基础数学概要（上）

方德植　主编

李轮焕　陈鹄汀
杨汉钊　刘恭远　编

福建科学技术出版社

1986·福州

责任编辑：林思明

基础数学概要（上）

方德植　主编

李轮焕　陈鹄汀　杨汉钊　刘泰远编

福建科学技术出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 10.125印张 223千字

1986年8月第1版

1986年8月第1次印刷

印数：1—2,400

书号：7211·34　　定价：1.95元

序　言

数学是基础科学，它是其他自然科学与工程技术的基础。随着社会主义建设的需要，数学的应用日益广泛，成为工农业生产、科学研究和工程技术中不可缺少的工具。

抓好中学数学教育是提高数学水平的关键。近几年来，中等学校在进行教育改革过程中，将把若干高等数学的课程（如微积分、概率论、逻辑代数等）的基本知识下放到中学里学习。

鉴于我国中学数学教师中大专程度的人数不多，高等院校数学系毕业的就更少了，目前刻不容缓的任务是要培养一批能胜任高等数学教学工作的中学教师。我们在1981年就开始进行编写有关这方面的教学参考教材：《基础数学概要》，并已于1982年在《厦门数学通讯》上以增刊的形式登载了本书的大部分内容，受到了广大读者的欢迎。最近应读者的要求，对原书进行了较大的修改和必要的补充，使内容更加充实。

全书分上、下两册，共十二章。上册包括六章：集合的初步知识、映射、极限理论与连续函数、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分。下册也有六章：定积分、线性方程组（包括矩阵与向量）、立体解析几何简介、初等方程论、概率统计初步、逻辑代数入门。

本书的特点是：内容精选，由浅入深，重点突出，论证严谨，并联系理论给出典型的例子，对有关理论的背景及其发展

概况也作了扼要的综述。书中所选习题在书末给出了部分答案。这些例题与习题有一定的启发性，以助读者提高分析问题和解决问题的能力。

参加编写本书的有：方德植（主编），李轮焕，陈鹄汀、杨汉钊、刘恭远等同志。

由于我们水平有限，疵谬之处在所难免，望读者不吝批评指正。

编者

于厦门大学

目　录

（上册）

第一章　集合的初步知识

集合论是德国数学家康托（Cantor，1845—1918）在十九世纪七十年代开创的，后来，集合论的思想渗透到数学的各个分支，在现代数学中，越来越广泛而深入地用到集合的概念，它已成为数学的逻辑基础。然而，究竟什么是集合？当初康托所指的集合无非就是集体的意思，他是把集合当做一个日常用语而不是一个数学用语来使用的。但是，人们不久就发现，他的含糊的定义引起了难以克服的混乱，于是大家试图用公理系统来代替集合的定义。这个工作可以说是自1908年策莫洛（Zermelo，1871—1953）提出第一个公理系统时开始的。公理系统显然比传统的定义精密得多，但是集合论的公理系统至今还不完备。因此目前集合论还不能认为是圆满的。本章介绍的是集合的初步知识，而不介绍公理系统。

§1·1　集合与元素

一　集合的定义

定义1　不管按照什么特征或者遵循什么规律组合起来的事物的“总体”*都叫做**集合**或**集**。组成集合的每个事物叫做该集合的**元素**或**成员**。元素与集合的关系是个别与整体的关系，是矛盾的两个方面。例如，一个圆周上点的全体构成一个集合，它的元素是点。以实数为系数的多项式的全体

* “总体”、“全体”或“整体”都是同一个意思．

构成一个集合，它的元素是多项式。

除特别声明外，本书采用大写拉丁字母A，B，C等表示集合，用小写字母a，b，c等表示集合的元素。

定义2 如果某种事物只有一个，记它为a，那么这种事物的“总体”是一个集，叫做**单元集**，记为$\{a\}$。这样，a是集$\{a\}$的唯一元素。

例如方程$2x-8=0$根的总体是一个单元集，我们把它记为$\{4\}$。它是由单独的一个元素（即数4）组成的。

定义3 如果某种事物不存在，那么说这种事物的总体是**空集**。我们规定任何空集都是同一个集，记作ϕ。

由定义3可知，任何事物都不是ϕ的元素。因此，空集也可以说成不包含任何事物的集。比如，方程$x^2+1=0$的所有实根组成的集就是一个空集；又如，两边之和小于第三边的所有三角形组成的集也是一个空集。

