数学思想方法入门

——怎样理解证明和作出证明

数学思想方法入门

——怎样理解证明和作出证明

〔美〕D. 索罗 著

沈泽琪 许心正 译

科 学 出 版 社

1 9 8 8

内 容 简 介

本书是一本讲述数学思想方法的入门书．它通过通俗的例子讲述了数学证明的各种基本规则和常用方法(如顺推-倒推法、构造法、选择法、归纳法、特殊化法、矛盾法、换质位法等)，同时也指出了这些方法在什么情况下使用和怎样使用．

本书可供高中学生、师范院校师生、中学数学教师、自学青年学习参考．

Daniel Solow

HOW TO READ AND DO PROOFS

An Introduction to Mathematical Thought Process

John Wiley and Sons, 1982

数学思想方法入门

——怎样理解证明和作出证明

〔美〕D. 索罗 著

沈泽琪 许心正 译

责任编辑 毕 颖

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年8月第一版 开本：787×1092 1/32

1988年8月第一次印刷 印张：4 7/8

印数：0001—9,020 字数：106,000

ISBN 7-03-000087-0/O·26

定价：1.30 元

序

在关于“教数学同时要教证明方法”的文章中，作者写道：“不能用一种容易理解的方式教授证明，已在数学各科的教学中使学生和教师感到困扰”．所有具有数学教学经验的人和大多数具有学习经验的人都承认，要正确和完整地弄懂数学证明，对学生来说困难太大了．许多学生往往采用回避的办法来躲开这个困难——依赖没有证明题的考试．这种考试是学生和教师之间的一种默契，虽然它使师生双方都可以避免某些由于学生不精通证明而造成的不愉快后果，但它改变不了这样的事实：证明是数学中的一个重要的组成部分，也是数学的最大特征，而它却没有列入学生的训练计划之中．

索罗(Solow)博士认为，将证明系统化可以教会学生理解证明的本质．在这本小册子中，他用丰富的图表和例子表明他的看法是令人信服的．我以为，他的看法值得重视和研究，更值得进行实验．他的主要目的之一是教学生怎样阅读教科书中出现的证明．当然，这些证明并没有以系统化了的方式出现在教科书中．因此，尤其值得注意的是——特别在两个附录中——他教读者怎样从简略叙述的证明中认识数学论证的标准要素．

与传统算法在初等算术中的作用进行类比是恰当的．重要的是要求精通它们，理解为什么它们这样进行，对什么样的问题它们有效和能被应用．人们已经了解了所有这一切，所以会在实际生活中创造性地进行计算(没有计算器时更是如此)．作者主张对待证明也应这样．当理解和分析了证明的

结构之后，你将会弄懂并理解在课本中碰到的简略叙述的证明，并且最终作出自己的证明．索罗博士并不要求数学家有意识和严格地运用“顺推-倒推法”等方法给出证明．他提出通过将证明系统化的方法来教授证明，比起现行的方法(多少有点靠偶然并且基本上是希望学生自己能学到这些困难的技巧)要好得多．

大家都应该赞同索罗博士的这种意见，我国(指美国——译者注)学生在他的学习过程中开始掌握数学证明的思想方法太晚了．开始学习这些思想方法的合适时期，应该不晚于8年级(这也许多少会有一些不同意见)．当然，大学和专科教师将他们自身的失败归因于学生专科前教育的缺陷而原谅自己，这也是不对的．

今天，数学已被普遍地承认是一门基本的和重要的学科，因为它在现代生活中无处不起作用．为了有效地利用它，必须确切地理解它的方法．否则，在试图利用数学时，我们将使自己充当(没有适应性的)机器人的角色，且会把过重的负担加在我们天生就有缺陷的记忆中．对于怎样理解和掌握数学证明这个问题，索罗博士已经给出了许多想法．许多学生在今天并没有很好地理解证明，但用索罗博士的方案来补救这种令人很不满意的状况，是值得满怀希望地试一试的．

