SHU XUE FEN XI RU MEN

数学分析入门

第一卷 第一分册

〔日〕杉浦光夫 著

文小西 于陕 译

高等教育出版社

数学分析入门

第一卷 第一分册

〔日〕杉浦光夫 著

文小西 于 琛 译

高等教育出版社

内容提要

本书是根据日本东京大学出版社1980年出版的基础数学 2 《解析入门Ⅰ》(作者杉浦光夫)译出的.

原书是根据东京大学数学分析课教学大纲编写的. 主要介绍传统的微积分, 但重视多元函数的情形. 书中采用集合论与映射的观点, 处理方式较为统一, 与传统教材有较大不同. 本书叙述严格, 条理清楚, 并附有较多的例习题.

译本第一卷分两个分册出版. 第一分册的内容为实数与连续, 微分法, 初等函数; 第二分册的内容为积分法、级数.

本书可供数学系学生学习微积分时参考, 也可供教师参考.

数学分析入门

第一卷 第一分册

〔日〕 杉浦光夫 著

文小西 于 琛 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

开本850×1168 1/32 印张9.75 字数236 000

1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷

印数0 001— 1 710

ISBN7-04-001993-0/O·727

定价2.35元

译 者 的 话

本书是根据日本东京大学出版社1980年出版的基础数学2《解析入门I》（作者杉浦光夫）译出的.

原书是东京大学理学院低年级学生的教材. 内容基本上是传统微积分，但系统上与国内外一些传统的微积分教材有较大不同. 本书特点是观点较高，处理方式统一. 它用集合和映射的观点讲解，从具体的对象出发，比较自然地介绍了紧、连通等拓朴中基本概念. 改变了传统教材中一元、多元分别介绍的做法，R与C一起介绍，多数概念是在$\mathbf{R}^n$上给出的. 学习本书只需高中微积分知识，虽然书中所用观点较高，但作者还是注意学生的可接受性. 对于有能力看参考书的大学一、二年级学生，本书将提供一个能扩大知识面与深入领会所学知识的途径. 对于从事数学分析课教学和研究数学分析课程改革的教师，本书也有一定参考价值.

原书用的有些数学名词与说法，与常用的不尽一致，我们仍按原书译出，请读者学习时注意.

原书共五章，分两个分册翻译出版. 第一章与第四章的§1—§11由于琛同志翻译，第二、三两章由文小西同志翻译，其余部分由张小萍同志翻译. 原书的两个附录我们仍放在全书后面. 由于我们水平所限，缺点错误在所难免，衷心希望读者指正.

译　者

1985.12.25于北京

序 言

本书是介绍数学分析的基础——微积分方法的读物. 它的主要对象是大学数学系的低年级学生.

分析学是研究一般变量的学科. 为了描述质点的位置随时间的变化规律，电磁场随时间、空间变化的规律，产生了分析学这样的工具. 量的变化，即A依赖于B的变化，在数学中就是函数. 虽然象正比例那样的一次函数从古代起就已应用了，但描述和分析一般函数变化的工具却是在微积分方法创立后才给出的. 三百年来，分析学在许多方面得到了发展，在所有进行定量研究的学科中被广泛地应用.

本书的第一个目标是搞清微分与积分这两个基本运算的意义，特别重视多元函数的情形. 其次，为了运用这些基本概念，对初等函数、Γ函数作了详细的说明. 这样做，可从两方面来丰富分析学的内容. 一方面，分析阐明这些函数性质的过程为运用微积分的方法提供了典型的例子，另一方面，这样得出的函数在许多问题上有用. 本书还介绍了无穷大、无穷小的阶数，收敛速度和一致收敛性，绝对收敛与条件收敛的区别等内容，注意了函数变化的多样性以及关于它们的习惯的数学处理方法.

作者这样的意图实现得怎么样，有待读者作出判断.

下面对本书各章的内容和题材的选择加以说明.

