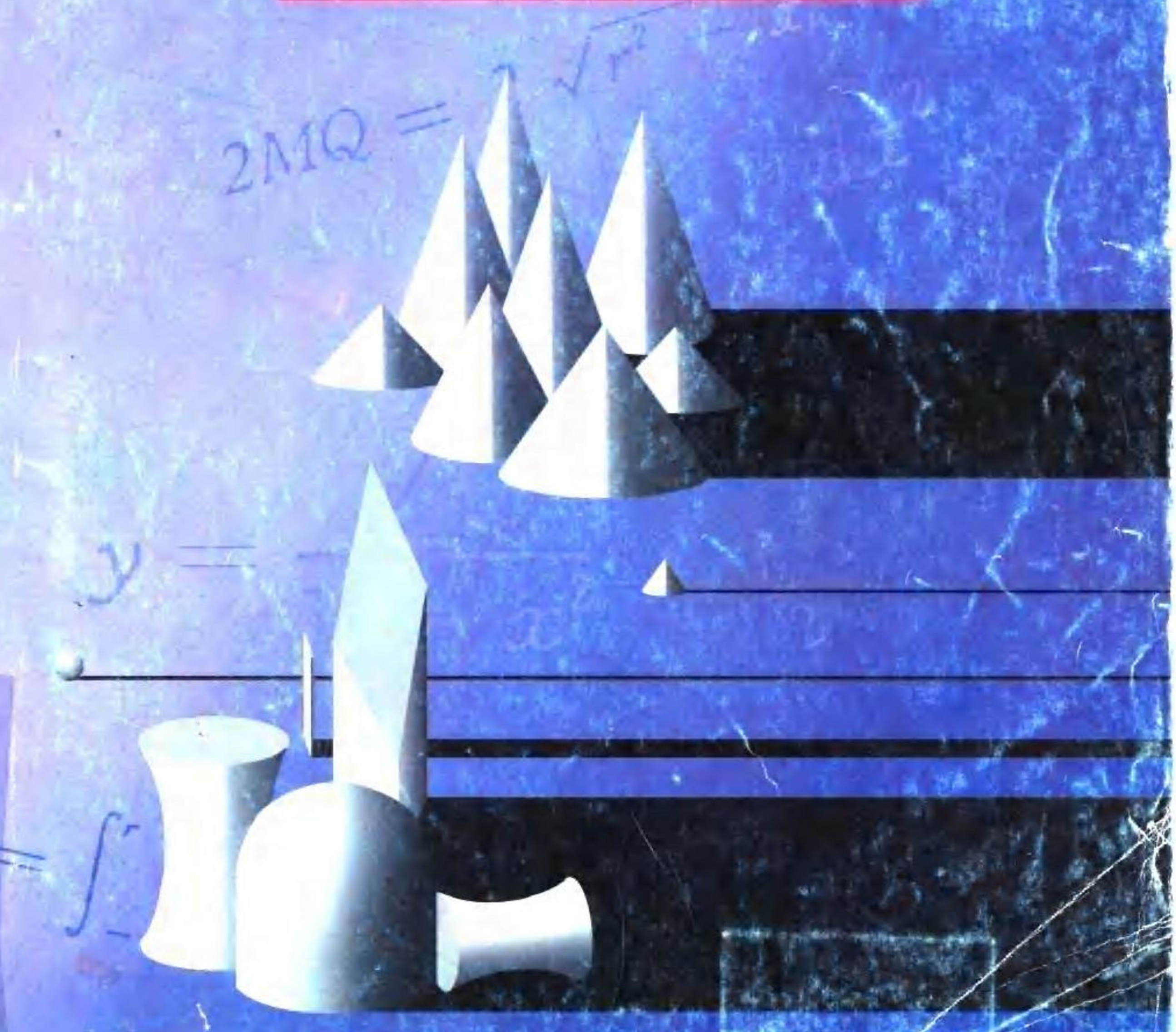
高等数学

上册

（第三版）

上海市高等专科学校《高等数学》编写组编



上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高 等 数 学

（上 册）

·第三版·

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

责任编辑　周玉刚

高等专科学校试用教材
高　等　数　学
（上　册）
·第三版·
上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编
上海科学技术出版社出版、发行
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所经销　　上海新华印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 14　字数 330 000
1985 年 5 月第 1 版
1992 年 4 月第 2 版
1998 年 6 月第 3 版　　1998 年 6 月第 16 次印刷
印数：440001—465000
ISBN 7-5323-4560-2/O·211
定价：11.30 元

