应 用 数 学 丛 书

网 络 理 论

张 正 寅 编著

国防工业出版社

内容简介

本书讨论电网络和系统理论中几种常用的数学方法。第一部分介绍图论，内容包括：图的基本概念及其在电网络分析中的应用，连通度及网络流，平面图，科茨图和信号流图；第二部分讨论微分方程定性理论，包括相平面，极限环和李雅普诺夫意义下的稳定性理论；第三部分讨论近似分析法，包括平均法，奇异摄动和描述函数。

本书可作为工科院校的研究生、教师和高级工程技术人员的参考书。

应用数学丛书

网络理论

张正黄 编著

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

昌平县马池口印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张8 5/8　223千字

1988年5月第一版　1988年5月第一次印刷　印数：0,001—4,550册

ISBN7-118-00232-1/O15　定价：1.95元

DJ1 /218/07

应用数学丛书目录

*27. 数理逻辑	沈百英	编著
*28. 线性系统与多变量控制	叶庆凯	编著
29. 最优化计算方法	马仲蕃、应玫茜、陈光亚	编著
30. 实用数理统计	李国英　吴启光	编著
*31. 多项式与多项式矩阵	王恩平、王朝珠	编著
32. 索伯列夫空间	丁夏畦	编著
33. 旋转群与四元素方法	毕大川	编著
34. 信息论与最优编码	章照止	编著
35. 场的数学理论及物理应用	杜　珣	编著
36. 系统的动态辨识	张永光	编著
*37. 非线性系统分析与应用	司徒荣	编著
38. 数学物理数值方法	应隆安、韩厚德 滕震环、黄禄平	编著
*39. 误差理论与数据处理	贾沛璋	编著
40. 可计算性与计算复杂性	李　未	编著
*41. 随机过程理论及应用	熊大国	编著
42. 估计理论与随机控制	卢伯英	编著
43. 应用组合数学	刘振宏	编著
*44. 渐进分析方法及应用	徐利治、陈文忠	编著
45. 有限元方法	应隆安	编著
46. 经济数学	苑凤歧、林　寅	编著
*47. 预测的数学方法	张有为	编著
48. 粘性流体理论	吴望一、韩厚德	编著
49. 塑性理论	黄筑平	编著
50. 变分法及其应用	叶庆凯、郑应平	编著

* 表示该书已出版或即将出版。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，陆续出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　　言

随着我国现代化建设的迅速发展，网络理论已成为许多专业的科技工作者所必具备的知识。但在这一领域内，纯数学专业的专著往往内容深、篇幅大，而工科专业书一般又侧重解决实际问题，理论探讨较少。本书希望成为二者之间的过渡桥梁，为工科院校的研究生、教师和高级工程技术人员提高网络理论水平提供一本数学参考书。

本书内容包括三部分：一、网络图论（1～4章）；二、微分方程定性理论（5～7章）；三、近似分析法（8～10章）。本书编写时以基础理论为主，并合理安排有关应用问题，力求做到概念清楚，论证严谨和简明扼要。本书中有些内容在目前同类中文书籍中或者著者尚未见到或者较少论及，例如，用图论方法证明电网络方程解的存在与唯一性，利用科茨（Coates）图理论导出梅森（Mason）公式，等等。

由于著者水平有限，书中如有缺点和错误，欢迎读者批评指正。

目　录

第一章　图论与电网络

电网络是由一些元件按某种方式连接而成，因此，描述网络特性的方程组同两个因素有关：一是每个网络元件的特性，二是网络的拓扑结构，即元件彼此之间连接的方式。正是由于第二个因素，使图论成为研究网络的有力工具。本章介绍作为现代电路理论重要组成部分的图论基础知识，并用它们导出网络方程组存在唯一解的充要条件。

§1.1　图 与 子 图

一、一些基本定义

一个图是由一些点以及它们之间的某些联线组成的，它可以作为一类物理系统的数学模型。如果在研究一个问题时用一组点代表考虑的对象，而当两对象之间存在指定的关系时就用一条边把它们连接起来，那么，这问题就可以用一个图来表示。例如，点可以代表人，两点间用线连接表示这两个人互相认识，也可以用点表示城市，用线表示两城市之间的通讯线路。若用图的一条边表示电气元件，用顶点代表几个元件相连接的节点，那么电网络也可以用图来表示。注意，我们感兴趣的是两个对象之间是否存在特定的关系（即两个点之间是不是有线相连），而不是研究对象本身的属性。由此产生了抽象的图的概念。