第 I 章以极限为主题. 我们考察的对象是定义于n维数空间$\mathbf{R}^n$中的子集合，取值于$\mathbf{R}^m$的函数. 为此，把实数的概念作为出发点. 从分析学的观点看，这是最自然的. 另外，没有明确给出

以最一般的观点讨论极限的拓扑空间. 本书选择的路子是：一方面研究具体的对象，一方面熟习有关拓扑的种种基本概念. 近年来还提倡一种新的微积分方法，即所谓非标准分析，它是以与通常实数不同的、极为扩大的“超实数”为基础的. 但我们认为，本书作为一本数学分析的入门书，以通常的实数概念为基础的方法是适当的.

第Ⅰ章研究微分法. 大家知道，所谓求一个变量的实值函数 $f(x)$ 在点 x 处的导数，从几何上说，就是在 $f(x)$ 的图象的点 $(x, f(x))$ 处引切线；从分析上说，就是求 f 在点 x 的（瞬时）变化率 $f'(x)$. 本书就是以这两个观点为基础的. 首先从讨论变化率开始，给出一元（向量值）函数的微分法，然后用它引进多元函数的方向微分、偏微分. 最后用几何学的方法把取值于 R^m 的 n 元函数 f 的微分作为一次近似来研究. 这个所谓一次近似与几何学上确定切线、切平面（一般为超切平面）相对应. 这时导数 $f'(x)$ 为 m 行 n 列的矩阵（线性变换），其中 (i, j) 元素为 f 的第 i 分量 f_i 在第 j 个坐标 x_j 方向的变化率 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. 把形式上可一次定义的事情，如此分阶段来进行研究，目的在于具体地把握微分的意义。关于多元函数，不仅考虑偏导数，而且 $f'(x)$ 考虑为矩阵，这是从弗雷谢开始的。在微分法中最重要的复合函数的微分法（连锁律）里，显示出这种考虑是可行的和自然的.

第Ⅱ章研究初等函数. 虽然三角函数、指数函数是我们所熟知的，但要把它们的分析性质系统简明地推导出来，还必须用到函数的适当的分析表达式. 本书把指数函数 e^x 和三角函数 $\cos x$，$\sin x$ 的幂级数表示作为出发点，因为这被认为是最简明易懂的. 还有，如欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 所示，指数函数和三角函数在复数的范围内可以统一起来. 因此，本书从最初就考虑了复数，并设有复

变量函数的微分法一节．以柯西定理为基础的、正式的复变函数论虽然在第二卷讨论，但是在幂级数的范围内我们推导了许多有趣的结果．初等函数是解析函数的最重要的例子，阐述这些典型的变化规则是重要的．

第Ⅳ章研究积分法．积分有黎曼积分和勒贝格积分两种定义，本书采用了黎曼积分．其理由之一是，根据作者几年来的经验，在大学一年级的微积分中教勒贝格积分不是不可能的，但要使学生充分理解，课时是不足的．更重要的理由是，我们发现现在高中教的积分法偏重于不定积分，而定积分作为积分和极限的概念却极为薄弱．于是本书重视积分原来的定义，即它是以分段求和法为基础的黎曼和的极限，并把确定积分的意义作为第一目标．为了强调这一点，与微分法的情况不同，从一开始就研究了n元函数的积分．定积分概念的讨论本质上是采用研究一元函数积分的方法．然后阐述不定积分的计算法，同时，选取了较多不用不定积分而直接计算定积分的例子．这一章中还详细讨论了Γ函数，因为许多定积分可用B函数、Γ函数表示．最后一节研究斯蒂尔吉斯积分，因为除了考虑它在讨论第二中值定理时发挥作用外，还考虑它对掌握积分概念是有益的．

关于级数，虽然第Ⅰ、Ⅱ章已接触过，但为了详细研究，专设了第Ⅴ章．这一章的主要内容是由积分判定正项级数的收敛性，阿贝尔定理，绝对收敛与条件收敛的区别，二重级数，无穷乘积等．如果掌握了收敛、发散的概念和判定方法，就算是达到本章的目的．

