

非线性

积分方程

郭大钧 孙经先 著

山东科学技术出版社

非线性积分方程

郭大钧 孙经先 著

山东科学技术出版社

一九八七年·济南

非线性积分方程

郭大钧 孙经先 著

*

山东科学技术出版社出版

(济南市玉函路)

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本 18印张 396千字
1987年11月第1版 1987年11月第1次印刷
印数 1—1500

ISBN7—5331—0169—3/0·17

(平装)书号 13195·179 定价 5.40 元

序

非线性积分方程的研究，起源于本世纪 20~30 年代，如 П.С.Урысов〔1〕*，A. Hammerstein〔1〕。直到 50 年代中期，出现了 М.А.Красносельский〔1〕和 М.М.Вайнберг〔1〕。这是两部分别利用拓扑方法和变分方法来系统地研究 Fredholm 型非线性积分方程的优秀著作，直到现在还常被人们所引用。70 年代初出现的 R.К.Миллер〔1〕和 С.Сордунейану〔1〕，则是系统地研究 Volterra 型非线性积分方程的专著。其后，对于非线性积分方程的研究又有许多进展。例如，大范围变分学的出现，能获得非线性积分方程具有无穷多个解的新结果（如见 A. Ambrosetti 和 P. H. Rabinowitz〔1〕，郭大钧〔30〕）。

本书共分十章，前两章属于预备知识。第四章至第六章是利用拓扑方法研究 Fredholm 型非线性积分方程。第三章和第七章则是利用变分方法讨论 Fredholm 型非线性积分方程，其中，第三章使用的是古典变分学（极值理论），第七章使用的是大范围变分学（临界点理论）。第八章专门讨论 Volterra 型非线性积分方程，包括为 Volterra 型方程特有的最大解、最小解以及比较定理等。第九章研究 Banach 空间中的积分方程。最后，第十章给出了某些应用，主要是对常微分方程两点边值问题的

*方括号中所指文献可查阅书末参考文献。下同。

应用以及讨论了物理学、化学以及医学等学科中提出的某些非线性积分方程.书中包括了我本人以及我的学生孙经先、黄春朝、白锦东等人近年来所获得的许多结果.本书重点讨论使用拓扑方法和变分方法来研究非线性积分方程.关于利用解析方法来进行讨论,请参看 M. M. Вайнберг 和 В. А. Треногин [1]; 关于使用正锥、半序来进行研究,请参看郭大钧和 V. Lakshmikantham [1].为了帮助缺乏非线性泛函分析基础知识的读者阅读本书,我们在书尾写了一个附录,罗列了本书所要用到的一些基本概念和结论.

限于作者水平,书中不妥、错误之处在所难免,敬请读者批评指正.

郭大钧

1987年3月20日

于山东大学

目 录

| | | |
|------------|--|-----|
| 第一章 | 线性积分方程基础 | 1 |
| §1 | 积分方程和微分方程的关系..... | 1 |
| §2 | 逐次迭代法..... | 12 |
| §3 | Fredholm 理论..... | 19 |
| §4 | Hilbert-Schmidt理论..... | 46 |
| 第二章 | 非线性积分算子 | 73 |
| §1 | Orlicz空间..... | 73 |
| §2 | Немыцкий 算子..... | 81 |
| §3 | 非线性积分算子的全连续性..... | 104 |
| 第三章 | 非线性积分方程的可解性——变分方法 | 129 |
| §1 | 线性积分算子的分解..... | 129 |
| §2 | 具有正定核的Hammerstein型非线性积分方程的可解性..... | 142 |
| §3 | 具有拟正定核的Hammerstein型非线性积分方程的可解性..... | 154 |
| §4 | 具有一般对称核的Hammerstein型积分方程解的存在性和唯一性..... | 165 |
| 第四章 | 非线性积分方程的可解性——拓扑方法 | 177 |
| §1 | 可解性和唯一性..... | 177 |
| §2 | 角有界算子..... | 183 |
| §3 | 含有线性角有界算子的非线性积分方程..... | 194 |

