微分方程　付里叶分析

〔日〕近藤次郎　高桥磐郎　小柳芳雄　渡边正　著

工科数学丛书　3　习题集

工 科 数 学 丛 书 之 三

微分方程　付里叶分析

（习　题　集）

〔日〕近藤次郎　小柳芳雄　高桥磐郎　渡边　正　著

傅　文　章　译

赵　惠　元　熊　民　旦　校

辽 宁 人 民 出 版 社

1 9 8 1 年 · 沈阳

工科数学丛书之三

微分方程·付里叶分析

（习题集）

〔日〕近藤次郎　小柳芳雄　高桥磐郎　渡边　正　著

傅文章　译

赵惠元　熊民旦　校

*

辽宁人民出版社出版

（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行

沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32　印张：9

字数：240,000　印数：1—21,200

1981年8月第1版　1981年8月第1次印刷

统一书号：7090·106　定价：1.15元

内 容 提 要

这本《微分方程·付里叶分析》习题集的主要内容有：常微分方程，贝塞尔函数·渐近展开，算子法，付里叶分析，偏微分方程等方面的例题，类题，习题及解答.

本书取材广泛，内容新颖，全部题目都有详解.可供工科院校师生及工程技术人员参考.

译者的话

这套丛书译自日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的“工科の数学”。全书共分五册：《微分·积分》《线性代数·向量分析》《微分方程·付里叶分析》《复变函数》和《统计·数值分析》。该丛书逻辑清晰，结构严谨，取材广泛，内容新颖；每册编有相应的习题集，并与基础部分紧密结合。该书当前在日本国内各工科大学已被采用，深受读者欢迎。

为适应我国工科院校广大师生与有关人员自学需要，特将此书全部译出。由于水平有限，误译之处在所难免，恳切地希望读者提出批评指正。

参加本丛书翻译的有：王运达、潘德惠、刘俊山、于溶渤、傅文章、关颖男等同志。总校：赵惠元教授和熊民旦同志。在翻译过程中，党恺谦和田永成同志作了部分工作，在此谨致谢意。

一九八〇年七月

目　录

第一章　常微分方程

1·1　引　　言

要点

通常把含有未知函数及其导函数的方程叫做**微分方程**。微分方程的含有任意常数的解叫做**通解**。不含有任意常数的解叫做**特解**。微分方程的通解中含有的任意常数叫做**积分常数**。

包含在微分方程中未知函数的导数最高阶数是 n 时，则此微分方程叫做 **n 阶微分方程**。一般地，n 阶微分方程的通解含有 n 个积分常数。微分方程关于未知函数及其导数是线性时，则称此微分方程为**线性微分方程**。不是线性的，就称为**非线性微分方程**。

例题1·1·1　根据物理实验知道，物体的温度 T 在单位时间内的变化率，与物体现在的温度 T 跟它周围的温度之差成比例（牛顿冷却定律）。试将这个定律用公式表示出来。

〔解〕　当把这个问题用公式表示时，要注意的一点就是温度 T 对时间的变化率可以用微分系数 dT/dt 表示。其中 t 是表示时间的变量。这表明所谓微分，就是由变化率的思想发展起来的概念。设物体周围的温度为 T_0，则与物体的温度差是 T_0-T。周围的温度比物体的温度低时 $(T_0-T<0)$，因为物体的温度在下