元素对于集合的隶属关系是“属于”和“不属于”，分别记作“$\in$”和“$\overline{\in}$”（或$\notin$）。如果a是集A里的一个元素，就记作

$$a\in A,$$

读作“a属于A”或“a在A里（中）”。否则，如果a不是集A的元素，记作

$$a\overline{\in}A,$$

读作“a不属于A”或“a不在A里（中）”。

集合定义的几点注释：

1°因为每个集也是一个事物，所以空集ϕ是一个事物，故知$\{\phi\}$不是空集，因为ϕ是$\{\phi\}$中的唯一元素，即

$$\phi\in\{\phi\}$$

由此也可以说明ϕ和$\{\phi\}$是不同的概念，前者没有元

素，而后者有一个元素．为了避开逻辑上的矛盾，我们还规定：对任何事物a，a和$\{a\}$都是不同的概念。根据集的公理，一个集不能属于本身，即如果A是一个集，那么

$$A \overline{\in} A$$

2°给定一个集，意味着这个集的元素是确定的，同时对任何一个元素a，关系式

$$a \in A \text{与} a \overline{\in} A$$

有且仅有一个成立，也就是说，上面两个关系式不能同时成立，也不能同时都不成立。

3°假定A和B是两个集合，如果任一个属于A的元素也一定属于B，而任一个属于B的元素也一定属于A，那么A和B是同一个集合，或称**两集A和B相等**，记作

$$A = B$$

二　集合的表示法与罗素怪异

1 集合的表示

如果一些事物能够全部列举出来，用符号记为a, b, c，……，根据定义1，它们的全体是一个集A，表示为

$$A = \{a, b, c, \cdots\cdots\}$$

这种能够把一个集合的元素全部一一列举在大括号内并用来表示集合的方法叫做**列举法**。例如

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$$

表示S_1是以1，2，3，4等四个数为元素所组成的集合；

$$S_2 = \{0, \phi, \{1, 3\}\}$$

表示S_2是以数0，空集ϕ和集$\{1, 3\}$等三个事物为元素所组成的集合。

又如，因为空集ϕ也是一个事物，所以下列的事物都是集

$\{\phi\}$，$\{\phi, \{\phi\}\}$，$\{\{\phi\}, \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}\}$，等等。

应该指出，由注释3°关于两个集相等的规定可知，集里元素的次序及重复都是无关实质的。因此，在列举法表示集的记号中，大括号内元素的次序和重复也都无关实质，比如

$$\{a,b\}=\{b,a\}=\{b,a,a,a,b\}$$

如果集A的元素是有限多个，就叫A为**有限集**，**空集也算作有限集**。不是有限集的集叫做**无限集***。比如，整数全体的集就是无限集。

显然，有限集可以用列举法表示，而某些无限集则无法用列举法表示。

对于那些无法用列举法表示的集，通常采用描述法。**描述法**是以描述一个集的全部元素的共同特征而不列举全部元素的。它可用符号表示为

$$A=\{x\,|\,p(x)\}\text{或}A=\{x: p(x)\}$$

式中$p(x)$是一个命题，用以描述元素的特征，A是使$p(x)$成立的那些事物x的全体所形成的集合。因此，对任何一个事物x_0，当且仅当**$p(x_0)$成立也即$p(x_0)$为“真的”时，才有

$$x_0\in A$$

当然，在这种表示法中，命题$p(x)$必须是明确的，即对任何事物x，$p(x)$或成立或不成立二者必居其一而又只能居其一，不可兼得。例如

$$N=\{x\,|\,x\text{是自然数}\},$$

这时命题$p(x)$为“x是自然数”，N是“使$p(x)$为真的”的那些x的全体，即自然数全体的集（简称**自然数集**）；

* 严格的定义在第二章§2·4.