本书是根据东京大学基础学部理科第一学年的分析课教学大纲编写的．准确地说．本书不仅包含了这个教学大纲的全部内容，而且还作了某些补充．由于课时不足，在课堂上不能充分说明的部分，本书不惜篇幅加以解释，因此，页数增加了，希望

读者能了解我们的想法．隐函数，重积分的变量变换公式和广义积分，曲面面积，向量分析，复变函数论等预定在第二卷中研究．

微积分是由于阿基米德以来的许多学者的努力才发展成今天的状况．本书以这许多数学家的成果作为基础．具体说，本书作者从许多优秀著作中学习了很多东西．特别是从高木贞治先生的《解析概论》里，作者才开始得到关于微积分法的统一观念．作者参考的书目已列在卷末，相信这些书对读者也是有益的．我向这些书的作者致以深切的谢意．

本书写作中得到多方面的帮助．斎藤正彦，難波完尔两位阅读了附录1、2的原稿，并提出了意见．山田明雄先生详细地通读了原稿，提出许多有益的意见，使疏漏得到补正，许多地方得到改进．特别定理Ⅰ．2.2的证明是由山田先生给出的．此外，东京大学出版社的大江治一郎先生整理了杂乱的原稿，并为把草图绘成正确的图作了很大的努力．没有以上诸位的帮助，本书以现在形式出版是不可能的．这就是我衷心感谢各位的原因．

作　者

1979年12月

致读者

1. 本书中的定理与命题，在各节中统一编号. 例如定理3.4表示§3第4个定理(与命题统一编号). 当引用同章内的定理时，则写成定理3.4，引用他章的定理时，则在前面写上章号，比如定理Ⅰ.3.4.

2. 正文的定理与命题是按逻辑顺序安排的，不会用它后面的定理来证明. 但是，在例题中有几处是用它后面的正文来说明的. 因为如果限于正文中已严格说明的事实，一些有趣味的例子就不能在前面出现，所以我们采取这个办法. 但是所用到的初等函数的基本性质和简单的微积分计算，应该限于在高中已学过的知识. 不懂的地方可以跳过去.

3. 在每节后面附有习题，希望用来帮助对正文的理解. 在书末给出了计算题的答案与证明题的提示，但希望读者不要先去看它，因为如果不先经过自己头脑思考，将不会收到做习题的效果. 又因可能解法和证明有几种，所以希望每个读者自己下功夫. 在练习中还有一些与正文有关的新内容，象这样的习题都标有*号. 标有*号的习题可以略去.

4. 只有第Ⅰ章第1节的习题，不是在节末而是在正文中以问题的形式出现的. 这些题是从实数的基本性质中导出的并且是熟知的命题，因为在正文中一一讲述是腻烦的，故采取这种形式. 而在书末的习题答案中讲述了简略的证明.

5. 定理与命题的终结用■表示. 例题的终结用——表示.

目　录

第1章　实数与连续

§1　实　　数

本书所研究的量（函数）用实数以及它们的组合来表示，所以实数成为我们的出发点.

实数具有许多性质，本书中我们所用的都能从如下十七条性质（R1）——（R17）逻辑地推导出来. 在此意义下，这十七条性质成为实数最基本的性质. 我们把它们作为所有实数的集合**R**的性质. 从本质上讲，具有这十七条性质的数学对象只有**R**. 在此意义下，这些性质给出了实数的特征（参看§3习题5）. 但是这十七条性质的每一条，又是被实数以外的许多数学对象所满足的一般形式的命题. 这十七个命题，按其性质可分为三类：〔1〕四则运算，〔2〕序，〔3〕连续公理.