降，所以温度的变化率 dT/dt 为负。因而，若设比例常数为 $k(>0)$，则此问题可用下面的公式表示

$$dT/dt = k(T_0 - T) \qquad (1)$$

解出这个方程，就能知道物体的温度随时间变化的规律。此时，微分方程（1）的解是

$$T = T_0 + (T_i - T_0)e^{-kt} \qquad (2)$$

其中 T_i 是时间 $t=0$ 时物体的温度。可知温度的变化为指数函数形式(图1·1)。

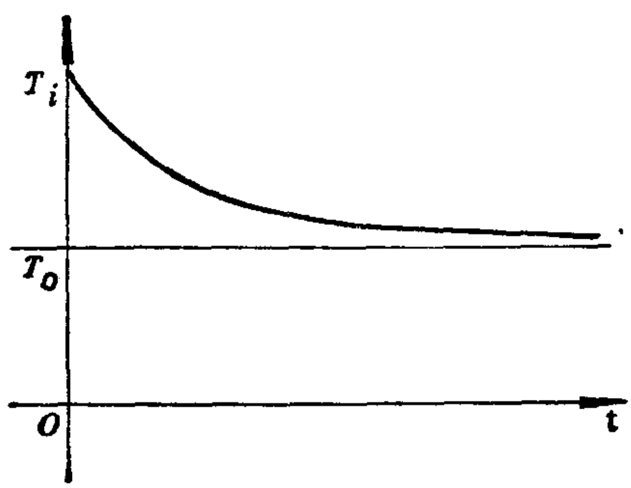

图 1·1

类题1·1·1　有一个装水的容器，考虑水从所设置的开口流出的问题。设开口面积为 $B\text{cm}^2$，开口以上的水面高为 h cm，已知单位时间内从开口流出的水量为 $0.6B\sqrt{2gh}$。其中 g 是重力加速度。

现在已知一个直立的圆筒容器（半径为$\frac{1}{2}$m，高为 2m）。设容器装满了水，在筒底开一个直径为 1cm 的小孔，让水从小孔流出，试求容器内的水量为一半时所需的时间。