前　言

为了迎接21世纪，在上海市教委的组织和领导下，由上海市各高等专科学校联合组成上海市高等专科学校《高等数学》编写组，从目前教改状况及发展要求出发，对编写大纲进行全面的探讨和大胆的改革，力求为培养21世纪人才提供一本具有专科特色的教材。

本教材从高等工程专科学校培养目标出发，参照高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》、《概率与数理统计课程教学基本要求》、《线性规划课程教学基本要求》、《线性代数课程教学基本要求》，在《高等数学》第一版、第二版的基础上进行编写的。

本教材在内容的选取上，除保证必要的系统外，尽量注意到本课程内容的应用性和针对性。重要的概念，尽量从实际问题引出，不过分追求理论证明和推导的严密性，而注意加强那些与实际应用联系较多的基础知识；加强基本运算方法的训练和能力的培养，而不追求过分复杂的计算。为有利于高级工程技术应用型人才的培养，在下册专辟一章讲解线性规划的基本概念、基本理论和基本方法。为有助于及时消化和理解概念及方法，每节或在适当的内容之后，配有练习题。每节后配有习题，每章后配有复习题。

全书内容采用模块式结构，分上、中、下三册。上册七章包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分的应用，常微分方程；中册五章包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，级数，数值计算初步；下册包括线性代数、线性规划、概率与数理统计课程内容。教学授课时数上、中册110～130学时，下册70～84学时。书中注有“*”号的内容(未计算学时)供不同专业、不同要求选用。

本教材由朱弘毅主编，秦耀堂、邵振和、陆晋奎分别为上、中、下册副主编。参加编写的还有(以姓氏笔划为序)：金毛弟、邵建润、张宛平、沐国宝、陆信芳、陈孩未、张瑞瑾、曹颖中等。全书的框架结构由朱弘毅、秦耀堂负责组织。

本书由上海铁道大学朱学炎教授主审，参加审稿的还有(以姓氏笔划为序)：王绍智、李兰舫、周玉刚、张起云、邱慈江、洪蓬、黄炳章、薛闻起等，他们认真地审阅了原稿，并提出了许多宝贵的改进意见，对此我们表示衷心的感谢。

限于编著水平，加之时间仓促，书中一定存在不妥之处，希望使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

1997年6月

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，极限概念是微积分学的理论基础. 本章着重介绍函数的极限和连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　函　　数

一、函数的概念

定义　设 D 与 B 是两个非空实数集合，如果对于 D 中的每一个数 x，按照某种对应法则 f，B 中存在唯一的数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的函数. 这里，D 称为函数的定义域.

对于每个 $x\in D$，按法则 f 所对应的唯一的 y 称为函数 f 在点 x 处的函数值，记为 $y=f(x)$. 而函数值的全体称为函数的值域，记为 W，显然 $W\subseteq B$.

习惯上，又称 x 为自变量，y 为因变量. 由于我们是通过函数值来研究函数，所以也称 $y=f(x)$ 是 x 的函数.

如果 $x_0\in D$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值记为

$$y|_{x=x_0}\text{ 或者 }\quad f(x_0).$$

不同的对应法则表示不同的函数，例如，$y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$等等.

通常，函数有三种表示法：解析法、图象法、表格法.

在实际问题中，有时有一个函数在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的情况. 例如，脉冲发生器产生一个单三角脉冲，其波形如图 1.1 所示，它的电压 U 与时间 t 的函数关系为

$$U(t)=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & t\in\left[0,\dfrac{\tau}{2}\right);\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in\left[\dfrac{\tau}{2},\tau\right);\\ 0, & t\in[\tau,+\infty).\end{cases}$$

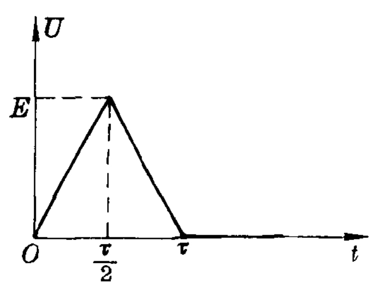


图　1.1

它表示了在区间$[0,+\infty)$上不同的时间范围内，电压变化的不同规律. 它是定义域 $D=[0,\infty)$，值域 $W=[0,E]$的一个函数，而不是三个函数. 这种在定义域内不同的区间上用不同的解析式表示的函数，称为**分段函数**.