〔1〕四则运算

对**R**中的任意两个元素 a，b，我们定义称为它们的**和** $a+b$与**积**ab的实数，满足如下（R1）到（R10）的条件：

（R1）$a+b=b+a$.（和的交换律）

（R2）$(a+b)+c=a+(b+c)$.（和的结合律）

（R3）存在**R**的零元素 0，对所有的 $a\in\mathbf{R}$，满足 $a+0=a$.（0的存在）

（R4）对任意的 $a\in\mathbf{R}$，存在 $-a\in\mathbf{R}$，满足 $a+(-a)=0$.（$-a$的存在）

（R5）$ab=ba$.（积的交换律）

（R6）$(ab)c=a(bc)$.（积的结合律）

(R7) $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$。(分配律)

(R8) 存在R的单位元1，对所有$a\in R$，满足

$a1=a$。(1 的存在)

(R9) 对任意非零的 $a\in R$，存在 $a^{-1}\in R$，且

$\alpha a^{-1}=1$。(逆元素的存在)

(R10) $1\neq 0$。(0 以外的元素的存在)

$a+(-b)$记作$a-b$，称为a与b的**差**。又$b^{-1}a$记作$\frac{a}{b}$，a/b，$a\div b$等，称为a除以b的**商**。作和、差、积、商的运算分别称为加法、减法、乘法、除法。

一般地，在一个集合K上，如果定义了$a+b$，ab，且对于集合K，上面的(R1)—(R10)满足，则称K为**域**。

于是，从上面(R1)—(R10)可知“R是域”，称R为**实数域**。除R以外，还有很多集合也是域，如有理数的全体，复数的全体等等。

对一个集合K的任意两个元素a，b，如果定义了$a+b\in K$，且满足(R1)—(R4)，则称K为**加群**。R关于加法构成加群。又由(R5)，(R6)，(R8)，(R9)知，非零的实数全体关于乘法ab成加群。运算不写成和的形式的加群称为**交换群**。又对于一个集合K的任意两个元素a，b，如果定义了和$a+b$，积 ab，且满足(R1)—(R4)和(R6)，(R7)，称K为**环**。当(R5)也成立时，称K为**交换环**。全体整数的集合Z是交换环，但不是域。

问题 1 在R(或一般域K)上，证明下列事实成立。

(i) 满足(R3)的0是唯一的。

(ii) 对于每个a，满足(R4)的$-a$是唯一的。

(iii) $-(-a)=a$

(iv) $0a=0$。

(v) $(-1)a=-a$.　　　(vi) $(-1)(-1)=1$.

(vii) $a(-b)=-(ab)=(-a)b$.

(viii) $(-a)(-b)=ab$.

(ix) 若 $ab=0$，则 $a=0$，或 $b=0$.

(x) $(-a)^{-1}=-(a^{-1})$.

(xi) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

〔2〕序

对于任意的 a，$b\in R$，称为"a小于或等于b"的关系 $a\leqslant b$ 是指，对于任意的 a，b，$c\in R$，满足下面(R11)—(R16)。

(R11)　$a\leqslant a$.

(R12)　若 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则 $a=b$.

(R13)　若 $a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$.

(R14)　$a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$，至少有一个成立。

(R15)　若 $a\leqslant b$，则 $a+c\leqslant b+c$.

(R16)　若 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，则 $ab\geqslant 0$.

关系 $a\leqslant b$ 也可记作 $b\geqslant a$. 又"$a\leqslant b$ 且 $a\neq b$"的关系记作 $a<b$. 对于 $a>0$ 时称 a 为**正的**，$a<0$ 时称 a 为**负的**。

(1.0)　$a\leqslant b \Longleftrightarrow a<b$ 或 $a=b$

　　($\Longleftrightarrow$ 表示等价记号).

由 (1. 0)，(R14) 和 (R12)，下面事实成立：

(1.1)　对于任意的 a，$b\in R$，i) $a<b$，ii) $a=b$，iii) $a>b$ 之中有一个且只有一个成立。

由 (R15) 直接得出

$$(1.2)\quad a\geqslant 0 \Longleftrightarrow -a\leqslant 0.$$

由 (R16)，下列事实成立：

(1.3)　对于任意的 $a\in R$，$a^2=(-a)^2\geqslant 0$.