| | | |
|------------|---------------------------------------|------------|
| §4 | 含有非线性角有界算子的非线性积分方程····· | 202 |
| §5 | 单调算子理论的应用····· | 209 |
| 第五章 | 非线性积分方程的多重解——拓扑方法 ····· | 216 |
| §1 | 拓扑度的计算····· | 216 |
| §2 | 线性积分算子的正特征函数····· | 235 |
| §3 | 次线性积分方程的正解····· | 246 |
| §4 | 渐近线性积分方程的正解····· | 255 |
| §5 | 超线性Hammerstein型积分方程的 非平凡解····· | 262 |
| §6 | 超线性Hammerstein型积分方程的特征值 与特征函数····· | 277 |
| §7 | 非线性积分方程的特征值与特征函数····· | 298 |
| §8 | 非线性积分方程组非平凡解的存在性····· | 309 |
| 第六章 | 非线性积分方程的分歧理论 ····· | 317 |
| §1 | 非线性积分方程的歧点····· | 317 |
| §2 | 某些准备知识····· | 332 |
| §3 | 非线性积分方程特征元的全局结构····· | 343 |
| 第七章 | 非线性积分方程的多重解——变分方法 ····· | 358 |
| §1 | Mountain Pass引理的应用····· | 358 |
| §2 | 非线性积分方程的特征函数····· | 368 |
| §3 | 非线性积分方程的歧点····· | 379 |
| §4 | Люстерник-Шнирельман理论的应用····· | 400 |
| 第八章 | Volterra型非线性积分方程 ····· | 411 |
| §1 | Volterra型非线性积分方程的可解性与 解的延拓····· | 411 |
| §2 | Tonelli方法····· | 424 |

| | | |
|-------------|---------------------------|------------|
| §3 | 连续相依性定理 | 433 |
| §4 | 最大解、最小解与比较定理 | 440 |
| §5 | 卷积型方程与Fourier变换方法 | 444 |
| §6 | 相容性与算子方法 | 458 |
| 第九章 | Banach空间中的积分方程 | 472 |
| §1 | Banach空间中的Fredholm非线性积分方程 | 472 |
| §2 | Banach空间中的Volterra非线性积分方程 | 483 |
| 第十章 | 非线性积分方程理论的应用 | 491 |
| §1 | 非线性常微分方程两点边值问题的可解性 | 491 |
| §2 | 非线性常微分方程两点边值问题的多重解 | 498 |
| §3 | 非线性常微分方程两点边值问题特征值理论的全局性定理 | 507 |
| §4 | 物理和其它自然科学领域中出现的非线性积分方程 | 522 |
| 附录 | 非线性泛函分析的某些基本知识 | 533 |
| §1 | 基本概念 | 533 |
| §2 | 拓扑度理论 | 538 |
| §3 | 非线性泛函分析中的变分方法 | 542 |
| §4 | 单调算子 | 545 |
| 参考文献 | | 548 |

第一章 线性积分方程基础

§1 积分方程和微分方程的关系

在理论和应用中，常用的线性积分方程主要有下列两种类型：

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y)u(y)dy, \quad (1.1)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)u(y)dy, \quad (1.2)$$

其中 $u(x)$ 是未知的实函数； $k(x, y)$ 是已知的二元实函数，通常称它是方程 (1.1) (方程 (1.2)) 的核； $f(x)$ 是已知的实函数，称它是方程的自由项（有时也称为是方程的非齐次项）。方程 (1.1) 叫做是第二类Volterra方程，方程 (1.2) 叫做是第二类Fredholm方程。

积分方程和微分方程之间，有着密切的联系。以二阶线性常微分方程为例，下面证明：二阶线性常微分方程的初值问题等价于Volterra积分方程 (1.1)，而二阶线性常微分方程两点边值问题则等价于Fredholm积分方程 (1.2)。

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u'' + A(x)u' + B(x)u = F(x), \\ u(a) = u_0, u'(a) = v_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $A(x)$, $B(x)$, $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数， $A(x)$ 在

$[a, b]$ 上有连续的导函数。

对 (1.3) 式从 a 到 x 积分, 得

$$u'(x) - v_0 = -A(x)u(x) - \int_a^x [B(y) - A'(y)]u(y)dy \\ + \int_a^x F(y)dy + A(a)u_0.$$

再积分一次, 得

$$u(x) - u_0 = - \int_a^x A(y)u(y)dy - \int_a^x dt \int_a^t [B(y) \\ - A'(y)]u(y)dy + \int_a^x dt \int_a^t F(y)dy \\ + [A(a)u_0 + v_0](x-a) \\ = - \int_a^x A(y)u(y)dy - \int_a^x (x-y)[B(y) \\ - A'(y)]u(y)dy + \int_a^x (x-y)F(y)dy \\ + [A(a)u_0 + v_0](x-a).$$