练　　习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$；(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0;\\ 4^x, & x>0.\end{cases}$

求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-2)$，$f(x-1)$.

3. 设 $g(t)=t^2+1$，求 $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$，$g(t^2)$，$g[g(t)]$，$g\left[\dfrac{1}{g(t)}\right]$.

二、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 在平面直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴对称（图1.2），奇函数的图形关于原点中心对称（图1.3）.

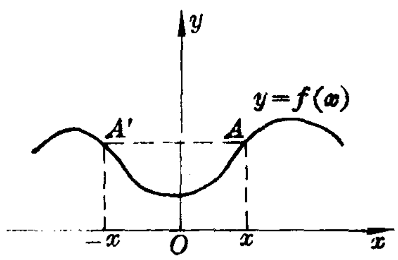


图 1.2

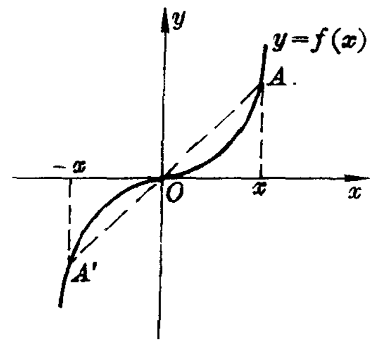


图 1.3

例如，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数，而 $y=x^4+\sin 2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非奇、非偶的函数.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上**单调增加**（图1.4）；当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上**单调减少**（图1.5）. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**. 例如，$y=e^x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数，$y=\dfrac{1}{x}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调减

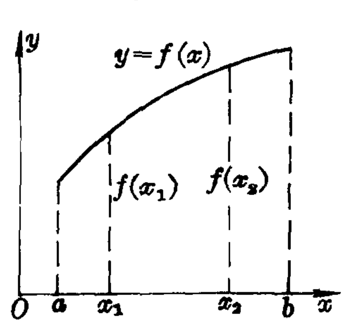


图 1.4

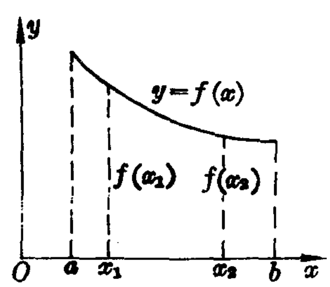


图 1.5

少函数，而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

3. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个常数 $T\neq 0$，使得对于任意 $x\in D$，必有 $x\pm T\in D$，并且使

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，其中 T 称为函数 $f(x)$ 的周期，周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. 周期函数的图形可以由它在一个周期 $[a,a+T]$ 内的图形沿 x 轴向左、右两个方向平移后得到（图 1.6）.

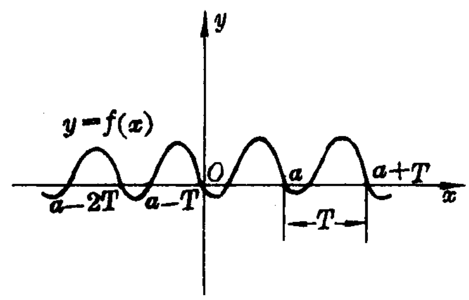


图 1.6

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果存在一个正数 M，使得对于任一 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**，也说 $f(x)$ 是 I 上的有界函数. 否则称 $f(x)$ 在 I 上**无界**，也称 $f(x)$ 为 I 上的无界函数.

例如，函数 $y=\operatorname{arc\,tg}x$，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，都有不等式 $|\operatorname{arc\,tg}x|<\frac{\pi}{2}$ 成立，所以 $y=\operatorname{arc\,tg}x$ 是 $[-\infty,+\infty)$ 上的有界函数.

应该看到，函数的有界性与 x 取值的区间 I 有关，例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是无界的，但它在区间 $[1,+\infty)$ 上却是有界的.