特别是，因$1^2=1$，由（R10）和（1.0），则有

（1.4）　　　　$1>0$。

于是 $2=1+1>0$，$3=2+1>0$等等。

通常，把满足条件（R1）—（R16）的集合称为**有序域**。一般地，把定义了关系$\leqslant$，且满足条件（R11，12，13）的集合称为**有序集**．当它还满足条件（R14）时，称为**全序集**．

例 1　设一个集合X的所有子集的集合为 P(X)，当 $A\subset B$（即若$x\in A$时有$x\in B$(包括$A=B$情形))时，定义$A\leqslant B$，则 P(X)为有序集．但它一般不是全序集，例如$X=R$时，若$A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则既没有$A\subset B$，也没有$A\supset B$。——

问题 2　试证，在实数域R（或一般的有序域）上下列事实成立：

(i)　$a\leqslant b\Longleftrightarrow 0\leqslant b-a$。

(ii)　$a\leqslant b\Longleftrightarrow -a\geqslant -b$。

(iii)　若$a\leqslant b$，$c\leqslant 0$，则 $ac\geqslant bc$。

(iv)　若 $a>0$，则$a^{-1}>0$。

(v)　若 $a\leqslant b$，$c\leqslant d$，则 $a+c\leqslant b+d$。

(vi)　若 $a\leqslant b$，$c<d$，则 $a+c<b+d$。

命题1.1　对于任意两个实数a，b($a<b$)，存在实数 c，满足$a<c<b$。

证明　例如令 $c=2^{-1}(a+b)$即可。

这个命题表明，对于任意实数，不论距它如何近，一定存在其它的实数．实数的这个性质称为“**R是稠密有序集**”．

这是任意有序域所具有的性质．这个性质通常表示为下列形式：

（1.5）如果$a\geqslant 0$ 满足对于任意 $\varepsilon>0$，$a<\varepsilon$，则 $a=0$。

事实上，若 $a>0$，由命题 1.1，存在ε，使 $a>\varepsilon>0$，这与假

设矛盾.

对于**R**的子集A，如果 i）$m\in A$，ii）对于任意的 $a\in A$，有 $a\leqslant m$，则称 m 为A的**最大元**. A的最大元m记作 $m=\mathrm{Max}\,A$. 同样可定义A的**最小元** $n=\mathrm{Min}A$. 对于任意集合A，不一定存在最大元与最小元.

例 2 $[0,1)=\{x\in\mathbf{R}\mid 0\leqslant x<1\}$ 的最小元为 0，而最大元不存在. ——

但是，由（R14），两个实数 a，b 所成的集合 $\{a,b\}$ 具有最大元与最小元. 因为

$$\mathrm{Max}\{a,\mathrm{Max}\{b,c\}\}=\mathrm{Max}\{a,b,c\},$$

所以由三个元素所成的集合也存在最大元与最小元. 同样，对于 **R** 的任意非空的有限子集合，也存在最大元与最小元.

对于任意 $a\in\mathbf{R}$，由（1.4）得 $a-1<a<a+1$，于是下列事实成立：

（1.6） **R**不存在最大元与最小元.

对于任意 $a\in\mathbf{R}$，记 $\mathrm{Max}\{a,-a\}$ 为 $|a|$，称为 a 的**绝对值**. 由定义，下列事实成立：

$$(1.7)\quad |a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\text{时},\\ -a, & a\leqslant 0\text{时}.\end{cases}$$

$$(1.8)\quad |-a|=|a|.$$

$$(1.9)\quad -|a|\leqslant a\leqslant |a|.$$

命题1.2 1）$|a|\geqslant 0$，等号只有 $a=0$ 时成立. 2）$|ab|=|a||b|$. 3）$|a+b|\leqslant|a|+|b|$. 4）$|a|-|b|\leqslant|a+b|$.

证明 1）由（1.7），$|a|\geqslant 0$. 再由定义得 $|0|=0$，反之，若 $|a|=0$，由（1.9）得 $a=0$.

