y=f(u)$, 而 $u=\varphi(x)$, 且函数 $\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $f(u)$ 的定义域内, 那么 y 通过 u 的联系也是自变量 x 的函数, 我们称 y 为 x 的**复合函数**, 记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中, u 称为中间变量.

例如, 由函数 $y=\sqrt{u}$, $u=x+4$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{x+4}$. 为了使 u 的值域包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0, +\infty)$ 内, 必须有 $x \in [-4, +\infty)$, 所以复合函数 $y=\sqrt{x+4}$ 的定义域应为 $[-4, +\infty)$. 又如, 复合函数 $y=\ln(x^2+1)$ 是由函数 $y=\ln u$, $u=x^2+1$ 复合而成的.

在复合函数中也可以出现一个以上的中间变量, 例如, 函数 $y=\arccos u$, $u=\sqrt{v}$, $v=x^2-3$ 可构成复合函数 $y=\arccos \sqrt{x^2-3}$, 这里 u 和 v 都是中间变量.

由基本初等函数经过有限次四则运算后所成的函数称为**简单函数**, 而一个复合函数可以分解为若干个简单函数, 由此也可以找到中间变量.

例 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=(\sin 5x)^3$; (2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $y=\arctg(\sin e^{4x})$.

解 (1) $y=(\sin 5x)^3$ 是由 $y=u^3$, $u=\sin v$, $v=5x$ 复合而成;

(2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 是由 $y=\ln u$, $u=1+\sqrt{v}$, $v=1+x^2$ 复合而成;

(3) $y=\arctg(\sin e^{4x})$ 是由 $y=\arctg u$, $u=\sin v$, $v=e^w$, $w=4x$, 复合而成.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成, 并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如, $y=x^2+\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$, $y=3xe^{\sqrt{x^2-1}}-2$ 等都是初等函数. 而分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 0; \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

不是初等函数, 因为它在定义域内不能用一个解析式表示.

练 习

1. 下列函数是由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=(3x+1)^{10}$;

(2) $y=\lg^3\left(\frac{x}{4}\right)$;

(3) $y=\sin \sqrt{3+2x^4}$;

(4) $y=(\arcsin \sqrt{1-x^2})^3$;

(5) $y=\arctg \sqrt[3]{x^2-1}$.

四、双 曲 函 数

在工程技术中常用到一种由指数函数复合、运算而成的初等函数,称为**双曲函数**.其定义为

$$\text{双曲正弦函数} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\text{双曲余弦函数} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

$$\text{双曲正切函数} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$\text{双曲余切函数} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

利用函数 $y = \frac{1}{2}e^x$ 与 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ 的图象的叠加,可以得到 $y = \operatorname{sh} x$ 和 $y = \operatorname{ch} x$ 的图象如图1.7所示.

$y = \operatorname{sh} x$ 与 $y = \operatorname{ch} x$ 的主要性质如表1-1所示.

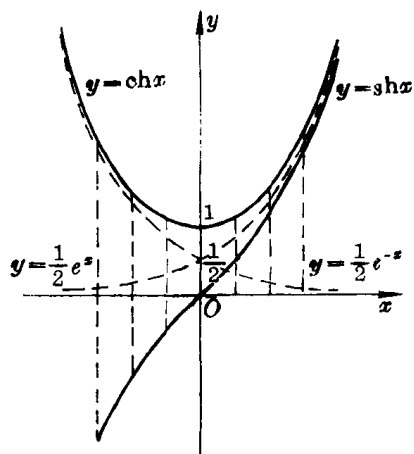


图 1.7

表 1-1

名 称	表 达 式	定 义 域	主 要 性 质
双曲正弦函数	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	奇函数,图形分布在一、三象限,经过原点,在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.
双曲余弦函数	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	偶函数,图形在一、二象限,经过点 $(0,1)$.在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少;在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

由双曲函数的定义,容易推出如下的恒等式:

- (1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
- (2) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
- (3) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.
- (4) $2 \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x - 1, 2 \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x + 1$.
- (5) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.
- (6) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

练 习

证明下列等式:

1. $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x; \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
2. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
3. $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$; (2) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; (3) $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

2. 设 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$.
(3) $f(x+a)$ ($a>0$); (4) $f(x+a)+f(x-a)$. ($a>0$).

3. 若 $f(x+1)=x^2-3x+2$, 求 $f(x)$, $f(x-1)$.

4. 下列各组函数中哪些不能构成复合函数? 如果能构成复合函数, 则写出 $y=f[\varphi(x)]$:

(1) $y=x^3$, $x=\sin t$; (2) $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x-2$;
(3) $y=\sqrt{-u}$, $u=x^3$; (4) $y=\ln u$, $u=x^2-2$.

5. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$; (2) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$.

6. 作出下列函数的图形:

(1) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$; (2) $y=1-|x|$; (3) $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 或 } x > 2 \text{ 时.} \end{cases}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的周期为 2, 并且

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时;} \\ x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

试在 $(-\infty, +\infty)$ 上作出函数 $y=f(x)$ 的图形.

8. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的?