D. 博蒙特学院教授 P. 希尔登
俄亥俄州克利夫兰市
凯斯·韦斯顿·利赛弗大学

致 学 生

在完成了我的学士学位的学业之后，我开始想知道，学理论数学为什么会这样困难．在我大学毕业后的工作过程中，我领悟到数学具有各种策略，其中之一是它的规则有一部分是隐蔽的．像下棋那样，你首先要知道移动棋子的全部规则．许多学生由于不掌握这样的规则，他们为抽象数学所苦恼就不足为奇了．

这本小册子叙述了一些规则，这些规则可在理论数学的策略中使用．根据我的经验，这些规则实际上对任何人都能有所启发，并且在高中数学中就已经见过，因而是能够学会的．学会这些规则之后，在学习抽象数学时将会大大地节省时间和少受挫折．我希望这本小册子能够帮助你达到这个目的．

对下棋来说，你必须首先学习各个棋子怎样移动．只有当移动棋子的规则进入你的下意识之后，你的智力才能转而集中于战略、战术以及其它类似的更富于创造性的策略上．数学也是这样．困难的工作是要求你首先学会在这本小册子中提出的基本规则．事实上，你的目标应当是掌握这些材料使之成为你的第二天性．此后，你将发现你的精力就能够集中在数学的创造性方面了．这些规则不能代替创造性，这本小册子也无意讲授创造性．但是我相信，它能提供表现你的创造性所需要的工具．同样重要的是，这些工具将使你有能力去理解和鉴别别人的创造性．

你将要学习数学思想方法的一个关键部分．像学习教材

和解题一样，要自觉地进行独立思考，提出问题和寻求解答.须知，有问题就提出才是聪明的.

D. 索罗

1981, 6　俄亥俄州克利夫兰市

致教师

不能用一种容易理解的方式教授证明，已在数学各科的教学中使学生和教师感到困扰. 其结果挫伤了学生，也挫伤了教师，长此以往还常常使学生只有模仿某些极少量具体材料的能力，或者以学生在数学理解上有缺陷为理由来保护他们通过考试.

有人认为，多数学生是不可能理解抽象数学的，但我的经验表明情况与此相反. 所缺少的似乎是阐明理论数学的适当方法. 这本小册子叙述了掌握证明的一些通用方法. 由于这些方法是对实际证明中反复使用的各种方法(在学生水平上)通过解释、概括和一般化而得出的，因而教师好教，学生能学.

学生一旦掌握了这些方法，便可以将任何证明理解为是应用这些方法的结果. 之所以能这样做，是因为学生在这本书中已经学过怎样进行加工和补充.

像本书的例子那样，依照证明所用的方法来叙述证明并不困难. 本书在每一个“简练”了的证明之前都有一个证明的概要，这个概要是从方法论和思想方法上来叙述的，并且也说明了所用的方法. 用这种方式来讲授证明比起在证明的每一个步骤之前提出它所用的方法和为什么用这个方法并没有什么更多的要求.

在课堂上讨论证明时，我主动让学生参加，请他们选择证明方法和写出证明. 我为他们的见解和提出的问题感到惊喜. 我有这样的经验，一旦学生掌握了证明方法，他们的志趣就会专门致力于数学的重要之处，如为什么证明是数学的独

特方法以及为什么数学的这一部分是第一重要的. 这本小册子并不打算讲授创造性，但我相信，它叙述了许多必需的基本方法. 学生一旦掌握了这些方法，便可以解放思想，使之集中到创造性上. 我还发现，对水平不高的学生，用这种方法教他们较深的数学知识也是可能的.

总之，任务是清楚的. 主要的目的是将抽象数学变成对学生是可懂的和有兴趣的，同时也为你提供一种给学生们讲授的方法.

