組合數學

問題詳解

C. L. 劉 原著
林妙聰 譯著

曉園出版社
世界圖书出版公司

J21/55/06

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則徹底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各讀研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進更上層樓的成就。

组合数学问题详解
C.L.刘　原著
林妙聪　译著
*
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街137号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1994年11月第　一　版　　开本：711×1245　1/24
1994年11月第一次印刷　　印张：12.5
印数：0001—650　　　　　字数：23万字
ISBN：7-5062-1982-4/O·150
定价：16.60元　(WB9405/11)

組合數學問題詳解

（目　錄）

第 一 章　排列與組合 …… 1
第 二 章　生成函數 …… 25
第 三 章　遞廻關係 …… 59
第 四 章　排容原理 …… 95
第 五 章　玻里雅理論 …… 129
第 六 章　圖形理論概說 …… 165
第 七 章　樹、環路與切集 …… 181
第 八 章　平面及對偶圖 …… 195
第 九 章　控制數、獨立數與顏色數 …… 205
第 十 章　傳輸網路 …… 215
第十一章　配對理論 …… 231
第十二章　線性規劃 …… 243
第十三章　動態規劃 …… 271
第十四章　區塊設計 …… 295

第一章　排列與組合

1. (a)應用關係式 $C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$ 證明等式 $C(n+1,m)=C(n,m)+C(n-1,m-1)+C(n-2,m-2)+\cdots\cdots+C(n-m,0)$，其中 $m\leq n$。

(b)以組合式討論證明此等式。

【證明】：

(a)

$$
\begin{aligned}
&C(n+1,m)=C(n,m)+C(n,m-1)\\
&C(n,m-1)=C(n-1,m-1)+C(n-1,m-2)\\
&C(n-1,m-2)=C(n-2,m-2)+C(n-2,m-3)\\
&\qquad\vdots\\
&C(n-m+2,1)=C(n-m+1,1)+C(n-m+1,0)\\
+)\ &C(n-m+1,0)=C(n-m,0)\\
\hline
&C(n+1,m)=C(n,m)+C(n-1,m-1)+C(n-2,m-2)+\cdots\cdots+C(n-m,0)
\end{aligned}
$$

(b)假設 $(n+1)$ 個物體中有 m 個物體被標號為 S_1；S_2，S_3，…，S_m，則自 $(n+1)$ 個物體中取出 m 個的方式有以下這麼多種：(不包含 S_1)+(包含 S_1 但不包含 S_2)+(包含 S_1，S_2；但不包含 S_3)+……+(包含 S_1，S_2，…… S_i；但不包含 S_{i+1}

)+……+(包含 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots, S_m$)

意即：

$$C(n+1, m)=C(n, m)+C(n-1, m-1)$$
$$+C(n-2, m-2)+\cdots\cdots+C(n-m, 0)$$

2. (a)證明等式

$1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$ 成立

(b)試討論此等式的組合式意義。

(c)證明對於任意整數 m 均可唯一地以下列形式（階乘表示法）表示

$m=a_1\times1!+a_2\times2!+a_3\times3!+\cdots\cdots+a_i\times i!+\cdots\cdots$

其中 $0\leq a_i\leq i$ ，$i=1, 2, 3, \cdots\cdots$

【證明】：

(a)
$$
\begin{array}{lrl}
 & (n+1)! & = n\times n!+n! \\
 & n! & =(n-1)\times(n-1)!+(n-1)! \\
 & (n-1)! & =(n-2)\times(n-2)!+(n-2)! \\
 & & \vdots \\
+) & 2! & =1\times1!+1! \\
\hline
\end{array}
$$

$$(n+1)!=n\times n!+(n-1)\times(n-1)!+\cdots\cdots+2\times2!$$
$$+1\times1!+1$$

故 $(n+1)!-1=1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots\cdots+n\times n!$

(b)將 $(n+1)$ 個不同物體 $S_1, S_2, \cdots\cdots, S_{n+1}$ 放入 $(n+1)$ 個不同格子 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_{n+1}$ 內的方式有以下這麼多種：

(S_1 不在 C_1 內)+(S_1 在 C_1 內；但 S_2 不在 C_2 內)+

$(S_1, S_2$ 分別在 C_1, C_2 內；但 S_3 不在 C_3 內$)+\cdots\cdots+$ $(S_1, S_2, \cdots\cdots, S_i$ 分別在 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_i$ 內，但 S_{i+1} 不在 C_{i+1} 內$)+\cdots\cdots+(S_1, S_2, \cdots\cdots, S_n, S_{n+1}$，分別在 C_1，$C_2, \cdots\cdots, C_n, C_{n+1}$ 內$)$

意即：

$$(n+1)!=n\times n!+(n-1)\times(n-1)!+\cdots\cdots+3\times 3!$$
$$+2\times 2!+1\times 1!+1$$