** “当且仅当”即“充分必要”的同义语.

$$B=\{x \mid 0<x<1\}$$

这时命题$p(x)$为“大于0小于1的实数”，B是“使$p(x)$为真的”那些实数x的全体这便是通常所指的开区间$(0,1)$；

$$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

这时命题$p(x)$为“单位圆周上及其内部的点”，因此集C是“平面上使$p(x)$为真的”那些点(x,y)的全体；

$$M=\{x \mid x^2+1=0,\ x\in R\}$$

R为实数全体的集（简称**实数集**）。这时命题$p(x)$为“使$x^2+1=0$成立的实数”，因为“使$p(x)$为真的”的实数x不存在，故M即空集ϕ。

对于某些有限集，有时既可用列举法表示，也可以用描述法表示。比如，如果命题$p(x)$是“大于0小于4的整数”，那么由它规定的集可表示为

$$A=\{x \mid 0<x<4,\ x\text{为整数}\}$$

若采用列举法，它又可表示为

$$A=\{1,2,3\}$$

对于某些无限集，虽然其元素无法全部一一列举，但只要列举几个，其余就可以不言自喻的话，则也可用列举法表示，并以“……”来表示被省略的元素。比如，自然数集可表示为

$$N=\{1,2,\cdots\cdots\}$$

2 罗素（Russel）怪异*

用描述法来表示一个集，实际上就是把集说成“具有某种属性的事物的全体”。但是，这样来规定一个集并不是没有毛病的，下面所谓“罗素怪异”说明了这一点。

设命题$p(x)$表示“凡是事物本身不属于本身”，我们把

* 看这部分如有困难可略去。

使$p(x)$为“真”的所有事物的全体记为

$$S=\{x \mid x \bar{\in} x\}$$

首先指出，使命题$x \bar{\in} x$为“真的”并不是不可能的，比如，设Q是一个集，则有$Q \bar{\in} Q$。

现在我们来证明上述的S不是一个集。因为如果S是一个集，则它也是一个事物，因此关系式

$$S \in S\text{和}S \bar{\in} S$$

不能同时都成立。以下分两种情况讨论：

(1) 如果$S \in S$，那么S是集S的一个元素，故按S的规定$S \bar{\in} S$，但这与$S \in S$矛盾；

(2) 如果$S \bar{\in} S$，这说明S使命题$p(x)$为“真的”，那么S应该是集S的一个元素，即有$S \in S$，但这又与$S \bar{\in} S$相矛盾；

结合(1)，(2)得知

$$S \in S\text{和}S \bar{\in} S$$

都不成立。这就与S是一个集的假设相矛盾.既然S不是集，那么别的

$$\{x \mid p(x)\}$$

可算作集吗？所以，把“具有某种属性的事物的全体”当做集的定义并不是完全正确的。近代集论公理系统的主要精神，实际上就是规定怎样的命题$p(x)$可以当作集的定义条件。

根据公理系统，集限于下列七种：

(1) 有限个事物的全体（包括空集）（并公理、空集公理、无序对公理）。

(2) $\{x \mid p(x)\text{且}x \in B\}$，其中$B$是一个已知集，即一个已知集里使命题$p(x)$成立的元素$x$的全体（划分公理）。

(3) 一个已知集的子集的全体（方幂集公理）.

(4) 跟一个已知集的全部元素一一对应*的事物的全体（替换公理）.

(5) 如果一些集的全体构成一个集，那么这些集的并集**也是一个集（并集公理）.

(6) 正整数全体是集（无限公理）.

(7) 假定一些不空的集（不是空集）的全体形成一个集，这些集里任何两个集没有共同元素，那么存在一个集跟这些集里的每个集，有且仅有一个共同元素（选择公理）.

公理系统虽不完备，但目前常规数学的一切概念都可以用上述范围内的集来定义，至少迄今没有发现例外。例如，0和正整数的定义如下：

$$
\begin{aligned}
&0=\phi,\\
&1=\{\phi\},\\
&2=\{\phi,\ \{\phi\}\},\\
&3=\{\phi,\ \{\phi\},\ \{\phi,\ \{\phi\}\}\},\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

由正整数就可以定义有理数，实数，复数；由此又可以定义平面，欧氏空间等等。不但这样，代数运算，函数等都可以当做集来定义，所以集论成了数学的基础。

§1·2 子集、幂集

一 子集

定义 4 若集合A的元素都是集合B的元素，则称A是B

---

* “一一对应”的定义见第二章.

** “并集”的定义见§1·3第二段.

的**子集**。并记为

$$A \subseteq B \quad 或 B \supseteq A$$

读作“A包含于B”或“B包含A”。若A不是B的子集，则用记号表示为

$$A \not\subseteq B \quad 或 \quad B \not\supseteq A$$

读作“B不包含A”。例如

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\{1,\ 2,\ \{0,\ 1\}\},\ C=\{1,\ 2,\ 3\}$$

因为A的元素都是B和C的元素，所以有$A\subseteq B$，$A\subseteq C$。但B有元素$\{0,\ 1\}$不属于C，而C有元素3不属于B，所以B与C都不互相包含，即$B\not\subseteq C$，$C\not\subseteq B$。

