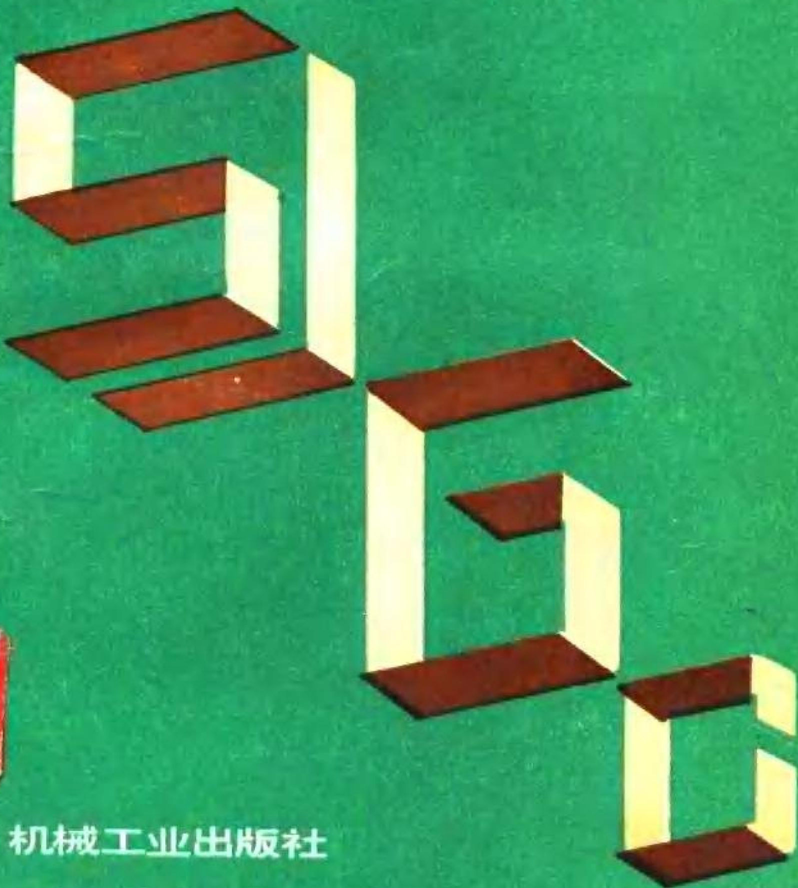
应用随机过程

赵达纲　朱迎善　编



机械工业出版社

应 用 随 机 过 程

赵达纲　朱迎善　编

机 械 工 业 出 版 社

(京)新登字054号

本书在工科大学生已有的数学知识基础上，采取工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式，较全面地介绍了现代科学技术中常见的主要随机过程及其应用。内容包括马氏链、泊松过程、生灭过程、更新过程、正态过程、维纳过程、平稳过程、鞅和随机微分方程初步知识。

本书内容简练，通俗易懂，凡具有工科数学基础和工科概率论基础的读者都可阅读。

本书可作为工科院校高年级学生及研究生教材，也可供具有工科大学数学基础，从事相关工作的工程技术人员参考。

应 用 随 机 过 程

赵达纲　朱迎善　编

*

责任编辑：孙贺影　责任校对：樊中英

张一萍

封面设计：刘　代　版式设计：胡金瑛

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 · 印张 10 1/8 · 字数 230 千字

1993年 5 月北京第 1 版 · 1993年 5 月北京第 1 次印刷

印数 0 001—1 450 · 定价：11.00 元

*

ISBN 7-111-03456-2/O·80

前　言

随机过程是研究随时间演变的偶然现象规律性的一门科学。它广泛应用于核技术、雷达与通讯、动态可靠性、设备更新、地质勘探、天文与气象、随机振动理论、控制理论、生物工程等领域。随着尖端科学和高科技的发展，随机过程的应用日益广泛和深入。

近年来，国内出版了一些随机过程方面的著作，但大都是专门从理论方面论述，应用方面涉及很少。这些书都是在较深的数学基础上写的，诸如测度论、泛函分析、拓扑等。这些问题成为非数学专业的工科大学生和工程技术人员阅读的障碍，使其难于了解和掌握随机过程这门科学，因此限制了这一有力的数学方法在高科技领域中的应用。