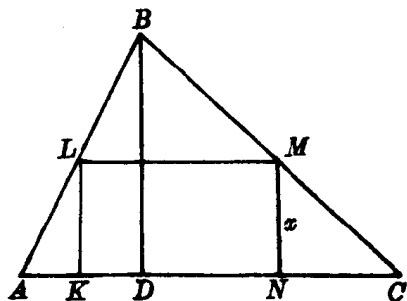
(1) $y=\sin \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$; (2) $y=10 \arctg(x^2+x+1)^2$.

9. 温度计上摄氏零度对应于华氏 32 度; 摄氏 100 度对应于华氏 212 度, 试将摄氏温标表示为华氏温标的函数.

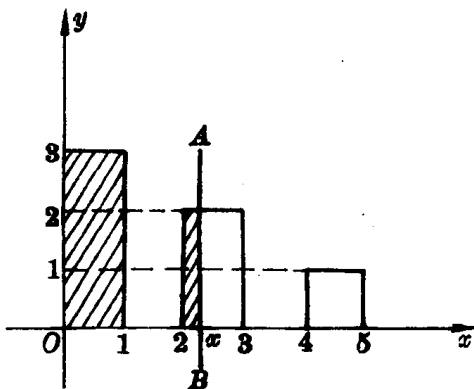
10. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形容器, 试将其表面积 S 表示成底半径 R 的函数, 并写出定义域.

11. 将一块半径为 R 、圆心角为 θ 的扇形铁片做成一个圆锥形容器. 试将容器的容积 V 表示为 θ 的函数.

12. 如图所示, $\triangle ABC$ 中, $AC=b$, $BD=h$, 三角形的内接矩形为 $KLMN$, 记其高 $MN=x$, 试将内接矩形的周长 P 和面积 S 表示为 x 的函数.



(第12题)



(第13题)

13. 如图所示,有三个矩形,其高分别为3米、2米、1米,而底边皆为1米,彼此相距1米.假定一条平行于 y 轴的直线 AB 与 x 轴的交点的横坐标为 x ,当此直线平行移动时,试将阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

第二节 极 限

一、数列的极限

数列是定义在自然数集 N 上的函数,记为 $x_n = f(n) (n=1, 2, 3, \dots)$. 由于全体自然数可以排成一行,因此数列就是按顺序排列的一串数:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

可以简记为 $\{x_n\}$. 数列中的每个数称为数列的项,其中 x_n 称为数列的一般项或通项.

下面让我们考察当 n 无限增大时(记为 $n \rightarrow \infty$, 符号“ $\rightarrow$ ”读作趋向于),一般项 x_n 的变化趋势.

观察下面两个数列:

$$(1) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$(2) 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

为清楚起见,将上述两个数列的各项用数轴上的对应点 $x_1, x_2, \dots$ 表示,如图1.8(a)、(b)所示.

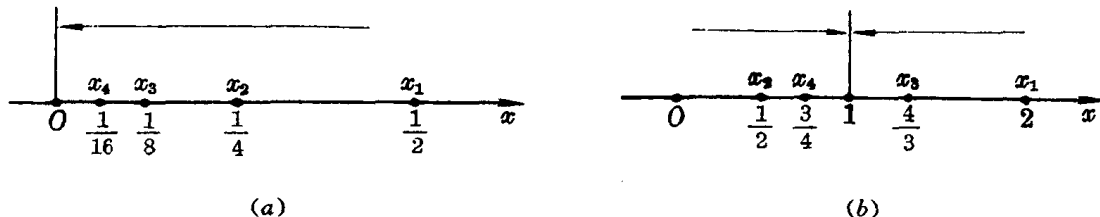


图 1.8

从图1.8可知,当 n 无限增大时,数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 在数轴上的对应点从原点的右侧无限接近于0;数列 $\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 在数轴上的对应点从 $x=1$ 的两侧无限接近于1.一般地,可以给出下面的定义:

定义1 对于数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,一般项 x_n 的值无限接近于一个确定的常数 A ,则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋向于无穷大时的极限,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \text{ 或者 } x_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

此时,也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ,而称 $\{x_n\}$ 为收敛数列.如果数列的极限不存在,则称它为发散数列,例如数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 是收敛数列,而 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 是发散数列.

例 观察下列数列的变化趋势,哪些数列收敛?哪些数列发散?如果收敛,写出数列的极限.

$$(1) x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, (n=1, 2, \dots);$$

$$(2) x_n = 2 + (-1)^n, (n=1, 2, \dots).$$

解 (1) 将数列 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ 的各项列成下表:

表 1-2

n	1	2	3	4	5	6	...
$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	0.3333	0.1111	0.0370	0.0123	0.0041	0.0014	...

从表中可以看出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0$,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

(2) 将数列 $\{2 + (-1)^n\}$ 的各项列成下表:

表 1-3

n	1	2	3	4	5	6	...
$2 + (-1)^n$	1	3	1	3	1	3	...

从表中可以看出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 一般项 $2 + (-1)^n$ 的值交替地取 1 和 3, 所以不能无限接近于一个确定的常数 A , 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} [2 + (-1)^n]$ 不存在, 即数列为发散的.