所以可得

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x, y)u(y)dy, \quad (1.4)$$

其中

$$k(x, y) = -\{A(y) + (x-y)[B(y) - A'(y)]\}, \\ f(x) = \int_a^x (x-y)F(y)dy + [A(a)u_0 + v_0] \\ (x-a) + u_0.$$

反之, 从 (1.4) 式微分两次, 即易得 (1.3) 式。因此初值问题 (1.3) 与线性 Volterra 积分方程 (1.4) 等价。

下边着重考察边值问题。令

$$Lu \equiv (p(x)u')' + q(x)u, \quad (1.5)$$

其中 (下面令 $I = [a, b]$)

$$p(x) \in C^1(I), \quad p(x) > 0 \quad (x \in I),$$

$$q(x) \in C(I); \quad (1.6)$$

$u(x) \in C^2(I)$. (1.5) 式所定义的算子 L 称为是 Sturm-Liouville 算子. 考察边值问题

$$-Lu = g(x) \quad (x \in I), \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} R_1(u) \equiv \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \\ R_2(u) \equiv \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

偏微分方程中许多方程的求解, 都可以归结为求解上述问题. 象常微分方程初值问题一样, 我们也试图将上述边值问题 (1.7)、(1.8) 转化成求解一个积分方程的问题. 下面先对所考虑的问题给出一个直观而粗糙的描述, 然后给出其严格的叙述.

为此, 我们需要使用所谓的 Delta 函数 $\delta(t)$. 它的定义如下: 当 $t \neq 0$ 时, $\delta(t) = 0$; 当 $t = 0$ 时, $\delta(0) = \infty$; 但在含点 $t = 0$ 的任何区间 J 上有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_J \delta(t) dt = 1.$$

Delta 函数的一条重要性质是:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(x-t) dt = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(t) \delta(x-t) dt = f(x),$$

其中 $f(t)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的任一连续函数. Delta 函数不能包含在古典的函数定义中, 但现代数学已经为 Delta 函数提供了严格的数学基础 (见夏道行等〔1〕).

利用 Delta 函数, 方程 (1.7) 可以改写为

$$-Lu = \int_a^b \delta(x-y) g(y) dy \quad (a < x < b).$$

如果把 \int_a^b 看作是和式, 并假定

$$-Lu = \delta(x-y) \quad (1.9)$$

在边值条件 (1.8) 下的解为 $k(x, y)$, 则根据线性微分方程迭加原理, 边值问题 (1.7)、(1.8) 的解就应该是

$$u(x) = \int_a^b k(x, y)g(y)dy. \quad (1.10)$$

可见, 在把边值问题 (1.7)、(1.8) 归结为 (1.10) 的过程中, $k(x, y)$ 的存在性是一个关键问题.

由于 $k(x, y)$ 是边值问题 (1.9)、(1.8) 的解, 于是有

$$\left[p(x) \frac{\partial k}{\partial x} \right]' + q(x)k(x, y) = -\delta(x-y), \quad (1.11)$$

$$R_1(k) = R_2(k) = 0. \quad (1.12)$$

根据 $\delta(t)$ 的定义, $k(x, y)$ 应满足

$$\left[p(x) \frac{\partial k}{\partial x} \right]' + q(x)k(x, y) = 0, \quad (1.13)$$

当 $a \leq x < y$ 或 $y < x \leq b$ 时,

此外, 对任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \left[p(x) \frac{\partial k}{\partial x} \right]' dx + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} q(x)k(x, y) dx \\ & = - \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta(x-y) dx, \end{aligned}$$

于是

$$p(x) \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} q(x)k(x, y) dx = -1.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则得

$$p(y)[k'_x(y+0, y) - k'_x(y-0, y)] = -1.$$

因此, $k(x, y)$ 又满足

$$k'_x(y+0, y) - k'_x(y-0, y) = -\frac{1}{p(y)}. \quad (1.14)$$

下面严格证明：确实存在满足 (1.12)、(1.13)、(1.14) 三式的函数 $k(x, y)$ ，使得如果 $u(x)$ 由 (1.10) 式确定，则 $u(x)$ 必是边值问题 (1.7)、(1.8) 的解。为此，先证明下列引理。

引理1.1 设 (1.6) 式成立，并且

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \quad (1.15)$$

又设边值问题

$$Lu = 0, \quad R_1(u) = R_2(u) = 0 \quad (1.16)$$

仅有零解。则必存在两个函数 $u(x)$ 、 $v(x)$ ，满足

(i) $u(x) \in C^2(I)$, $v(x) \in C^2(I)$;

(ii) $Lu(x) \equiv 0$, $R_1(u) = 0$;

(iii) $Lv(x) \equiv 0$, $R_2(v) = 0$;

(iv) $u(x)$ 与 $v(x)$ 线性无关;

(v) $p(x)(uv' - u'v) \equiv -1$.