故　$1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

(c)任意整數 n 均可表示成以下的形式

$$n=K_1\cdot 2+a_1$$
$$K_1=K_2\cdot 3+a_2 \qquad 0\leq a_i\leq i$$
$$K_2=K_3\cdot 4+a_3$$
$$\vdots$$

由於 $K_1, K_2, K_3, \cdots\cdots$ 爲嚴格遞減序列，因此一定會有一個 $K_i=0$，則疊代結果可得

$n=a_1\times 1!+a_2\times 2!+a_3\times 3!+\cdots\cdots+a_i\times i!$

接著，證明此表示法的唯一性。假設整數 n 有兩種不同表示法

$n=a_1\times 1!+a_2\times 2!+a_3\times 3!+\cdots\cdots+a_i\times i!+\cdots$ 以及

$n=a_1'\times 1!+a_2'\times 2!+a_3'\times 3!+\cdots\cdots+a_i'\times i!+\cdots\cdots$

則 $0=(a_1-a_1')\times 1!+(a_2-a_2')\times 2!+(a_3-a_3')\times 3!+$ $\cdots\cdots+(a_i-a_i')\times i!+\cdots\cdots$

其中 $-1\leq(a_i-a_i')\leq 1$

應用(a)所得之結果可推得

$$a_1-a_1'=0,$$
$$a_2-a_2'=0,$$

$$a_3 - a_3' = 0,$$
$$\vdots$$
$$a_i - a_i' = 0$$
$$\vdots$$

故表示法唯一。

3. 明顯地 $P(n,n)=P(n,n-1)$ 而 $P(n,n)\neq P(n,n-2)$ 試用組合式討論說明以上二個關係式。

【解】：

n 個不同物體中取出一個作上特別記號，則有 $P(n,n-1)$ 種方式將剩餘的（$n-1$）個物體放入 n 個不同的格子。在每種方式中，此特別物體已別無選擇而必須放入唯一的空格子內，所以

$$P(n,n)=P(n,n-1)$$

若現在考慮將（$n-2$）個不同物體放入 n 個不同格子的方式有 $P(n,n-2)$ 種，而剩餘 2 個物體擺入 2 個空格子的方式有 2 種，所以

$$P(n,n)=2\times P(n,n-2)\neq P(n,n-2)$$

4. 試用組合式討論證明

$$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots\cdots+C(n,n)=2^n$$

【證明】：

自 n 個不同物體中取出幾個（也可能是 0 個或 n 個）的方式有 $\sum_{i=0}^{n} C(n,i)$ 種。

相同地，以乘法原理觀察的話，每個物體均有取與不取的選

擇，n 個物體的取法方式即為 2^n 。故

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,i)=2^n$$

5. (a)試證 $n\cdot C(n-1,r)=(r+1)\cdot C(n,r+1)$ 成立。

　這等式代表什麼組合意義呢？

(b)試證等式

$$C(n,1)+2\times C(n,2)+3\times C(n,3)+\cdots\cdots+n\times C(n,n)=n\times 2^{n-1}$$

【證明】：

(a) $$n\cdot C(n-1,r)=n\times\frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!}$$

$$=(r+1)\times\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!}$$

$$=(r+1)\cdot C(n,r+1)$$

假設有 n 個不同物體，考慮以下二種選取過程：

①選出二堆，其中一堆僅包含一物體，另一堆包含 r 物體，則先選一個，再選出 r 個，其選取方式有

$$n\cdot C(n-1,r)\text{ 種}$$

②自 n 物體中選取 $(r+1)$ 個，再由 $(r+1)$ 物體中選出一個，其方式有

$$C(n,r+1)\cdot(r+1)\text{ 種}$$

事實上，①、②二過程描述的是同一件事，所以

$$n\cdot C(n-1,r)=C(n,r+1)\cdot(r+1)$$

$$\text{(b)} \sum_{r=1}^{n} r \cdot C(n, r) = \sum_{r=0}^{n-1} (r+1) \cdot C(n, r+1)$$
$$= \sum_{r=0}^{n-1} n \cdot C(n-1, r)$$
$$= n \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1, r)$$
$$= n \cdot 2^{n-1} \quad \text{（得自習題 4）}$$

6. 給定一個 n 個，試證在

$$\begin{cases} K=\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2} & \text{若 } n \text{ 是奇數} \\ K=\dfrac{n}{2} & \text{若 } n \text{ 是偶數} \end{cases}$$