练　　习

1. 确定下列函数的奇偶性：

   (1) $y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})\quad(a>0,\ a\neq 1)$；

   (2) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\quad(a>0,\ a\neq 1)$；

   (3) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1;\\ 1 & |x|\leqslant 1;\\ x, & x>1.\end{cases}$

2. 设在对称区间 $(-l,l)$ 上，$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为偶函数，$g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为奇函数，证明：

   (1) $f_1(x)+f_2(x)$ 为偶函数；

   (2) $g_1(x)+g_2(x)$ 为奇函数；

   (3) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 与 $g_1(x)\cdot g_2(x)$ 都为偶函数；

   (4) $f_1(x)\cdot g_1(x)$ 为奇函数.

3. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期：

   (1) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$；(2) $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}$.

4. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 (a,b) 上有界，证明：

   在 (a,b) 上，$f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 都是有界函数.

三、初 等 函 数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为**基本初等函数**.关于它们的图形和简单性质,在中学里已作过详细介绍.为了读者查阅方便,仅将它们列于附录一中.

为了介绍初等函数,首先引入复合函数的概念.

1. 复合函数

设 $y=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$,且函数 $\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $f(u)$ 的定义域内,那么 y 通过 u 的联系也是自变量 x 的函数,我们称 y 为 x 的**复合函数**,记为 $y=f[\varphi(x)]$.其中,u 称为中间变量.

例如,由函数 $y=\sqrt{u}$,$u=x+4$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{x+4}$.为了使 u 的值域包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 内,必须有 $x\in[-4,+\infty)$,所以复合函数 $y=\sqrt{x+4}$ 的定义域应为 $[-4,+\infty)$.又如,复合函数 $y=\ln(x^2+1)$ 是由函数 $y=\ln u$,$u=x^2+1$ 复合而成的.

在复合函数中也可以出现一个以上的中间变量,例如,函数 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x^2-3$ 可构成复合函数 $y=\arccos\sqrt{x^2-3}$,这里 u 和 v 都是中间变量.

由基本初等函数经过有限次四则运算后所成的函数称为**简单函数**,而一个复合函数可以分解为若干个简单函数,由此也可以找到中间变量.

例 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=(\sin 5x)^3$;(2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $y=\operatorname{arc\,tg}(\sin e^{4x})$.

解 (1) $y=(\sin 5x)^3$ 是由 $y=u^3$,$u=\sin v$,$v=5x$ 复合而成;

(2) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 是由 $y=\ln u$,$u=1+\sqrt{v}$,$v=1+x^2$ 复合而成;

(3) $y=\operatorname{arc\,tg}(\sin e^{4x})$ 是由 $y=\operatorname{arc\,tg} u$,$u=\sin v$,$v=e^w$,$w=4x$,复合而成.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成,并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如,$y=x^2+\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,$y=3xe^{\sqrt{[illegible]}}-2$ 等都是初等函数.而分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\geqslant 0; \\ x^2, & x<0 \end{cases}$$

不是初等函数,因为它在定义域内不能用一个解析式表示.

练 习

1. 下列函数是由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=(3x+1)^{10}$; (2) $y=\operatorname{tg}^{[illegible]}\left(\dfrac{x}{4}\right)$;

(3) $y=\sin\sqrt{3+2x^4}$; (4) $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^3$;

(5) $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt[3]{x^2-1}$.

四、双曲函数

在工程技术中常用到一种由指数函数复合、运算而成的初等函数，称为**双曲函数**. 其定义为

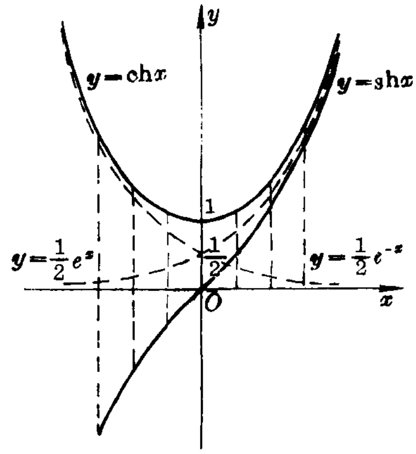


图 1.7

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

双曲正切函数 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

双曲余切函数 $\mathrm{cth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

利用函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$ 的图象的叠加，可以得到 $y=\mathrm{sh}x$ 和 $y=\mathrm{ch}x$ 的图象如图1.7所示.