图$G=(V, E)$由两个集合组成：V是有限集合，其元素称为**顶点**，E也是有限集合，其元素称为**边**。每一边同一对顶点相对应。如果图G的边同有序的顶点对相对应，则G称为**有向图**；如果图G的边同无序的顶点对相对应，则G称为**无向图**。下面先讨论无向图，§1.6再讨论有向图。

若用符号v_1，v_2，v_3，…代表图的顶点，用e_1，e_2，e_3，…表示

图的边，则与边e_k对应的顶点v_i和v_j称为e_k的端点，并把e_k记为$e_k=(v_i,\ v_j)$。一条边称为与它的端点**关联**。与同一条边关联的两个端点称为**邻接**。若两条边有一公共端点，则称这两条边**邻接**。

如果用平面上的点表示图的顶点，用平面上连接相应顶点而不经过其他顶点的直线或曲线来表示边，那么，一个抽象的图可以用平面上的图形来表示。我们经常把图的几何表示就看成是这个图。

设图$G=(V,\ E)$，其中顶点的集合$V=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$，边的集合$E=\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7\}$，边与顶点的对应关系为$e_1=(v_2,\ v_2)$，$e_2=(v_2,\ v_4)$，$e_3=(v_1,\ v_2)$，$e_4=(v_1,\ v_3)$，$e_5=(v_1,\ v_3)$，$e_6=(v_3,\ v_4)$，$e_7=(v_4,\ v_5)$。这个图的几何表示如图 1-1 所示。

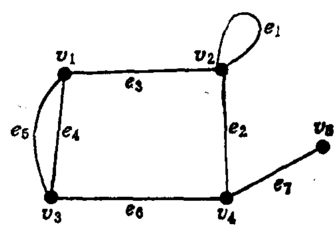

图 1-1

若一边的两端点相同，则称它为**自环**。两个顶点之间多于一条边，则称为**多重边**，并要用不同的符号记这些边以示区别。无自环且无多重边的图称为**简单图**。一个图G称为n**阶**时，则图G的顶点集有n个元素。

若图G没有边也没有顶点，则称作**空图**，记为ϕ。只有一个顶点的图称为**平凡图**。

以顶点v为端点的边数称为顶点v的**度**，记为$d(v)$。自环的边要计算两次。由于在计算顶点的度时每条边都用到两次，因此，图G的全部顶点度数的和就是边数的两倍，即下面的定理成立：

定理1.1.1 图G中所有顶点度数之和等于边数的2倍，即

$$\sum_{v\in V} d(v)=2q$$

如果$d(v)$是奇（偶）数，就称顶点v是奇（偶）顶点。

定理1.1.2 在任何图中，奇顶点的数目为偶数。

证明 设图G有n个顶点。不妨设前r个顶点v_1，v_2，$\cdots$，v_r是偶顶点，其余（$n-r$）个为奇顶点，那么，

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=\sum_{i=1}^{r} d(v_i)+\sum_{i=r+1}^{n} d(v_i)$$

由定理1.1.1，上式左端为偶数，而右端第一项也是偶数，故上式右端第二项（即奇顶点度数之和）必为偶数。由此推知，奇顶点的个数应为偶数。证毕。

称度为1的点为**悬挂点**。与悬挂点关联的边称**悬挂边**。

考虑图$G=(V,\ E)$。图$G'=(V',\ E')$称为G的**子图**，如果V'和E'分别为V和E的子集，且使边（v_i，v_j）在E'中仅当v_i和v_j在V'中。G'是G的子图记为$G'\subseteq G$。又若或者E'是E的真子集，或者V'是V的真子集，则称G'是G的**真子图**。若图G的所有顶点都在图G的子图G'中出现，则G'称为是G的**生成子图**。

若子图$G'=(V',\ E')$没有孤立顶点，则V'中每个顶点都是E'中某条边的端点。这时，E'唯一地确定了V'，因而也确定了子图G'。我们称G'是G的**边导出子图**，记为$G[E']$。

若V'是V的子集，E'是E的子集，使得边（v_i，v_j）在E'中当且仅当v_i和v_j在V'中，则称$G'=(V',\ E')$是G的**点导出子图**。换句话说，如果v_i和v_j在V'中，那么，E中每条以v_i和v_j为端点的边应该在E'中。因为在这种情况下V'完全决定了E'，从而也决定了子图G'，故可记为$G[V']$。

图1-2示出了不同类型的子图，其中图1-2（a）表示图G，图1-2（b）是图G的一个生成子图，图1-2（c）是由顶点$\{v_1, v_3, v_4\}$导出的子图，图1-2（d）是由边$\{e_2,\ e_8\}$导出的子图。