本书在工科大学生已有的数学知识基础上，采取为工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式，较全面地介绍了在现代科学技术中常见的几种重要的随机过程及其应用，包括马氏链、泊松过程、生灭过程、更新过程、正态过程、维纳过程、鞅、平稳过程以及常系数线性随机微分方程等。

许承德教授和陈福增副教授曾对本书的编写提出过许多宝贵意见，谨此致谢。

由于作者水平所限，缺点和错误在所难免，敬请读者不吝指教。

赵达纲　朱迎善

1990年

目　录

第一章　概率论的补充知识

本章扼要地复习概率论中某些基本概念，并补充条件期望和n维正态分布等内容，为学习随机过程作准备。

§1　概率空间

设Ω是某随机试验的所有可能结果组成的集合。Ω称为样本空间或基本事件空间，Ω中的元素ω称为样本点或基本事件，Ω的子集A称为事件，样本空间Ω也是一个事件，称为必然事件，空集$\varnothing$称为不可能事件。

因为事件是集合，所以集合的运算（并、交、差、上极限、下极限。极限等）都适用于事件。

在实际问题中，我们不是对所有的事件（样本空间Ω的所有子集）都感兴趣，而是关心某些事件（Ω的某些子集）及其发生的可能性大小（概率）。这样，便导致波雷尔(Borel)域$\mathscr{F}$和$\mathscr{F}$上的概率的概念。

定义1　设Ω是一个集合，$\mathscr{F}$是由Ω的某些子集组成的集合族。如果

1）$\Omega \in \mathscr{F}$

2）若$A \in \mathscr{F}$，则$A^c \triangleq \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$

3）若$A_n \in \mathscr{F}$，$n=1, 2, \cdots$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

则称$\mathscr{F}$为Borel域或σ-代数。$(\Omega, \mathscr{F})$称为可测空间。$\mathscr{F}$中的集合称为随机事件，简称事件。

由定义易知：

4）$\varnothing\in\mathscr{F}$

5）若A，$B\in\mathscr{F}$，则$A\setminus B\in\mathscr{F}$

6）若$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1$，2，…，则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$

定义2 设（Ω，$\mathscr{F}$）是可测空间，$P(\cdot)$是定义在$\mathscr{F}$上的实值函数。如果

1）$\forall A\in\mathscr{F}$，$P(A)\geqslant 0$，$P(\Omega)=1$

2）$\forall A_i\in\mathscr{F}$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i$，$j=1$，2，…，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称P是（Ω，$\mathscr{F}$）上的概率，（Ω，$\mathscr{F}$，P）称为概率空间，$P(A)$为A的概率。

$P(A)$的直观意义表示事件A发生的可能性大小。为方便起见，今后总假设$P(\cdot)$是完全的，即对任意$A\subset B\in\mathscr{F}$，$P(B)=0$，则$A\in\mathscr{F}$。

由定义易知：

3）$P(\varnothing)=0$

4）若A，$B\in\mathscr{F}$，$A\subset B$，则$P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$从而，概率具有单调性和零概集的子集是零概集。

5）设$A_n\in\mathscr{F}$，$n=1$，2，…，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=\begin{cases}P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right), & 若A_1\subset A_2\subset\cdots\\ P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right), & 若A_1\supset A_2\supset\cdots\end{cases}$$

定义3 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$，如果对任意$A_1$，$A_2$，…，$A_n\in\mathscr{G}$，$n=1$，2，…，有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

则称$\mathscr{G}$是独立事件族。

例1-1 将一枚硬币依次投掷无穷多次，这时，样本空间Ω由"正面"和"反面"组成的所有可能序列。若以1表示出现正面，0表示出现反面，那么

$$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\cdots):\ \omega_n = 0 \text{或} 1,\ n=1,2,\cdots\}$$

$\mathscr{F}$可取Ω的一切子集组成的集合族。

$A=\{\omega:\ \omega_1=1,\ \omega_5=0,\ \omega_{15}=0,\ \omega_{70}=1\}$表示第一次出现正面，第5次出现反面，第15次出现反面，第70次出现正面这一事件。

如果投掷是独立进行的，那么

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\omega:\ \omega_1=1,\ \omega_5=0,\ \omega_{15}=0,\ \omega_{70}=1)\\&=P(\omega:\ \omega_1=0)P(\omega:\ \omega_5=0)P(\omega:\ \omega_{15}=0)P(\omega:\ \omega_{70}=1)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\end{aligned}$$