$y=\mathrm{sh}x$ 与 $y=\mathrm{ch}x$ 的主要性质如表1-1所示.

表 1-1

名称	表达式	定义域	主要性质
双曲正弦函数	$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	奇函数，图形分布在一、三象限，经过原点，在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.
双曲余弦函数	$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	偶函数，图形在一、二象限，经过点$(0,1)$. 在$(-\infty,0)$内单调减少；在$(0,+\infty)$内单调增加.

由双曲函数的定义，容易推出如下的恒等式：

(1) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$.

(2) $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$.

(3) $\mathrm{ch}2x=\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x$.

(4) $2\mathrm{sh}^2x=\mathrm{ch}2x-1, 2\mathrm{ch}^2x=\mathrm{ch}2x+1$.

(5) $\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$.

(6) $\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$.

练　　习

证明下列等式：

1. $\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=\mathrm{ch}2x$； $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$.

2. $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$.

3. $1-\mathrm{th}^2x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2x}$； $\mathrm{cth}^2x-1=\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2x}$.

习题　1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；(2) $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$；(3) $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

2. 设 $y=f(x)$的定义域为$[0,1]$,求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$.

(3) $f(x+a)$ $(a>0)$；　　(4) $f(x+a)+f(x-a)$. $(a>0)$.

3. 若 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x)$,$f(x-1)$.

4. 下列各组函数中哪些不能构成复合函数?如果能构成复合函数,则写出 $y=f[\varphi(x)]$：

(1) $y=x^3$, $x=\sin t$；　　(2) $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x-2$；

(3) $y=\sqrt{-u}$, $u=x^3$；　　(4) $y=\ln u$, $u=x^2-2$.

5. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$；(2) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1$.

6. 作出下列函数的图形：

(1) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$；(2) $y=1-|x|$；(3) $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 2\text{时}；\\ 0, & \text{当 } x<0\text{或 } x>2\text{时}.\end{cases}$

7. 已知函数 $f(x)$的周期为2,并且

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } -1<x<0 \text{ 时}；\\ x^2, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

试在$(-\infty,+\infty)$上作出函数 $y=f(x)$的图形.

8. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的?

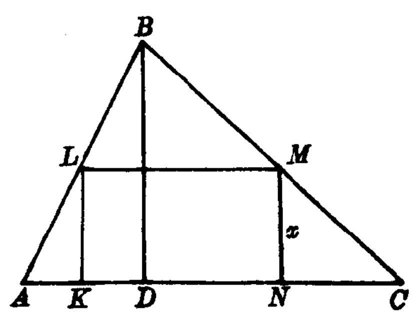
(1) $y=\sin\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$；　　(2) $y=10\operatorname{arc\,tg}(x^2+x+1)^2$.

9. 温度计上摄氏零度对应于华氏32度；摄氏100度对应于华氏212度,试将摄氏温标表示为华氏温标的函数.

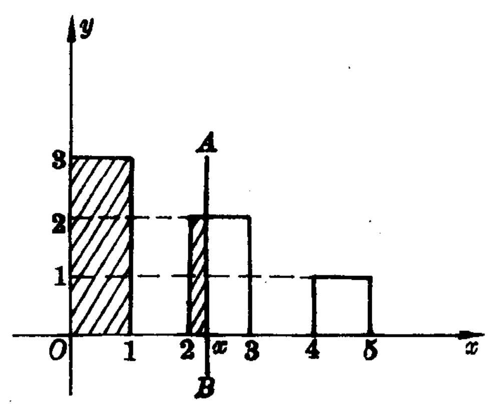
10. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形容器,试将其表面积 S 表示成底半径 R 的函数,并写出定义域.

11. 将一块半径为 R、圆心角为 θ 的扇形铁片做成一个圆锥形容器. 试将容器的容积 V 表示为 θ 的函数.

12. 如图所示,$\triangle ABC$ 中,$AC=b$,$BD=h$,三角形的内接矩形为 $KLMN$,记其高 $MN=x$,试将内接矩形的周长 P 和面积 S 表示为 x 的函数.