图G的子图G'称为G关于性质P的**极大子图**，如果G'具有性质P，而且对于具有性质P的任何别的子图来说，G'不是它的真子图。

图G的子图G'称为G关于性质P的**极小子图**，如果G'具有性质P，而且G没有具性质P的子图是G'的真子图。

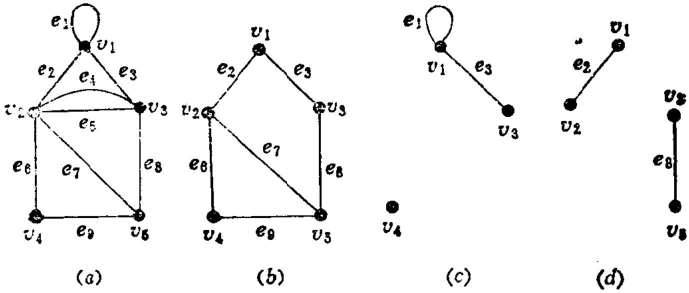

图　1-2

二、图的运算

设$G_1=(V_1, E_1)$和$G_2=(V_2, E_2)$是图G的没有孤立点的两个子图，在G_1和G_2之间可以定义如下几种运算：

（1）G_1和G_2的**并**，是由边集$E_1 \cup E_2$导出的子图，记为$G_1 \cup G_2$。

（2）G_1和G_2的**交**，是由边集$E_1 \cap E_2$导出的子图，记为$G_1 \cap G_2$。

（3）两图的**差**G_1-G_2，表示在G_1中去掉G_2里也有的边所组成的子图。注意，从G_1中去掉一边e时，若出现孤立点，则把孤立点也去掉；否则其端点将仍保留在$G_1-\{e\}$中。

（4）G_1和G_2的**环和**，表示由边集$E_1 \oplus E_2$导出的子图，记为$G_1 \oplus G_2$。这里$E_1 \oplus E_2=(E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$。因此，$G_1 \oplus G_2$表示由$G_1 \cup G_2$中去掉它们共有的边后所得的子图。环和满足交换律和结合律，即有

$$G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$$

$$G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3) = (G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$$

显然，对任何图G都有$G \oplus G$等于空图。若G_1与G_2边不相交，则有$G_1 \oplus G_2 = G_1 \cup G_2$。

（5）子图G_1的**补图**$\overline{G}_1=G-G_1$，表示G中去掉G_1中的边所得的G的子图。

此外，下面的运算也很常用：

边的舍弃：若$E' \subseteq E$，从G中删去E'中所有边而得到的生成子图G'，记为$G' = G - E' = (V, E - E')$。

点的舍弃：若$V' \subseteq V$，从G中删去V'及与V'中至少一点关联的所有边而得到的图，记为$G - V'$。要注意，当我们舍弃一些顶点时，也要舍弃与它们关联的边。

类似地，$G + e$表示在G中增加新边$e = (u, v)(u \in V, v \in V)$。

图 1-3 给出了各种运算的例子。

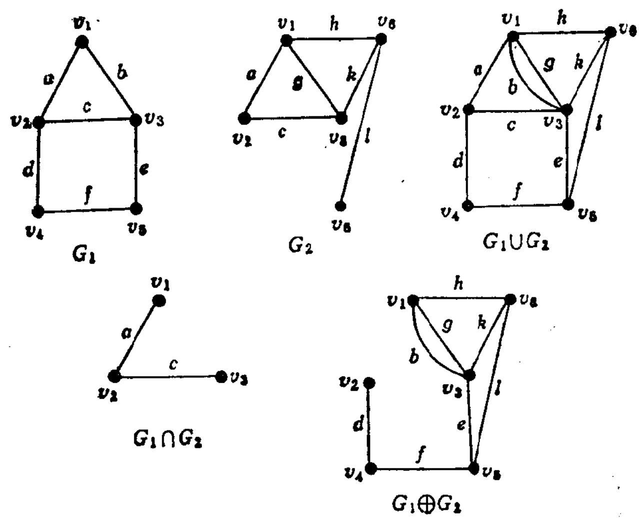

图 1-3

三、完全图与二分图

完全图G是这样的简单图，它的每一对不同的顶点都有一条边相连。n阶完全图记作K_n。显然，K_n有$(n-1)n/2$条边。图1-4(a)所示的图是K_5。

图$G = (V, E)$称为**二分图**，如果它的顶点集可以分划成互不相交的两个子集V_1和V_2，使E的每边有一个顶点在V_1而另一个顶点在V_2。(V_1, V_2)称为图G的二分划。