§2 随机变量和概率分布

随机变量是概率论的主要研究对象。随机变量是依赖于试验结果或样本点ω的函数$X=X(\omega)$。每次试验之后，随机变量取一个值或在直线上取定一个点，描述随机变量的概率分布用分布函数。

定义4 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间。$X=X(\omega)$ 是定

义在Ω上的实函数，如果对于任意实数x、$\{\omega: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称$X$是$\mathscr{F}$—随机变量。而称

$$F(x)=P\{\omega: X(\omega)\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty$$

为$X=X(\omega)$的分布函数。

根据概率的性质，不难证明随机变量的分布函数$F(x)$具有下列性质。

1) $F(x)$是单调不减函数。

2) $F(x)$是右连续函数。

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$

可以证明，定义在$R=(-\infty, \infty)$上的实值函数$F(x)$，若具有上述性质1)～3)，必存在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及其上的随机变量$X=X(\omega)$，其分布函数是$F(x)$。

在应用中，常见的随机变量有两种类型：离散型随机变量和连续型随机变量。

离散型随机变量$X=X(\omega)$的概率分布可用分布列描述：

$$p_k=P(\omega: X(\omega)=x_k)\qquad k=1, 2, \cdots$$

这时，$X=X(\omega)$的分布函数

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

常见的离散型随机变量有二项分布，泊松分布，几何分布等（见表1-1）

连续型随机变量$X=X(\omega)$的概率分布用分布密度$f(x)$描述，这时，$X=X(\omega)$的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

常见的连续型随机变量有均匀分布、指数分布、正态分布等（见表1-1）

表 1-1

分　布	分布列或分布函数	均　值	方　差	特征函数	母函数
二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $0<p<1,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^{it})^n$	$(1-p+ps)^n$
泊松分布	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda t}$ $\lambda>0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$e^{-\lambda(s-1)}$
几何分布	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ $0<p<1,\ k=1,\ 2,\ \cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{i-p}{p}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$	$\dfrac{p}{1-(1-p)s}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$	—
正态分布	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$	—
指数分布	$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\geqslant 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ $\lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\left(1-\dfrac{it}{\lambda}\right)^{-1}$	—

下面考虑 n 维随机变量及其概率分布。n 维随机变量是依赖于试验结果或样本点ω的向量函数$X=X(\omega)=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$。每次试验之后，$X$取 n 维向量$x=(x_1\cdots x_n)$ 或 n 维空间R^n中一点。n 维向量$X=X(\omega)=\Big(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega)\Big)$可以看成$R^n$中的随机点。描述 n 维随机变量的概率分布用联合分布函数。

定义5 设（Ω，$\mathscr{F}$，P）是概率空间，$X=X(\omega)=[X_1(\omega)\cdots X_n(\omega)]$是定义在$\Omega$上在 n 维空间R^n中取值的向量函数。如果对于任意$x=(x_1\cdots x_n)\in R^n$，$\{\omega;\ X_1(\omega)\leqslant x_1,\ \cdots,\ X_n(\omega)\leqslant x_n\}\in\mathscr{F}$，则称$X=X(\omega)=\Big(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega)\Big)$为 n 维随机变量或 n 维随机向量，而称

$$F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)=P\{\omega;\ X_1(\omega)\leqslant x_1,\cdots,X_n(\omega)\leqslant x_n\}\quad x=(x_1\cdots x_n)\in R^n$$

为X的联合分布函数。

根据概率的性质，不难证明 n 维随机变量$X=X(\omega)=[X_1(\omega)\ \cdots\ X_n(\omega)]$的联合分布函数$F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$具有下列性质。

1）对于每个变元x_i（$i=1,\ \cdots,\ n$），$F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$是单调不减函数，

2）对于每个变元x_i（$i=1,\ \cdots,\ n$），$F(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$是右连续的。