(第12题)



(第13题)

13. 如图所示，有三个矩形，其高分别为3米、2米、1米. 而底边皆为1米，彼此相距1米. 假定一条平行于 y 轴的直线 AB 与 x 轴的交点的横坐标为 x，当此直线平行移动时，试将阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

第二节 极　限

一、数列的极限

数列是定义在自然数集 N 上的函数，记为 $x_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$. 由于全体自然数可以排成一列，因此数列就是按顺序排列的一串数：

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

可以简记为 $\{x_n\}$. 数列中的每个数称为数列的项，其中 x_n 称为数列的一般项或通项.

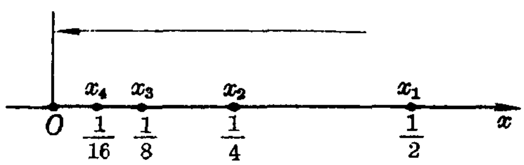
下面让我们考察当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$，符号"$\longrightarrow$"读作趋向于)，一般项 x_n 的变化趋势.

观察下面两个数列：

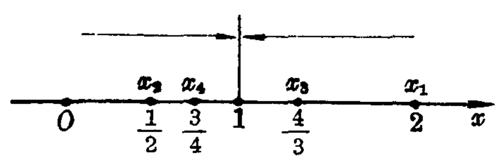
(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

(2) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

为清楚起见，将上述两个数列的各项用数轴上的对应点 $x_1,x_2,\cdots$ 表示，如图1.8(a)、(b)所示.



(a)



(b)

图 1.8

从图1.8可知，当 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 在数轴上的对应点从原点的右侧无限接近于0；数列 $\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 在数轴上的对应点从 $x=1$ 的两侧无限接近于1. 一般地，可以给出下面的定义：

定义1　对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，一般项 x_n 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋向于无穷大时的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\ \text{或者}\quad x_n\longrightarrow A\quad(n\to\infty).$$

此时，也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，而称 $\{x_n\}$ 为收敛数列. 如果数列的极限不存在，则称它为发散数列，例如数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 是收敛数列，而 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 是发散数列.

例　观察下列数列的变化趋势，哪些数列收敛？哪些数列发散？如果收敛，写出数列的极限.

(1) $x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $(n=1,2,\cdots)$;

(2) $x_n=2+(-1)^n$, $(n=1,2,\cdots)$.

解 (1) 将数列$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$的各项列成下表：

表 1-2

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	0.3333	0.1111	0.0370	0.0123	0.0041	0.0014	$\cdots$

从表中可以看出，当 $n\to\infty$时，$\left(\frac{1}{3}\right)^n\longrightarrow 0$，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0.$$

(2) 将数列$\{2+(-1)^n\}$的各项列成下表：

表 1-3

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$2+(-1)^n$	1	3	1	3	1	3	$\cdots$

从表中可以看出，当 $n\to\infty$时，一般项$2+(-1)^n$ 的值交替地取1和3，所以不能无限接近于一个确定的常数 A，所以$\lim\limits_{n\to\infty}[2+(-1)^n]$不存在，即数列为发散的.

练　　习

观察下列数列的变化趋势，哪些数列收敛？哪些数列发散？若数列收敛，则写出其极限.

1. $x_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.　　**2.** $x_n=\frac{n+1}{3n-1}$.　　**3.** $x_n=n+(-1)^n$.

二、函数的极限

1. $x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限

先看一个例子：

当$|x|$无限增大(或称 x 趋向于无穷大，记为 $x\to\infty$)时，考察函数 $f(x)=\frac{2x+3}{x}$的变化趋势. 我们可以看出当 $x\to\infty$时，对应的函数值 $f(x)=\frac{2x+3}{x}=2+\frac{3}{x}$无限接近于常数2，则称常数2为函数 $f(x)=\frac{2x+3}{x}$当 $x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x}=2$.

定义2 如果当$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,\ 或者\quad f(x)\longrightarrow A\ \ (x\to\infty).$$

如果当 $x>0$，且$|x|$无限增大，则可记为 $x\to+\infty$；如果当 $x<0$且$|x|$无限增大，则可记为 $x\to-\infty$.