例题1·1·2　试从下列方程中消去括号内的常数，作成微分方程。

（1）$y=mx$,　　　　　　　　〔m〕

（2）$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,　　　　〔a, b, r〕

〔解〕　（1）为了消去一个常数 m，需要有含 m 的两个方程。将（1）式对 x 微分之，又得出一个含 m 的方程。

$$y'=m,$$

由此式与（1）式消去 m，得

$$y=y'x.$$

这就是以（1）为通解的微分方程，而（1）式中含的 m 为任意常数。

（2）为了消去三个常数，需要四个方程。将已知的方程逐次微分之，得出所要的方程如下。首先，将

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \qquad (3)$$

对 x 微分之，得

$$2(x-a)+2y'(y-b)=0, \qquad (4)$$

将（4）式对 x 微分之，得

$$2+2y''(y-b)+2y'^2=0, \qquad (5)$$

即

$$y-b+(y'^2/y'')+(1/y'')=0.$$

将此式再对 x 微分之，得

$$y'+\{2y'y''\cdot y''-(1+y'^2)y'''\}/y''^2=0,$$

即得到了消去 a、b、r 的微分方程

$$3y'y''^2=(1+y'^2)y'''.$$

类题1·1·2　试从下列方程中消去括号内的常数，作成微分方程。

（1）$y=x+m$,　　　　〔m〕

（2）$y=a\sin(\omega t+b)$,　〔a, b〕

例题1·1·3　试推导与 x 轴正交的圆族所满足的微分方程。

〔解〕 与 x 轴正交的圆其特征是圆心在 x 轴上。设圆心为 $(c, 0)$，半径为 r，则圆的方程为

$$(x-c)^2+y^2=r^2, \tag{6}$$

由此方程消去常数 c 及 r，即可得到微分方程。

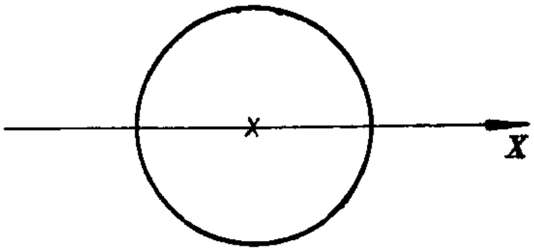

图 1·2

将（6）式对 x 微分之，得

$$2(x-c)+2yy'=0,$$

即

$$x-c+yy'=0.$$

将此式再对 x 微分之，得

$$1+y'^2+yy''=0.$$

因为此式不含常数 c 及 r，所以对于与 x 轴直交的圆都成立。

类题1·1·3 试求通过点 (a, b) 的直线束所满足的微分方程。

类 题 答 案

1·1·1 开口的面积是 $(\pi/4)\mathrm{cm}^2$。设水面的高为 h，根据流出定律，下面的微分方程成立

$$\frac{d}{dt}(\pi\cdot(50)^2\cdot h)=-0.6\frac{\pi}{4}\sqrt{2gh},$$

因而有

$$dh/dt=-2\sqrt{h}/K, \qquad K=100000/(3\sqrt{2g}).$$

这个微分方程可如下求解：

$$\int\frac{dh}{2\sqrt{h}}=-\int\frac{dt}{K}, \qquad \sqrt{h}=-\frac{t}{K}+C.$$

C是常数。因为 $t=0$ 时水是满的，所以 $h=200$，即

$$\sqrt{200}=C.$$

设水面的高为一半（$h=100$）的时间是 t，则由上式得

$$\sqrt{100}=-(t/K)+\sqrt{200},$$

因而，所求的时间是

$$t=K(\sqrt{200}-\sqrt{100})=3120\text{（秒）}=52\text{(分)}.$$

1·1·2 （1） $y'=1$.

（2） $y'=\omega a\cos(\omega t+b)$, $y''=-\omega^2 a\sin(\omega t+b)$.

因而有

$$y''+\omega^2 y=0.$$

1·1·3 通过点（a, b）的直线，一般可以写为

$$y-b=m(x-a).$$

其中 m 是表示直线倾斜程度的参数. 因而，从这个方程消去 m 就行了. 上式两边对 x 微分之得

$$y'=m,$$

于是，所求的微分方程为

$$y-b=y'(x-a).$$

1·2 一阶微分方程

要点

关于微分方程解的存在与唯一性问题，有如下的柯西基本定理：

1° **基本定理** 设函数 $f(x, y)$ 及其偏导函数$\frac{\partial f}{\partial y}$定义在区域$D$上，且都连续. 这时，对于微分方程

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

有下列结论成立：

（1）对于区域D的任意点（x_0, y_0），满足

$$y_0=\varphi(x_0)$$

的方程（1）的解 $y=\varphi(x)$，在 x_0 的某个邻域 $|x-x_0|<h$

内存在.

（2）如果方程（1）的两个解 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$，至少在 x 的一个值 $x=x_0$ 处相等，即若

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0),$$

则这两个解在它们共同的定义域上恒等.

2° **一阶微分方程的类型** 设 $y=f(x)$ 是未知函数，则一阶常微分方程一般可表为

$$F(x, y, y')=0$$

的形式. 下面就这个方程能象（1）那样解出 y' 的情形，分成几种类型，并讨论其解法.

(a) **分离变量型**

$$y'=f(x)g(y) \tag{2}$$

型的微分方程叫做分离变量型. 这种类型微分方程的解，表示如下

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx+C. \tag{3}$$

其中，C 是任意常数.

(b) **齐次型**

$$y'=f(y/x) \tag{4}$$

型的微分方程叫做齐次型. 就是说 y' 不仅与单独的 x、y 有关，而且与比值 y/x 有关.

为解齐次微分方程，设

$$u=y/x, \text{ 即 } y=xu.$$

将此式两边对 x 微分之，得

$$y'=u'x+u,$$

所以，把它代入（4）式得

$$u'x+u=f(u),$$

即
$$u'=\{f(u)-u\}/x,$$

化成了分离变量型. 因而根据下式:

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} = \log x + C^{1)} \qquad (5)$$

可以求解。

(c) **线性方程**

由 y 与 y' 的一次式构成的微分方程

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (6)$$

叫做**线性微分方程**。线性微分方程一般可用**参数变值法**求解。

即，先在（6）式中，考虑 $q(x)\equiv 0$ 的情况

$$y' + p(x)y = 0, \qquad (7)$$

因为这是分离变量型的，所以由

$$dy/dx = -p(x)y$$

可得

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + C_0$$

$$y = C_0 e^{-\int p(x)dx} \qquad (8)$$

形式的解。其中C是积分常数。若C是常数，(8)就是（7）的解。现在，把这个C看作 x 的函数，记为$C(x)$。可以确定函数 $C(x)$，使

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (9)$$

成为方程（6）的解。为此，把（9）式代入（6）式，则有

$$(C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

得

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

所以

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

因而得

---

[1] 本书用"log"表示以 e 为底的自然对数。——译者

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C. \tag{10}$$

所以（6）式的通解是

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int\frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}}dx+C\right).$$