時，$C(n, K)$ 有極大值。

【證明】：

$$R(K)=\frac{C(n, K+1)}{C(n, K)}=\frac{n-K}{K+1}$$

因爲 $R(K)$ 爲 K 的單調遞減函數，其中 $0 \leq K \leq n-1$，且

$R(0)=n$，$R(n-1)=\dfrac{1}{n}$，所以

當 n 是奇數，$R\left(\dfrac{n-1}{2}\right)=1$

$\therefore K=\dfrac{n-1}{2}$，$K=\dfrac{n+1}{2}$ 時 $C\binom{n}{K}$ 有極大值。

當 n 是偶數，$R\left(\dfrac{n}{2}-1\right)=\dfrac{n+2}{n}$ 且 $R\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{n}{n+2}$

$\therefore K=\dfrac{n}{2}$ 時，$C(n, K)$ 有極大值。

7. (a)利用組合式討論證明 $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ 及 $\dfrac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n}$ 均是整數。

(b)試證 $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是整數。

【證明】：

(a)有 $2n$ 個物體包含 n 類，每類 2 個，則 $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ 即表示此 $2n$ 個物體可能的不同排列的個數。

$\dfrac{(3n)!}{2^n\cdot 3^n}$ 的討論方式同上。

(b)有 n^2 個物體包含 n 類，每類 n 個，則這些物體的不同排列方式有 $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^n}$ 種。

接著對這些排列方式加以分類，方式如下：若二種排列方式僅是物體命名上的不同而不同即視為一類。

$n=2$ 為例，1221 及 2112 的排列方式屬於同一類，如此一來，每類之內有 $n!$ 個排列，即共有

$\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 類，這必定是一個整數。

8. 自整數 1，2，3，4，……，1000 選出三個整數，則使選出整數的和可被 3 整除的選法有幾種。

【解】：

如同例 1-12，可得

$$2\times C(333,3)+C(334,3)+334(333)^2$$

9. (a)在 $2n$ 個物體中有 n 個是相同的，求自此 $2n$ 個物體中選取 n 個的方式有幾種。

(b)在（$3n+1$）個物體中有 n 個是相同的，求自此（$3n+1$）個物體中選取 n 個的方式有幾種。

【解】：

(a)若選出的物體中有 k 個不相同的，則其餘的（$n-k$）個是相同的，所以總共的選取方式有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \text{種}$$

(b)同上的討論

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2n+1}=2^{2n}$$

10. 自 n 個整數中選取二組整數，分別包含 k_1 及 k_2 個整數，其中 k_1 及 k_2 固定且 $k_1+k_2\leq n$，則有幾種選取方式可使得第一組內的最小整數比第二組內的最大整數還大。

【解】：

任意自 n 個整數中選取（k_1+k_2）個整數後，將它們分成合於題目要求的方式僅有一種，所以共有 $\binom{n}{k_1+k_2}$ 種方式。

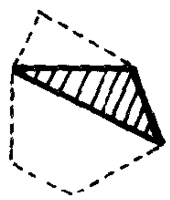
11. 假設在凸 n 邊形中，任意三條對角線不在內部共點。試求由 n 邊形的邊及對角線圍成的三角形有幾個。

【解】：

依據構成三角形的對角線交點及 n 邊形頂點的個數對三角形

分類。

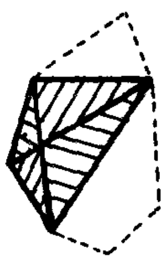
① 3 個頂點，沒有對角線交點



任 3 個頂點可決定一三角形

$\therefore \binom{n}{3}$ 個此類三角形

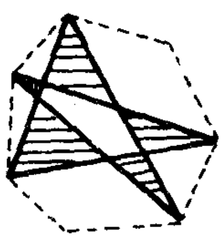
② 2 個頂點，1 個對角線交點



任 4 個頂點決定 4 個三角形

$\therefore 4\binom{n}{4}$ 個此類三角形

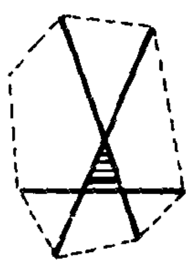
③ 1 個頂點，2 個對角線交點



任 5 個頂點可決定 5 個三角形

$\therefore 5\binom{n}{5}$ 個此類三角形

④ 沒有頂點，3 個對角線交點



由於沒有 3 條對角線共點，所以 6 個頂個頂點（3 條對角線）決定一三角形

$\therefore$ 有 $\binom{n}{6}$ 個此類三角形

由①～④可知共有 $\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+5\binom{n}{5}+\binom{n}{6}$ 個三角形。

12. 考慮一個由長度爲 n 的字 (word) 所成的集合，而每個字都是由字母 $\{0, 1, 2\}$ 組成。

(a)試證：0 出現偶數次的字共有 $\frac{(3^n+1)}{2}$ 個。

(b)證明等式

$$\binom{n}{0}\cdot 2^n+\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+\binom{n}{q}\cdot 2^{n-q}=\frac{3^n+1}{2}$$