若在具有二分划(V_1, V_2)的简单二分图G中，对于V_1中

的每一顶点v_i和V_2中的每一顶点v_j，都存在一条边（v_i，v_j），则G称为**完全二分图**，若V_1中有m个顶点和V_2中有n个顶点，则记为$K_{m,n}$。完全二分图$K_{3,3}$绘于图1-4(b)中。

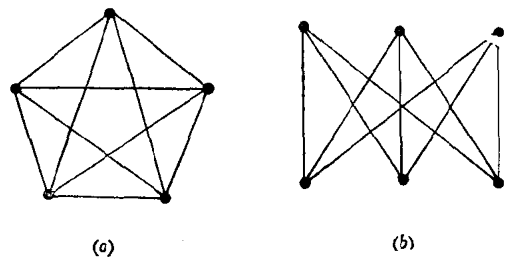

图 1-4

要想把K_5和$K_{3,3}$画在平面上，使任何两边不再有非顶点的交点是不可能的。这个问题以后还要专门讲。

四、图的同构

我们考虑怎样的两个图除了点的名称不同外可以代表相同的组合结构。在中学几何中，所谓两图形全等，是指其中一个图形放在另一个图形之上时两图形完全重合。现在要放弃这种全等的概念而从更一般观点来考虑。我们想象图形是由弹性极好的橡皮做的，所谓两个图形是"拓扑等价"的，当且仅当可以把一个图形作弹性运动使与另一个图形重合。这就导致下面同构的定义。

设有两个图$G_1=(V_1, E_1)$和$G_2=(V_2, E_2)$。如果存在双射

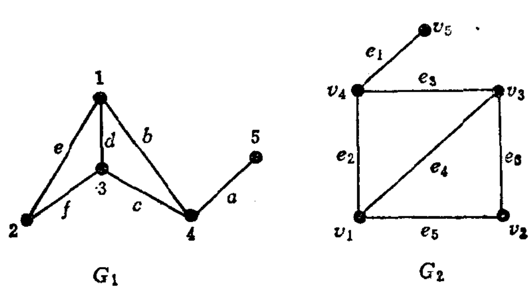

图 1-5

$f: V_1 \to V_2$，使得对任何 $u, v \in V_1$，$(u, v) \in E_1$ 当且仅当 $(f(u), f(v)) \in E_2$，而且 (u, v) 的重数与 $(f(u), f(v))$ 的重数相同，那么称 G_1 和 G_2 **同构**，记为 $G_1 \cong G_2$。换言之，所谓同构就是在 G_1 和 G_2 的顶点集之间存在一个保持邻接性的一一对应（而且保持边的重数不变）。

图1-5中的 G_1 与 G_2 是同构的：顶点的对应关系为 $1 \leftrightarrow v_1$，$2 \leftrightarrow v_2$，$3 \leftrightarrow v_3$，$4 \leftrightarrow v_4$，$5 \leftrightarrow v_5$；边的对应关系为 $a \leftrightarrow e_1$，$b \leftrightarrow e_2$，$c \leftrightarrow e_3$，$d \leftrightarrow e_4$，$e \leftrightarrow e_5$，$f \leftrightarrow e_6$。

值得注意的是，由于 G_1 与 G_2 的顶点集与边集的标定法不同，所以不能认为它们是相同的图。

§1.2 通路与回路

一、通路与回路

图 G 中一个顶点和边相继交错出现的有限序列 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$，若其中边 e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i（$1 \leqslant i \leqslant k$），则称它为从 v_0 到 v_k 的一条**途径**，记为 v_0-v_k 途径。也可以把途径作为有限的顶点序列 $v_0, v_1, \cdots, v_k$，使得 (v_{i-1}, v_i)，$1 \leqslant i \leqslant k$，是图 G 的边。首尾两个顶点 v_0，v_k 分别称为 W 的**起点**和**终点**，其余顶点称为**内顶点**，k 称为 W 的长。W 的一个相连项构成的子序列 $v_ie_{i+1}v_{i+1}\cdots e_jv_j$ 称为 W 的 (v_i, v_j) **节**。注意，在途径中边和顶点可以重复出现。

当 W 的起点与终点重合时，称为**闭途径**，否则称为**开途径**。在图 1-6 中，序列 $v_1e_1v_2e_2v_3e_8v_6e_9v_5e_7v_3e_{11}v_6$ 是一条开途径，而序列 $v_1e_1v_2e_3v_5e_7v_3e_2v_2e_1v_1$ 是一条闭途径。