此外，依定义可知，任何一个集A都是它本身的子集，即

$$A \subseteq A$$

这是因为集A的元素都属于A本身。

对于空集ϕ，我们规定它是任何一个集A的子集，即

$$\phi \subseteq A$$

特别当$A=\phi$时，有

$$\phi \subseteq \phi$$

由定义4知道，所谓$A\subseteq B$也可以说成凡元素不属于B的也不属于A。

定义 5 设集A是B的子集而B中确有不属于A的元素，则称A是B的**真子集**，记作

$$A \subset B \quad 或 B \supset A,$$

其中“$\subset$”读作“**真包含**”。

定义5的意思是集A的所有元素都属于B，但B中至少有一个元素不属于A。因此，**任何集A都不是它本身的真子集**。

依定义4、5，我们易得：

推论 1 设A和B是两个集合，当且仅当$A\subseteq B$和$B\subseteq A$（即两集互相包含）时，才有$A=B$。

推论 2 设A，B，C是任何三个集合，若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

例 1 设集

$$A=\{\{a\},\ b\},$$

则有

(1) $\{a\}\in A$； (2) $\{a\}\not\subseteq A$； (3) $\{\{a\}\}\subseteq A$。

这是因为在(1)中，$\{a\}$虽然是一个集，但它却是以元素的身分属于A；(2)中的$\{a\}$是一个集，a是它的元素，但a不属于A，故A不包含$\{a\}$；(3)中的$\{a\}$是$\{\{a\}\}$中的唯一元素，也是A的一个元素，故$\{\{a\}\}\subseteq A$。

例 2 设N是自然数集，Z是整数全体的集，Q是有理数全体的集，R是实数集，则有如下的包含关系：

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

例 3 因为“等边三角形是特殊的等腰三角形”，“梯形是特殊的四边形”，“正方形是特殊的矩形，所以“等边三角形全体是等腰三角形全体的真子集”；“梯形全体是四边形全体的真子集”，“正方形全体是矩形全体的真子集”。

例 4* 以$C^1[a,\ b]$表示在区间$[a,\ b]$上具有一阶连续导数的所有函数组成的集合，以$C[a,\ b]$表示在区间$[a,\ b]$上所有连续函数组成的函数集合。根据微分学知识，在$[a,b]$上可导的函数一定是$[a,b]$上的连续函数。因此，$C^1[a,\ b]$中的每一个元素都必属于$C[a,\ b]$，故知

---

*本例可放在学习了微积分后再看.

$$C^1[a, b] \subseteq C[a, b]$$

又因为在$[a, b]$上连续的函数不一定可导，因此又有

$$C^1[a, b] \subset C[a, b]$$

即$C^1[a, b]$是$C[a, b]$的真子集。

二　幂集

上面我们谈了子集的概念，现在要来研究任意一个给定的集包含多少个子集的问题。

设A是一个集，则A和空集ϕ都是A的子集。而且，对于A的每个元素a，可得一个集$\{a\}$，它是A的子集。若另有一个元素$b \in A$，则$\{b\}$也是A的子集。由此，又可得另一个集$\{a, b\}$，它也是A的子集。按照这个方法做下去，便可得出A的各个子集。

定义6　设A是一个集合，A的所有子集的全体所组成的集合叫做A的**幂集**，记作

$$\rho(A) \text{或} 2^A$$

例如，若$A=\phi$，因A的子集只有ϕ，故以ϕ为元素所组成的集合，即A的幂集

$$\rho(A)=\rho(\phi)=\{\phi\}.$$

若$A=\{a\}$，则A的子集有ϕ和A本身，故

$$\rho(A)=\{\phi, A\}=\{\phi, \{a\}\}.$$

若$A=\{1, 2, 3\}$，则A的子集有ϕ，A，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$。故

$$\rho(A)=\{\phi, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}.$$

易知，若A是有限集，则$\rho(A)$也是有限集。

定义7　设A是一个有限集，则A里不同元素的个数叫做A的**基数**，记为$n(A)$。

下面我们给出一个有限集的幂集的基数定理，对于无限

集的基数问题将在第二章§2.4讨论。

定理1 设A是一个有限集，它的基数为n，则A的幂集$\rho(A)$的基数$n(\rho(A))=2^n$。

证明 因A的元素有n个，故由A的每个元素组成A的子集共有C_n^1个；由A的任意两个元素组成的A的子集共有C_n^2个；……由A的任意$n-1$个元素组成的A的子集共有C_n^{n-1}个，再考虑到空集ϕ和A本身都是A的子集，于是A的所有子集的个数共有

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$$

此即A的幂集$\rho(A)$的元素的个数，即$n(\rho(A))=2^n$。

例 5 设集

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$

因A的基数$n(A)=4$，故$\rho(A)$的基数$n(\rho(A))=2^4=16$。$\rho(A)$可表示为

$$\begin{aligned}\rho(A)=\{&\phi,\ A,\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\\&\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\\&\{a,c,d\},\ \{b,c,d\}\}\end{aligned}$$

§1·3 集合的初等运算

本节将讨论集合的某种基本性质，进而对一个或多个集合进行运算，从而产生其它新的集合。

一 交集

同时属于集合A和B的一切元素称为A与B的**交集**或**通集**，简称为**交**或**通**，记作

$$A\cap B \quad 或 \quad AB$$

它可表示为