练 习

观察下列数列的变化趋势, 哪些数列收敛? 哪些数列发散? 若数列收敛, 则写出其极限.

1. $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. $x_n = \frac{n+1}{3n-1}$.

3. $x_n = n + (-1)^n$.

二、函数的极限

1. $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

先看一个例子:

当 $|x|$ 无限增大 (或称 x 趋向于无穷大, 记为 $x \rightarrow \infty$) 时, 考察函数 $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ 的变化趋势. 我们可以看出当 $x \rightarrow \infty$ 时, 对应的函数值 $f(x) = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$ 无限接近于常数 2, 则称常数 2 为函数 $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x} = 2$.

定义 2 如果当 $|x|$ 无限增大时, 函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \text{ 或者 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty).$$

如果当 $x > 0$, 且 $|x|$ 无限增大, 则可记为 $x \rightarrow +\infty$; 如果当 $x < 0$ 且 $|x|$ 无限增大, 则可记为 $x \rightarrow -\infty$.

定义3 如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限. 记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 或者 $f(x) \rightarrow A \ (x \rightarrow +\infty)$;

如果当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \text{ 或者 } f(x) \rightarrow A \ (x \rightarrow -\infty).$$

例如, 由图1.9可以看出:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

显然, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 同时成立.

对于上面的函数 $f(x) = \arctg x$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x$ 不存在.

2. $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

现在讨论当 x 无限接近于某数 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0$, 读作 x 趋向于 x_0) 时, 函数 $f(x)$ 的极限问题.

考察当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{2x^2-2}{x-1}$ 的变化趋势. 注意到当 $x \neq 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{2x^2-2}{x-1} = 2(x+1)$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 的值无限接近于常数4 (图1.10), 称常数4为函数 $f(x) = \frac{2x^2-2}{x-1}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2}{x-1} = 4$.

下面我们给出当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的一般定义.

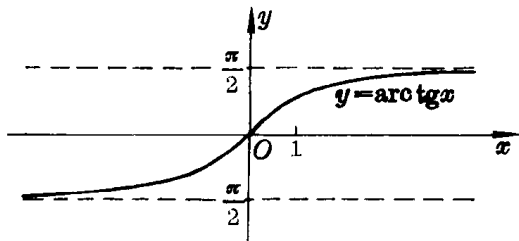


图 1.9

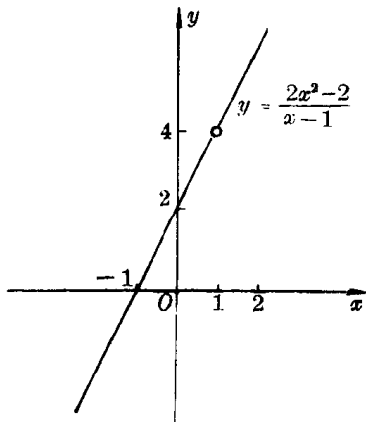


图 1.10

定义4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义 (x_0 可以除外), 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或者 $f(x) \rightarrow A \ (x \rightarrow x_0)$.

从上面的例子还可看出, 虽然 $f(x) = \frac{2x^2-2}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义, 但是 $x \rightarrow 1$ 时函数 $f(x)$ 的极限却是存在的, 所以当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限与函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否有定义无关. 根据定义, 容易得到下面的结论:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C \quad (C \text{ 为常数}).$$

3. 左极限与右极限

在定义4中 $x \rightarrow x_0$ 是指 x 从 x_0 的两侧趋向于 x_0 , 但是有时需要考虑 x 仅从 x_0 的一侧趋向于 x_0 时函数的变化趋势.

如果当 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^-$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 或者 } f(x_0 - 0) = A.$$

如果当 x 从 x_0 的右侧趋向于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^+$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, \text{ 或者 } f(x_0 + 0) = A.$$

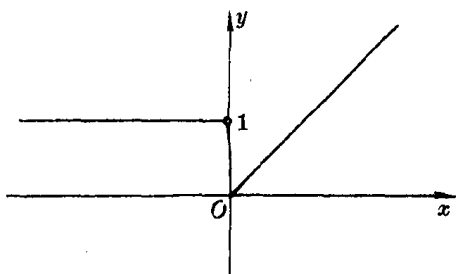


图 1.11

可以证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 同时 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

例 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \\ x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$

讨论当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

解 $x=0$ 是函数定义域中两个区间的分界点.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在(图1.11).

4. 极限的性质

首先介绍邻域与去心邻域的概念, 设 x_0 与 δ 为两个实数, 且 $\delta > 0$, 数集 $\{x \mid |x - x_0| < \delta \text{ 且 } x \in R\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$, 它等价于开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 数集 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 且 } x \in R\}$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta) - \{x_0\}$.

函数的极限具有如下几个性质:

定理1 (保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 x_0 的某一去心邻域, 当 x 属于该邻域时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

定理2 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或者 $f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理3 (夹逼性定理) 如果对于 x_0 的某一去心邻域内的一切 x , 都有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

关于以上三个定理的证明, 将在本章第五节再论极限概念中给出.

练 习

1. 观察并写出下列函数的极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)$;