3）对于R^n中任意区间 $(a,\ b]=(a_1,\ b_1;\ \cdots;\ a_n,\ b_n]$

$$F(b_1,\ \cdots,\ b_n)-\sum_{i=1}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_n)$$

$$+\sum_{\substack{i,\ j=1\\ i<j}}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_{j-1},a_j,b_j,\cdots,b_n)$$

$$+(-1)^n F(a_1,\cdots,a_n)\geq 0$$

4) $\lim\limits_{x_i\to-\infty} F(x_1,\ \cdots,\ x_n)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$

$$\lim_{x_1,\ \cdots,\ x_n\to\infty} F(x_1,\ \cdots,\ x_n)=1$$

可以证明，对于定义在R^n上具有上述性质1)～4)的实函数$F(\boldsymbol{x})=F(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，必存在概率空间（$\Omega$，$\mathscr{F}$，$P$）及其上的$n$维随机变量$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\omega)=[X_1(\omega)\cdots X_n(\omega)]$，其联合分布函数为$F(\boldsymbol{x})=F(x_1,\ \cdots,\ x_n)$。

对于n维随机变量，在应用中常见的也是有两种类型：离散型和连续型。

若随机向量$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\omega)=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$的每个分量$X_i(\omega)$（$i=1,\ \cdots,\ n$）都是离散型随机变量，则称$\boldsymbol{X}$是离散型随机向量。

对于离散型随机向量$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\omega)=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$也是用分布列描述它的概率分布。

$$p_{x_1,\cdots,x_n}=P\{\omega:\ X_1(\omega)=x_1,\ \cdots,\ X_n(\omega)=x_n\}$$

其中$x_i\in I_i$，I_i是离散集，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。这时，$X=X(\omega)=[X_1(\omega)\cdots X_n(\omega)]$的联合分布函数

$$F(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\sum_{\substack{x_i\leq y_i\\ i=1,\ \cdots,\ n}} p_{x_1,\cdots,x_n},\quad (y_1\cdots y_n)\in R^n$$

若存在定义在R^n上的非负函数$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，对于任意$\boldsymbol{y}=(y_1\cdots y_n)\in R^n$，随机向量$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\omega)=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$的联合分布函数

$$F(\boldsymbol{y})=F(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_n} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

则称X是连续型随机向量，$f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$称为$X$的联合分布密度。

若将随机变量的概率分布看成总质量为 1 的质量分布，那么，随机变量的分布函数就是质量分布函数，分布密度就是质量分布密度，分布列就是质点系的质量分布。在这种看法下，随机点落在任一区域的概率就是该区域的质量。

设随机点 $X=X(\omega)=(X_1(\omega)X_2(\omega))$ 的联合分布函数 $F(x)=F(x_1,\ x_2)$，那么 X 落在微分区间 $(x,\ x+dx]=(x_1,\ x_1+dx_1;\ x_2,\ x_2+dx_2]$ 的概率

$$
\begin{aligned}
&P\{\omega:\ x_1<X_1(\omega)\leqslant x_1+dx_1,\ x_2<X_2(\omega)\leqslant x_2+dx_2\}\\
&=F(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2)-F(x_1,\ x_2+dx_2)-F(x_1+dx_1,\\
&\quad x_2)+F(x_1,\ x_2)\\
&\triangleq dF(x_1,\ x_2)
\end{aligned}
$$

于是，$X=(X_1(\omega)\ X_2(\omega))$ 落在平面上的区域 $\mathscr{D}$ 的概率

$$
P\{\omega:\ (X_1(\omega)\ X_2(\omega))\in\mathscr{D}\}=\iint\limits_{\mathscr{D}}dF(x_1,\ x_2)
$$

若 $X=(X_1(\omega)\ X_2(\omega))$ 有联合分布密度 $f(x)=f(x_1,\ x_2)$，那么，$dF(x_1,\ x_2)=f(x_1,\ x_2)dx_1dx_2$，所以

$$
P\{\omega:\ (X_1(\omega)\ X_2(\omega))\in\mathscr{D}\}=\iint\limits_{\mathscr{D}}f(x_1,\ x_2)dx_1dx_2
$$

一般地，若 $X=X(\omega)=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$ 的联合分布函数 $F(x)=F(x_1,\ \cdots,\ x_n)$。记

$dF(x_1,\ \cdots,\ x_n)\triangleq P\{\omega:\ x_1<X_1(\omega)\leqslant x_1+dx_1,\ \cdots,\ x_n<X_n(\omega)\leqslant x_n+dx_n\}$

那么，$X=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$ 落在 R^n 中的区域 V 的概率

$$
P\{\omega:\ (X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))\in V\}=\int\limits_{V}\cdots\int dF(x_1,\ \cdots,\ x_n)
$$