D. 索罗

1981, 6 俄亥俄州克利夫兰市

目　录

1. 关 于 证 明

数学家的目的是发现和表达某些真理. 数学家使用的是数学语言，证明是将数学真理表达给其他人的方法，这些人"说"的也是这种语言. 数学语言的显著特点是它的严谨性. 一个严格叙述出来的证明不应该含糊不清，也就是不应该对它的正确性产生怀疑. 遗憾的是，在教科书和杂志的文章中出现的许多证明却并没有完整地叙述出来. 不过对已经了解数学语言的人来说，只要求证明的叙述有适当的完整性就行了. 因此，为了理解和叙述证明，你必须学习新的语言和新的思想方法. 这本小册子讲述了许多你必需的基本"语法". 如象学习任何别的新语言一样，只有掌握了这些基本"语法"，你的新语言才会说得流畅.

这本小册子对用于证明的各种方法给予了分类和解释，目的之一是教你用统一的方法去读懂已经写出来的证明. 你学会之后，就能够独立地去学习几乎所有的数学科目，这本身就是一个理想的目标.

这本小册子的另一个目的是教你对已知的数学真理给出你自己的证明. 正如在任何语言中，同一个思想可有许多表达方法一样，同一个数学事实也可以有不同的证明. 本书讲述的证明方法是指导你怎样开始以至怎样完成证明. 因此，本书不但讲述证明的方法，也讲述每一个方法在什么情况下才能使用和怎样使用. 一般来说，一个恰当的证明方法是根据所考虑的问题的结构选择出来的. 所以，在你试图作出自己的证明之前，要学会自觉地选择证明方法，以节省时间. 你

对自己的思考过程理解得越深，作得就越好.

当然，最终的目的是运用你学到的方法和语言去发现和表述未知的数学真理. 虽然这个目的是美好的，但实现它却非常困难. 通向这个目的的第一步是达到这样的水平，就是能够读懂证明和对已知数学事实给出自己的证明. 这样你就能更深入和更有趣味地理解数学的广泛内容了.

在前十一章中叙述了有关证明的基本方法. 第十二章则是总结. 后面的两个附录讲述多种方法综合运用的例子.

这本小册子是写给具有良好的高中数学知识的读者的，对于过去已学过这些证明方法的优秀学生，可以在读完前两章后跳到总结那一章，再接着读两个附录，以了解怎样进行整体综合. 总结这章的其余部分，讲述的是能够应用这些证明方法的各种情况.

已知两个命题 A 和 B，其中每一个既可以是真的也可以是假的，数学中的重要问题是指明：如果 A 是真的，那么 B 也是真的，而证明是完成这个任务的正规方法. 在本书后面的各章中，将根据 A 和 B 的各种形式指出进行证明的各种方法. 下面是一些命题的例子.

(1) 平面内两条不同直线或者平行或者相交于唯一的一点.

(2) $1=0$.

(3) $3x=5$ 并且 $y=1$.

(4) x 不大于零.

(5) 存在一个角 t，使得 $\cos t=t$.

可以看出，命题(1)是真的，命题(2)是假的，而命题(3)和(4)要根据变量的值而确定其真假.

命题(5)是真的，但这并不明显，所以必须用一个方法来“证明”这个命题是真的. 换句话说，数学证明就是用数学语

言叙述出来的令人信服的理论根据. 因此，证明包含的数学事实应该详细到使阅读证明的人所信服. 例如，当命题(5)的证明是提供给数学教授时，可以用不比图1更多的事实就够了. 反之，对于高中学生来说，就应该要求相当详细，恐怕甚至要从余弦函数的定义开始. 缺少足够的细节常常会使读者在阅读证明和理解证明中遇到困难. 本书的目的之一就是教你读懂这种"简练"了的证明，这种证明经常在教科书和其它数学文章中出现.