2）若 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，则 $ab\geqslant 0$，所以 $|ab|=ab=|a||b|$.

若 $a \geqslant 0, b \leqslant 0$，则 $ab \leqslant 0$. 所以 $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$.

若$a \leqslant 0$，$b \leqslant 0$，则 $ab \geqslant 0$. 所以$|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

3）由（1.9）有$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$，$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$，所以

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

在左边不等式的两端乘-1，得

$$-(a+b) \leqslant |a| + |b|.$$

综上二式得

$$|a| + |b| \geqslant \mathrm{Max}\{a+b, -(a+b)\} = |a+b|.$$

4）因为$a = (a+b) + (-b)$，由 3）和（1.8）得.

$$|a| \leqslant |a+b| + |b|.$$

实数域R在几何可表示为一条直线. 取欧几里得空间内的一直线l及其上一点 O，设l上与O 距离为 $x \in R$的点为 X，这个对应 x X 就成为 R与l之间的一一对应. 这时作为距离要考虑符号. 直观地说，如果$x>0$所对应的点在O的右侧，那么$x<0$ 所对应的点就在O的左侧. 在R上的序关系$x<y$，在l 上就表示点X在点Y的左侧. 又$|x-y|$不依赖于X，Y的顺序，只表示其间的距离$\geqslant 0$（参看 § 4）.

上述（R1）—（R16）虽然是实数域 R的基本性质，但满足这些性质的集合，除 R以外还有许多. 有理数的全体Q（下节中定义）就是其中之一，其它还有各种有序域.

例 3 把字母t 的实系数有理式的全体记作R（t）. 它关于通常的四则运算构成一个域（即满足(R1)—(R10)）. R(t)的元素间可如下定义序.

对于多项式

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \ a_n \neq 0,$$

当 $a_n>0$ 时，定义 $f>0$；对于有理式 g/f，当 $fg\geqslant 0$ 时，规定 $g/f\geqslant 0$；又对于两个有理式 f,g，当 $g-f\geqslant 0$ 时，定义 $g\geqslant f$。这时 $R(t)$ 是有序域（即满足（R11）—（R16））。这样定义的序称为 $R(t)$ 的**字典式序**．用任意有序域（例如Q）代替R，结论是相同的．——

在这许多有序域中，作为实数域特征的是连续公理．为了叙述这个公理，先定义两个概念．

定义 1 所谓实数 b 是 R 的子集A的**上界**，就是对于任意的 $a\in A$，有 $a\leqslant b$。又对于任意的 $a\in A$，有 $c\in R$，满足 $c\leqslant a$ 时，称 c 为A的**下界**．

A的上界、下界的集合分别记为 $U(A)$，$L(A)$。当 $U(A)\neq\phi$（空集合）时，称A为**上有界**；当 $L(A)\neq\phi$ 时，称A为**下有界**．上、下都有界时，简称为**有界**．

由定义易知

$$(1.10)\quad \begin{aligned}&\text{若} b\in U(A),\ b\leqslant c,\ \text{则} c\in U(A).\\ &\text{若} b\in L(A),\ c\leqslant b,\ \text{则} c\in L(A).\end{aligned}$$

定义 2 如果A的上界集合 $U(A)$ 存在最小元 m，则称 m 为 A 的**最小上界或上确界**，记作

$$m=\text{l. u. b. } A=\sup A.$$

同样，如果A的下界集合 $L(A)$ 存在最大元 l，则称 l 为A的**最大下界或下确界**．记作．

$$l=\text{g. l. b}\cdot A=\inf A.$$

例 4 若 $A=[0,1)=\{x\in R\mid 0\leqslant x<1\}$ 时，则 $\sup=1$，$\inf=0$。——

上确界、下确界的定义可换成如下说法：

命题 1.3 $m\in R$ 为 $A(\subset R)$ 的上确界的充分必要条件是

1）对于任意 $a\in A$，有 $a\leqslant m$；

2）对于任意 x，只要 $x<m$，则存在 $a\in A$，满足 $x<a$。同