若 W 中的边 $e_1, e_2, \cdots e_k$ 互不相同，则称为**链**。起点和终点相同的链称为**闭链**，否则称为**开链**。在图1-6中 $v_1e_1v_2e_2v_3e_8v_6e_{11}v_3$ 是开链，而 $v_1e_1v_2e_2v_3e_7v_5e_3v_2e_4v_4e_5v_1$ 是闭链。

所有顶点都不相同的开链称为**通路**。

内顶点不重复的闭链称为**回路**。

在图 1-6 中，序列 $v_1e_1v_2e_2v_3$ 是通路，而 $v_1e_1v_2e_3v_5e_6v_4e_5v_1$ 是

回路。通路中所含边数称为**通路的长**。回路中所含边数称为**回路的长**。

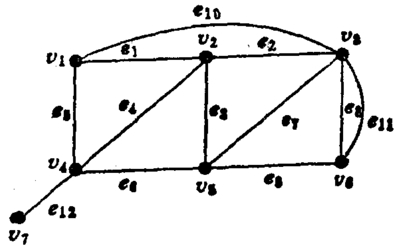

图 1-6

通路和回路的下列性质是明显的：

1. 在通路中，除起点和终点的度为 1 以外，其余各顶点的度都等于 2；

2. 在回路中，每个顶点的度等于 2，因此每点的度数都是偶数。但是每点度数等于偶数的图不一定是回路；

3. 在通路中，顶点的个数比边数大 1；而在回路中，回路的边数等于顶点的个数。

二、图的连通性和分支

连通性是图论中的一个重要概念。图G的两个顶点 v_i和 v_j称**为连通的**，如果在G中存在 v_i-v_j 通路。一个顶点本身也是连通的。

如果图G中每对顶点之间都存在一条通路，则G称为**连通的**，否则是**不连通的**。例如，图 1-6 是连通的。

不难证明，若在G中存在一条 $u-v$ 途径，则G中也存在一条 $u-v$ 通路，因此，在连通图的定义中可用“途径”来代替“通路”。

考虑一个不连通的图（也称分离图）$G=(V, E)$。显然，G的顶点集V能分划成子集V_1, V_2, …, V_k, 使点导出子图$G[V_i]$（$i=1, 2, \cdots, k$）是连通的且子集V_i中没有顶点与V_j($j\neq i$)中的任何顶点连通。子图$G[V_i]$（$i=1, 2, \cdots, k$）

称为G的**分支**。可以看出，图G的一个分支是G的一个极大连通子图，即，G的一个分支不是G的任何别的连通子图的真子图。图 1-7 表示一个具有两个分支的不连通图。

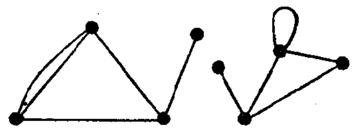

图 1-7

一个孤立的顶点应该认为是一个分支，因为由定义，一个顶点本身是连通的。此外，若图G是连通的，则它仅有一个分支，也就是图本身。

图G的一条边称为G的**回路边**，如在G中存在包含这条边的回路，则容易证明下面的定理：

定理1.2.1 若图$G=(V, E)$是连通的，那么从G中移去一条回路边后所得的图$G'=G-\{e\}$也是连通的。

三、欧拉图

现在考虑“一笔画问题”，即，一个图可否用笔不离开纸将其全部画出，每条边须画一次且只画一次。显然这种图必须是连通的，所以下面只考虑连通图。

图G中的一个**欧拉链**是包含G的所有边的闭链。一个**开欧拉链**是包含G的所有边的开链。具有欧拉链的图称为**欧拉图**。

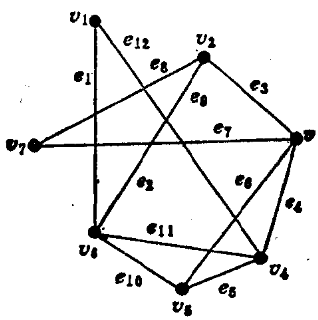

图 1-8

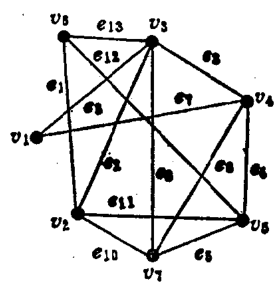

图 1-9

在图 1-8 中，边的序列e_1，e_2，e_3，e_4，e_5，e_6，e_7，e_8，e_9，e_{10}，e_{11}和e_{12}构成G_1中的**欧拉链**，故G_1是欧拉图。