为了做出证明，你必须确切地理解所谓证明"如果 A 是真的，那么 B 也是真的"究竟是什么意思. 命题 A 通常叫做"假设"，命题 B 通常叫做"结论". 为简洁起见，命题"如果 A 是真的，那么 B 是真的"可简写成"若 A 则 B"或"A 推出 B". 数学家在书写上往往好偷懒，他们已经提出了许多"简化"记号. 例如数学家经常用"$A \Rightarrow B$"来代替"A 推出 B". 在大多数情况下，教科书并不用这些记号，但教师却常常采用，而最终你也会发现用它们是很方便的. 因此，本书将出现一些适当的记号，但在证明中不使用它们.

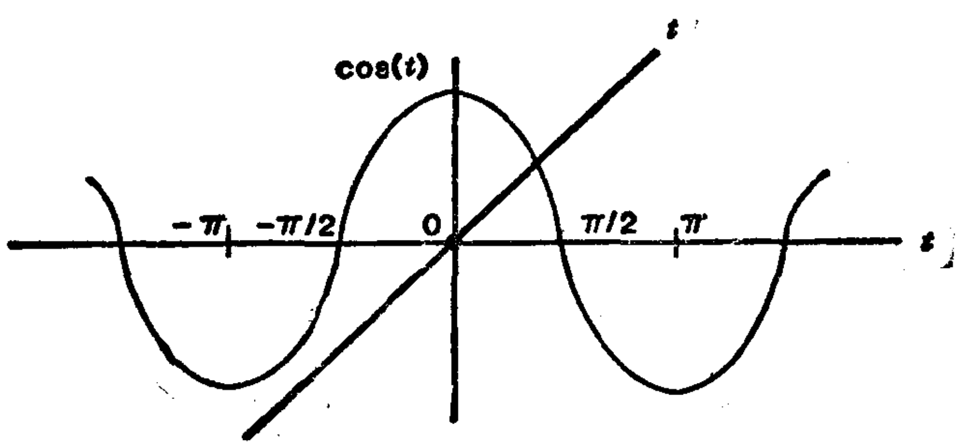

图1　存在着一个角 t，使 $\cos t = t$ 的证明

"A 推出 B"是不是真的，当然由 A 和 B 自身是真是假来确定. 因此，可以考虑下列四种可能的情形.

(1) A 是真的并且 B 也是真的.

(2) A 是真的但 B 是假的.

(3) A 是假的但 B 是真的.

(4) A 是假的并且 B 也是假的.

例如，你的朋友提出以下命题："如果下雨，那么玛丽带伞."在这里命题 A 是"下雨"，而命题 B 是"玛丽带伞". 当你分别问过四种可能的情形而肯定了在哪种情形下你的朋友撒了谎，你就可以确定在这种情形下命题"A 推出 B"是假的. 在第一种情形下(即下雨并且玛丽带了伞)，你的朋友说的是真话；在第二种情形下，下雨了，但玛丽没有带伞，你的朋友说的是谎话，而不是真话；最后，情形(3)和(4)是没有下雨，在这种情形下你不能说你的朋友撒了谎. 因为你的朋友只是说如果下雨的话，玛丽带伞的事情要发生. 可见，在四种情形中除第二种外命题"A 推出 B"都是真的. 将这些简要地列在表1中.

表1 "A 推出 B"的真值表

A	B	A 推出 B
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

表1是真值表的一个例子. 对一个复合命题(这里是"A 推出B")来说，当组成它的各个命题(这里是 A 和 B)取各种可能的真假值时，它在什么时候是真的，可用真值表的方法来确定. 别的真值表将在第三章中出现.

根据表1，当试图证明"A 推出 B"是真时，可以承认"推出"一词左边的命题(就是 A)是真的，目的是断定右边的命题(也就是 B)是真的. 应该注意，证明命题"A 推出 B"不是要

验证 A 和 B 自身都是真的，而是要说明，在承认 A 为真的前提下 B 是 A 的逻辑结论.

一般来说，能够证明 B 是真的在很大程度上依赖于已经假定了 A 是真的这个事实，并且归根结蒂是能找到 A 和 B 之间的联系. 要做到这一点，要求具有相当的创造力. 本书叙述的证明方法只是引导你入门并给你指出前进的方向.