其中若 n 爲偶數，則 $q=n$；若 n 爲奇數，則 $q=n-1$。

【證明】：

(a)包含一個0以上或一個1以上的字共有 3^n-1 個(即不包括 222⋯2) 由例 1-9 可知這些字的一半爲包含著偶數個 0，再算入包含零個 0 而不被算入的 222⋯⋯22。

$\therefore$ 包含偶數個 0 的字有 $\frac{3^n-1}{2}+1=\frac{3^n+1}{2}$ 個。

(b)包含 K 個 0 的字有

$$\binom{n}{K}2^{n-K} \text{ 個}$$

將自 0 到 n 的偶數 K 對應的 $\binom{n}{K}2^{n-K}$ 加起來即爲(a)之結果，故

$$\sum_{\substack{K=0 \\ K\text{ 是偶數}}}^{n}\binom{n}{K}2^{n-K}=\frac{3^n+1}{2}$$

13. 藉由一通訊管線輸送含有 m 個字母的字，於下列各條件下，求 n 個字母的字能傳送多少不同訊息 (message)？

(a)字母在同一訊息中可重複出現。

(b) m 個字母中的 l 個在一訊息內僅能做爲第一個和最後一個字母；其它字母則可在此一訊息內的任意位置任意重複。

(c) m 個字母中的 l 個在一訊息內僅能做爲第一個和最後一個字母；其它字母則可在此一訊息內除二端外的任意位置任意重複。

【解】：

(a) m^n

(b) $m^2\ (m-l\ )^{n-2}$

(c) $l^2\ (m-l\ )^{n-2}$

14. 有 m 個學生要使用五部教學儀器，若使用第一部及第二部儀器的學生數目相同，試問有幾種分配方式？

【解】：

$$\sum_{K}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{K}\binom{m-K}{K}3^{m-2K}$$

ok

15. 在 10^n 個 n 位數的整數中，若一整數可藉由另一整數的數字重新排列而得，則稱此二整數爲等價。

(a)在 10^n 個 n 位數的整數中，有多少個不等價？

(b)若 0 和 9 至多僅可出現一次，有多少不等價整數，當 $n \geqslant 2$。

【解】：

(a)即從 0 到 9 的 10 個數字中，可重複地選出 n 個數字而不考慮排列順序，所以有

$$\binom{n+10-1}{n}=\binom{n+9}{n}\text{ 個不等價整數}$$

(b)① 0 和 9 均不出現

② $\binom{n+8-1}{n}=\binom{n+7}{n}$

② 0或9有一出現

$$2\binom{(n-1)+8-1}{n-1}=2\binom{n+6}{n-1}$$

③ 0和9均出現

$$\binom{(n-2)+8-1}{n-2}=\binom{n+5}{n-2}$$

∴有 $\binom{n+7}{n}+2\binom{n+6}{n-1}+\binom{n+5}{n-2}$ 個不等價整數，使得1和9至多出現一次。

16. 字母：a，a，a，a，a，b，c，d，e 若將其排列，有多少個是 a 均不相鄰？

【解】：

$\{b, c, d, e\}$ 四個字母必須用以隔開5個 a，因此所求即爲 $\{b, c, d, e\}$ 的排列，即 $4!$。

17. (a) n 變數的布林函數定義如下：就每個二元的 n 位序列（共有 2^n 個）均給予0或1的值。試問可定義多少個布林函數？

(b)布林函數也可以更簡單的表格來表示，所有二元的 n 位序列及它們的值列出，如此的表格稱爲眞值表（truth table）。例如，下列表格爲三變數布林函數的眞值表：

3位的二元數	值
000	0
001	1
010	1
011	0
100	1
101	0
110	1
111	1

自對偶（self-dual）布林函數是一種布林函數，將其眞值表中的0與1互換所得的布林函數等於自己。

試問 n 變數的自對偶布林函數有多少個？

(c)對稱性布林函數是一種布林函數，將眞值表中的 n 行二元位數作排列後眞值表不變。

試問 n 變數的對稱性布林函數有多少個？

【解】：

(a) 2^{2^n}

(b)將總共 2^n 個的二元 n 位序列分成 2^{n-1} 類，而每一類則包含一個二元 n 位序列及其1系補數（1's complement）要建立自對偶函數，則在一類的二個二元 n 位序列的值設爲一樣。又由於此值的設定在於類與類之間互間獨立，根據乘法原理可知：

n 變數的布林函數可定義 $2^{2^{n-1}}$ 種不同的自對偶函數。

(c)若是含有一樣多個"1"的歸爲一類，則此 2^n 個二元 n 序列可分爲（$n+1$）類。對於任意二元 n 序列的數位（digit）作排列必可轉換成同類中的另一個，所以對稱性函數意即對於同類的二元 n 序列都設定同樣的值。