证 设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是方程 $Lu = 0$ 的一个基本解组。令

$$u = u_1(x)R_1(u_2) - u_2(x)R_1(u_1), \quad (1.17)$$

$$v = u_1(x)R_2(u_2) - u_2(x)R_2(u_1). \quad (1.18)$$

显然边值问题 (1.16) 的解为

$$u^* = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

其中 c_1 和 c_2 由

$$c_1 R_i(u_1) + c_2 R_i(u_2) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

确定。因为边值问题仅有零解，故必有

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.19)$$

所以 $R_1(u_1)$ 与 $R_1(u_2)$ 必不同时为0. 又因为 u_1 和 u_2 线性无关, 所以 $u(x) \neq 0$. 同理 $v(x) \neq 0$.

显然, 由(1.17)式及(1.18)式定义的 $u(x)$ 及 $v(x)$ 满足引理的要求(i)、(ii)、(iii). 下证 u 与 v 线性无关. 倘若不然, 则存在常数 $c \neq 0$, 使 $v = cu$. 但因 u 满足引理的要求(ii), 故 $R_1(v) = cR_1(u) = 0$. 又 $R_2(v) = 0$, 这表明 v 是边值问题(1.16)的解. 此与该边值问题仅有零解矛盾. 故 u 与 v 线性无关.

直接验证知对任意的 $u \in C^2(I)$, $v \in C^2(I)$, 都有

$$[p(x)(u'v - v'u)]' = vLu - uLv. \quad (1.20)$$

因此, 若 u, v 由(1.17)、(1.18)式确定, 则由它们满足引理要求(ii)、(iii)知, 必有

$$[p(x)(u'v - v'u)]' = 0.$$

从而存在常数 c , 使

$$p(x)(u'v - v'u) = c. \quad (1.21)$$

但因 $p(x) > 0$, 并且 $u'v - v'u \neq 0$ (因为 $u'v - v'u$ 恰好是 u 和 v 的Wronsky行列式, u, v 都是 $Lu = 0$ 的解, 并且 u 与 v 线性无关, 根据常微分方程理论, 必有 $u'v - v'u \neq 0$), 故 $c \neq 0$. 从而 $\frac{u}{c}$ 和 v 满足引理的全部要求. 证完.

$$\begin{aligned} \text{令} \quad Q &= I \times I, \\ Q_1 &= \{(x, y) \in Q \mid a \leq x \leq y \leq b\}, \\ Q_2 &= \{(x, y) \in Q \mid a \leq y \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

定理1.2 设(1.6)、(1.15)式成立, 并且边值问题(1.16)仅有零解. 则必存在唯一的具备下列性质的函数 $k(x, y)$:

- (i) $k(x, y)$ 在 Q 上有定义, 并且连续;
- (ii) $k(x, y)$ 是对称的, 即 $k(x, y) = k(y, x)$;
- (iii) $k(x, y)$ 在 Q_1 和 Q_2 上有连续的偏导数 k'_x, k''_{xx} ;
- (iv) 对固定的 $y \in I$, $k(x, y)$ 满足

$$Lk(x, y) = 0, \text{ 当 } x \neq y, x \in I \text{ 时,}$$

$$R_1(k) = R_2(k) = 0, \text{ 当 } y \in (a, b) \text{ 时;}$$

- (v) 当 $x = y$ 时 k'_x 有第一类间断点, 并且

$$k'_x(y+0, y) - k'_x(y-0, y) = -\frac{1}{p(y)},$$

$$y \in (a, b). \quad (1.22)$$

证 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 满足引理1.1的全部要求. 为使 $k(x, y)$ 具备性质 (iv) 中的 $Lk(x, y) = 0$ ($x \neq y$), 则它必具有下列形式:

$$k(x, y) = \begin{cases} A_1(y)u(x) + B_1(y)v(x), & \text{当 } a \leq x < y \text{ 时,} \\ A_2(y)u(x) + B_2(y)v(x), & \text{当 } y < x \leq b \text{ 时,} \end{cases} \quad (1.23)$$