今后 A 和 B 都是命题，它们或者是真的或者是假的，两者必居其一. 重要的问题是怎样证明"A 推出 B".

习　　题

1.1 下列各题哪个是命题(所谓一个命题必须或者为真或者为假)?

(a) $ax^2+bx+c=0$.

(b) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(c) 三角形 XYZ 相似于三角形 RST.

(d) $3+n+n^2$.

(e) $\sin\dfrac{\pi}{2}<\sin\dfrac{\pi}{4}$.

(f) 对每一个角 t, $\sin^2 t+\cos^2 t=1$.

1.2 指出下面每个命题中的假设和结论.

(a) 如果直角三角形 XYZ 的直角边长是 x 和 y, 斜边长是 z, 面积是 $\dfrac{z^2}{4}$, 那么直角三角形 XYZ 是等腰三角形.

(b) n 是偶数 $\Rightarrow n^2$ 也是偶数.

(c) 如果 a, b, c, d, e, f 都是实数，具有性质 $ad-bc\neq 0$, 那么线性方程组

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

对 x, y 有解.

(d) 前 n 个正整数的和是 $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(e) r 是实数,并且满足 $r^2=2$, 推出 r 是无理数.

(f) 如果 p 和 q 是正实数, 并且 $\sqrt{pq}\neq\dfrac{p+q}{2}$, 那么 $p\neq q$.

(g) 当 x 是实数时, $x(x-1)$ 的最小值至少是 $-\dfrac{1}{4}$.

1.3 如果要证明"A 推出 B"是真的, 并且已经知道 B 是假的,还需要证明 A 是真的或是假的吗? 说明理由.

1.4 利用表1确定下列命题在什么条件下是真的或假的,并说出理由.

(a) 如果 $2>7$, 那么 $1>2$.

(b) 如果 $2<7$, 那么 $1<3$.

(c) 如果 $x=3$, 那么 $1<2$.

(d) 如果 $x=3$, 那么 $1>2$.

1.5 对下面每个命题作一真值表.

(a) A 推出 (B 推出 C).

(b) (A 推出 B) 推出 C.

2. 顺推-倒推法

本章的目的是讲述一个基本的证明方法：顺推-倒推法. 本章的内容很重要，因为其他的所有证明方法都要运用顺推-倒推法.

进行任何证明时，第一步必须识别命题 A 和命题 B. 一般来说，在“如果”这个词之后和“那么”这个词之前的所有词组成了命题 A，而在“那么”这个词之后的所有词组成了命题 B. 换句话说，你承认是真的那些(即假设)是 A，而要去证明的那些(即结论)是 B. 考察下面的例子.

例 1 如果直角三角形 XYZ 的直角边长为 x, y, 斜边长为 z, 面积为 $\frac{z^2}{4}$, 那么三角形 XYZ 是等腰三角形(见图 2).

证明概要 这个例子中的命题是

A: 直角三角形 XYZ 的直角边长为 x, y, 斜边长为 z, 面积为 $\frac{z^2}{4}$.

B: 三角形 XYZ 是等腰三角形.

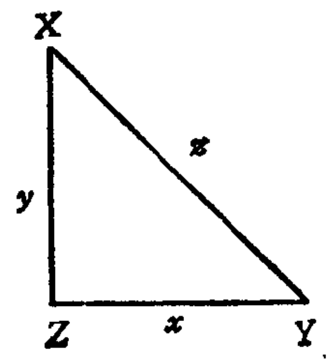

图 2 直角三角形 XYZ

在上一章说过，要证明“A 推出 B”时，你可以承认 A 是真的，并且必须利用这一信息来得到 B 是真的这个结论. 为了想像出怎样才能得到 B 是真的这个结论，你要用倒推法来思考. 相反，当你要用 A 中所给信息时，你要用顺推法来思考. 这两种思考过程详细地叙述如下.