定义3 如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 或者 $f(x)\to A\quad(x\to+\infty)$；

如果当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{，或者 }f(x)\to A\quad(x\to-\infty).$$

例如，由图1.9可以看出：

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 同时成立.

对于上面的函数 $f(x)=\operatorname{arc\,tg}x$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arc\,tg}x$ 不存在.

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

现在讨论当 x 无限接近于某数 x_0（记为 $x\to x_0$，读作 x 趋向于 x_0）时，函数 $f(x)$ 的极限问题.

考察当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 的变化趋势. 注意到当 $x\neq1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}=2(x+1)$，所以当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的值无限接近于常数4（图1.10），称常数4为函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 当 $x\to1$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-2}{x-1}=4$.

下面我们给出当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的一般定义.

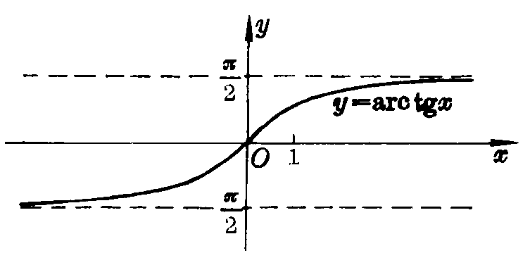


图 1.9

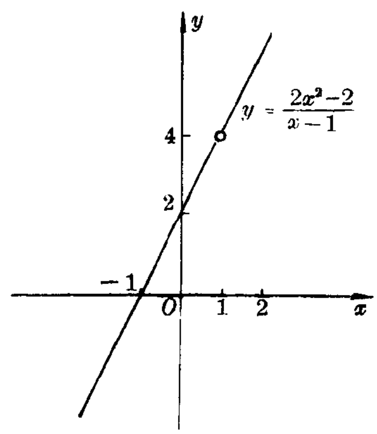


图 1.10

定义4 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义（x_0 可以除外），如果当 $x\to x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或者 $f(x)\to A\quad(x\to x_0)$.

从上面的例子还可看出，虽然 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，但是 $x\to1$ 时函数 $f(x)$ 的极限却是存在的，所以当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限与函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否有定义无关. 根据定义，容易得到下面的结论：

$$\lim_{x\to x_0}C=C\quad(C\text{ 为常数}).$$

3. 左极限与右极限

在定义4中 $x\to x_0$ 是指 x 从 x_0 的两侧趋向于 x_0，但是有时需要考虑 x 仅从 x_0 的一侧趋向于 x_0 时函数的变化趋势.

如果当 x 从 x_0 的左侧趋向于 x_0（记作 $x\to x_0^-$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, \text{ 或者 } f(x_0 - 0) = A.$$

如果当 x 从 x_0 的右侧趋向于 x_0（记作 $x\to x_0^+$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A, \text{ 或者 } f(x_0 + 0) = A.$$

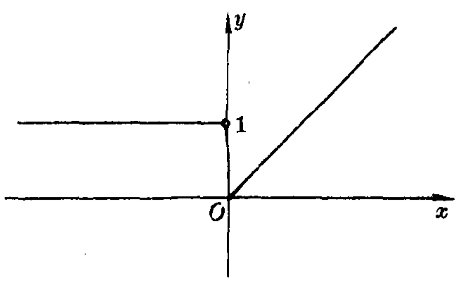


图 1.11

可以证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 同时 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x<0\text{时};\\ x, & \text{当 } x\geqslant 0\text{时}.\end{cases}$

讨论当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

解 $x=0$ 是函数定义域中两个区间的分界点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在(图1.11).

4. 极限的性质

首先介绍邻域与去心邻域的概念，设 x_0 与 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-x_0|<\delta \text{ 且} x\in R\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $0(x_0,\delta)$，它等价于开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 数集 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta \text{ 且 } x\in R\}$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $0(x_0,\delta)-\{x_0\}$.

函数的极限具有如下几个性质：

定理1 （保号性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 x_0 的某一去心邻域，当 x 属于该邻域时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

定理2 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或者 $f(x)\leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

定理3 （夹逼性定理）如果对于 x_0 的某一去心邻域内的一切 x，都有

$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

关于以上三个定理的证明，将在本章第五节再论极限概念中给出.

练　　习

1. 观察并写出下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$;