这里C是积分常数。

(d) 全微分方程

微分方程

$$M(x,\ y)+N(x,\ y)\ dy/dx=0$$

可表示为微分形式

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0. \tag{11}$$

当（11）式的左边是某个函数$G(x,\ y)$的全微分[1]时，（11）式就叫做**全微分方程**。此时，函数$G(x,\ y)$叫做（11）式的**积分函数**。而且，若设C为任意常数，(11)式的通解由

$$G(x,\ y)=C \tag{12}$$

给出。

微分方程（11）是全微分方程的必要且充分条件是

$$\partial M/\partial y=\partial N/\partial x. \tag{13}$$

（11）式不是全微分方程时，若存在适当的函数$\mu(x,y)$，使

$$\mu(x,\ y)M(x,\ y)dx+\mu(x,y)N(x,\ y)dy=0 \tag{14}$$

成为全微分方程，则$\mu(x,\ y)$叫做(11)式的**积分因子**。知道了积分因子，微分方程(11)就容易解了。

例题1·2·1 解下列微分方程。

（1）$(x+2)y'-xy=0$,

（2）$y'=xy+x+y+1$,

---

[1] 把$dG(x,y)=G_x(x,y)dx+G_y(x,y)dy$叫做$G(x,\ y)$的全微分。

（3） $xdy+ydx=xy^3dx$。

〔解〕　（1）可以变为 $y'=\{x/(x+2)\}y$ 的形式，这是分离变量型，可按分离变量法如下解之。

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{x+2}dx+C=\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx+C,$$

即

$$\log y=x-2\ \log(x+2)+C,$$

$$y=\{e^x/(x+2)^2\}e^C,$$

其中 C 是积分常数，e^C 也是常数，随着 C 可以取任意值。因而，若用 C 代替 e^C [1]，则通解为

$$y=Ce^x/(x+2)^2.$$

（2）若将右边因式分解，则得

$$y'=(x+1)(y+1),$$

这是分离变量型。因而，解如下式

$$\int\frac{1}{y+1}dy=\int(x+1)dx+C,$$

$$\log(y+1)=(x+1)^2/2+C,$$

$$y=Ce^{(x+1)^2/2}-1.$$

其中 C 是积分常数（参照前面问题的注脚）.

（3）若设 $u=xy$，则有

$$du=(u^3/x^2)dx,$$

因而

$$\int\frac{1}{u^3}du=\int\frac{dx}{x^2}+C,$$

$$-u^{-2}/2=-x^{-1}+C,$$

即

$$1/2x^2y^2=1/x+C,$$

---

[1] 注意，这样改写任意常数，以后不再作说明.

$$y^2=1/\{2x(1+Cx)\}.$$

C是积分常数。

类题1·2·1 解下列微分方程。

（1） $(x^2+1)y'-xy=0$,

（2） $y'x-xy=x-y-1$,

（3） $2xydx+x^2dy=x^2y^2dx$。

例题1·2·2 求满足已知条件的微分方程的解。

（1） $xy'=x+1$；当 $x=1$ 时， $y=0$。

（2） $y'(x^2-4)=y$； (a) $x=4$ 时，$y=1$；

(b) $x=-2$ 时， $y=0$； (c) $x=2$时， $y=1$；

(d) $x=2$ 时， $y=0$。

〔解〕 （1） 变为 $y'=(x+1)/x$，因为是分离变量型.所以先求得通解

$$y=\int\frac{x+1}{x}dx+C=x+\log x+C.$$

在这里，取 $x=1,y=0$，得

$$0=1+C,$$

因而 $C=-1$。即积分常数C为-1的解

$$y=x-1+\log x,$$

是满足条件的解.

（2） 由 $y'=y/(x^2-4)$ 按分离变量法求通解

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x^2-4}+C,$$

$$\log y=\{\log(x-2)/(x+2)\}/4+C,$$

$$y=C\{(x-2)/(x+2)\}^{1/4}. \qquad (15)$$

(a) 在 (15) 式中，取 $x=4$，$y=1$，得

$$1=C(2/6)^{1/4}, \quad C=3^{1/4},$$

因而，满足条件的解是

$$y=3^{1/4}\ \{(x-2)/(x+2)\}^{1/4}.$$