若 $X=X(\omega)=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))$ 有联合分布密度 $f(x)=$

$f(x_1, \cdots, x_n)$，那么$\mathrm{d}F(x_1, \cdots, x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$。所以

$$P\{\omega: (X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))\in V\}=\int\underset{V}{\cdots}\int f(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

例1-2 设二维随机变量$X=(X_1(\omega)\ X_2(\omega))$的联合分布密度

$$f(x)=f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\right\},-\infty<x_1,x_2<\infty$$

求随机变量

1）$Y_1=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$

2）$Y_2=\arg(X_1\ X_2)$

3）$Y=(Y_1Y_2)$

的分布密度。

解 1）设Y_1的分布密度为$p_1(y_1)$。显然，当$y_1\leqslant 0$时，$p_1(y_1)=0$。当$y_1>0$时

$$\begin{aligned}p_1(y_1)\mathrm{d}y_1&=P\{\omega:y_1<Y_1\leqslant y_1+\mathrm{d}y_1\}=P\{\omega:y_1<\sqrt{X_1^2+X_2^2}\leqslant y_1+\mathrm{d}y_1\}\\&=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_1^2}{2}}2\pi y_1\mathrm{d}y_1=y_1e^{-\frac{y_1^2}{2}}\mathrm{d}y_1\end{aligned}$$

所以

$$p_1(y_1)=\begin{cases}y_1e^{-\frac{y_1^2}{2}}, & y_1>0\\0 & , y_1\leqslant 0\end{cases}$$

2）设Y_2的分布密度为$p_2(y_2)$。当$0\leqslant y_2\leqslant 2\pi$时，

$$\begin{aligned}p_2(y_2)\mathrm{d}y_2&=P\{\omega: y_2<Y_2\leqslant y_2+\mathrm{d}y_2\}=P\{\omega: y_2<\arg(X_1,X_2)\leqslant y_2+\mathrm{d}y_2\}\\&=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y_2=\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}y_2\end{aligned}$$

当$y_2<0$或$y_2>2\pi$　时，显然$p_2(y_2)=0$，所以

$$p_2(y_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & 0\leqslant y_2\leqslant 2\pi,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

3）设$Y=(Y_1\ Y_2)$的联合分布密度为$p(y_1,\ y_2)$，那么，当$y_1>0$，$0\leqslant y_2\leqslant 2\pi$　时，

$$\begin{aligned}p(y_1,\ y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2&=P\{\omega:\ y_1<Y_1\leqslant y_1+\mathrm{d}y_1, y_2<Y_2\leqslant y_2+\\&\quad \mathrm{d}y_2\}\\&=P\{\omega:\ y_1<\sqrt{X_1^2+X_2^2}\leqslant y_1+\mathrm{d}y_1,\\&\quad y_2<\arg(X_1,\ X_2)\leqslant y_2+\mathrm{d}y_2\}\\&=\frac{1}{2\pi}y_1e^{-\frac{y_1^2}{2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\end{aligned}$$

当$y_1\leqslant 0$或$y_2\overline{\in}[0,\ 2\pi]$时，显然，$p(y_1,\ y_2)=0$。所以

$$p(y_1,\ y_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}y_1e^{-\frac{y_1^2}{2}}, & y_1>0,\ 0\leqslant y_2\leqslant 2\pi\\ 0 & ，其他\end{cases}$$

定义6　设$X=X(\omega)=\{X_t(\omega),\ t\in T\}$是一族随机变量，如果对于任意$n\geqslant 2$和$t_1,\ \cdots,\ t_n\in T$，$x_1,\ \cdots,x_n\in R$，有

$$P\{\omega:\ X_{t_1}(\omega)\leqslant x_1,\cdots,X_{t_n}(\omega)\leqslant x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\omega:\ X_{t_i}(\omega)\leqslant x_i\} \tag{1-1}$$

则称$\{X_t(\omega),\ t\in T\}$是独立的。

若$X=\{X_t(\omega),\ t\in T\}$是一族离散型随机变量，式(1-1）等价于

$$P\{\omega:\ X_{t_1}=x_1,\ \cdots,\ x_{t_n}=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\omega:\ X_{t_i}=x_i\}$$