其中 $A_i(y), B_i(y)$ ($i=1, 2$) 是待定系数. 为使 $k(x, y)$ 满足性质 (iv) 中的 $R_1(k) = R_2(k) = 0$ ($y \in (a, b)$), 必须有

$$R_1(k) \equiv A_1(y)R_1(u) + B_1(y)R_1(v) = 0,$$

$$R_2(k) \equiv A_2(y)R_2(u) + B_2(y)R_2(v) = 0.$$

由引理1.1知, $R_1(u) = 0, R_2(v) = 0$; 于是为保证边值问题 (1.16) 仅有零解, 必有 $R_1(v) \neq 0, R_2(u) \neq 0$ (参考与 (1.19) 式有关的证明), 从而 $B_1(y) = A_2(y) = 0$. 因此, $k(x, y)$ 应具有下列形式

$$k(x, y) = \begin{cases} A_1(y)u(x), & \text{当 } a \leq x < y \text{ 时,} \\ B_2(y)v(x), & \text{当 } y < x \leq b \text{ 时.} \end{cases}$$

进一步, 为使 $k(x, y)$ 具备性质 (i)、(v), 则 $A_1(y)$ 和 $B_2(y)$ 应满足

$$\begin{aligned} A_1(y)u(y) - B_2(y)v(y) &= 0, \\ A_1(y)u'(y) - B_2(y)v'(y) &= \frac{1}{p(y)}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} A_1(y) &= -\frac{v(y)}{(uv' - u'v)p(y)}, \\ B_2(y) &= -\frac{u(y)}{(uv' - u'v)p(y)}. \end{aligned}$$

利用引理1.1结论 (v), 即知 $A_1(y) = v(y)$, $B_2(y) = u(y)$.

因此,

$$k(x, y) = \begin{cases} u(x)v(y), & \text{当 } a \leq x \leq y \text{ 时,} \\ v(x)u(y), & \text{当 } y \leq x \leq b \text{ 时.} \end{cases} \quad (1.24)$$

由 (1.24) 定义的 $k(x, y)$ 显然满足性质 (ii)、(iii). 由以上证明可以看出, $k(x, y)$ 是唯一确定的. 证完.

定义1.3 满足定理1.2性质 (i)~(v) 的函数 $k(x, y)$, 称为是相应于边值问题 (1.16) 的Green函数.

定理1.4 设 (1.6)、(1.15) 式成立, 并且边值问题 (1.16) 仅有零解, $k(x, y)$ 是相应于边值问题 (1.16) Green函数. 设 $g(x) \in C(I)$. 则下列结论成立:

- (i) 边值问题 (1.7)、(1.8) 存在唯一的解;
- (ii) 若函数 $v(x)$ 由

$$v(x) = \int_a^b k(x, y)g(y)dy \quad (1.25)$$

确定, 则必有 $v(x) \in C^2(I)$, 并且 $v(x)$ 是边值问题 (1.7)、(1.8) 的 (唯一) 解;

(iii) 若 $v(x) \in C^2(I)$ 是边值问题 (1.7)、(1.8) 的解, 则 $v(x)$ 必满足 (1.25) 式.

证 显然, 仅需证明结论 (i)、(ii), (iii) 是 (i)、(ii) 的推论. 先证 (i). 设方程 (1.7) 的一个特解为 u^* , 则方程 (1.7) 的一般解为

$$u = u^* + c_1 u_1 + c_2 u_2, \quad (1.26)$$

其中 u_1 和 u_2 是 $Lu = 0$ 的一基本解组. 要使 (1.26) 式定义的 u 满足边界条件 (1.8), 则 c_1 和 c_2 必须且仅须满足

$$R_i(u^*) + c_1 R_i(u_1) + c_2 R_i(u_2) = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.27)$$

而方程组 (1.27) 存在唯一解 (亦即边值问题 (1.7)、(1.8) 存在唯一解) 的充要条件是

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.28)$$

同理, 边值问题 (1.16) 仅有零解的充要条件也是 (1.28) 式成立. 由于定理已假定边值问题 (1.16) 仅有零解, 故结论 (i) 成立.

再证结论 (ii). (1.25) 式可以写成

$$v(x) = \int_a^x k(x, y)g(y)dy + \int_x^b k(x, y)g(y)dy.$$

对上式微分一次, 得

$$\begin{aligned} v'(x) &= k(x, x)g(x) + \int_a^x k'_x(x, y)g(y)dy \\ &\quad - k(x, x)g(x) + \int_x^b k'_x(x, y)g(y)dy \\ &= \int_a^b k'_x(x, y)g(y)dy. \end{aligned} \quad (1.29)$$

再对 (1.29) 式微分一次, 并注意到定理 1.2 的性质 (v), 得