非线性
积分方程

郭大钧　孙经先　著

山东科学技术出版社

非线性积分方程

郭大钧　孙经先　著

山东科学技术出版社
一九八七年·济南

非线性积分方程

郭大钧　孙经先 著

*

山东科学技术出版社 出版
(济南市玉函路)
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷

*

850×1168毫米32开本　18印张　396千字
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
印数 1—1500
ISBN7—5331—0169—3/O·17
(平装)书号 13195·179　定价 5.40 元

序

非线性积分方程的研究，起源于本世纪20～30年代，如П.С.Урысон〔1〕*，A. Hammerstein〔1〕. 直到50年代中期，出现了M.A.Красносельский〔1〕和M.M.Вайнберг〔1〕. 这是两部分别利用拓扑方法和变分方法来系统地研究Fredholm型非线性积分方程的优秀著作，直到现在还常被人们所引用.70年代初出现的R.K.Miller〔1〕和C.Corduneanu〔1〕，则是系统地研究Volterra型非线性积分方程的专著. 其后，对于非线性积分方程的研究又有许多进展. 例如，大范围变分学的出现，能获得非线性积分方程具有无穷多个解的新结果（如见A.Ambrosetti和P.H.Rabinowitz〔1〕，郭大钧〔30〕）.

本书共分十章，前两章属于预备知识. 第四章至第六章是利用拓扑方法研究Fredholm型非线性积分方程.第三章和第七章则是利用变分方法讨论Fredholm型非线性积分方程，其中，第三章使用的是古典变分学（极值理论），第七章使用的是大范围变分学（临界点理论）. 第八章专门讨论Volterra型非线性积分方程，包括为Volterra型方程特有的最大解、最小解以及比较定理等.第九章研究Banach空间中的积分方程.最后，第十章给出了某些应用，主要是对常微分方程两点边值问题的

---

*方括号中所指文献可查阅书末参考文献。下同。

应用以及讨论了物理学、化学以及医学等学科中提出的某些非线性积分方程.书中包括了我本人以及我的学生孙经先、黄春朝、白锦东等人近年来所获得的许多结果．本书重点讨论使用拓扑方法和变分方法来研究非线性积分方程．关于利用解析方法来进行讨论，请参看 M.M.Вайнберг 和 B. A. Треногин〔1〕；关于使用正锥、半序来进行研究，请参看郭大钧和 V. Lakshmikantham〔1〕.为了帮助缺乏非线性泛函分析基础知识的读者阅读本书，我们在书尾写了一个附录，罗列了本书所要用到的一些基本概念和结论。

限于作者水平，书中不妥、错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

郭大钧

1987年3月20日

于山东大学

目　　录

第一章　线性积分方程基础

§1　积分方程和微分方程的关系

在理论和应用中，常用的线性积分方程主要有下列两种类型：

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,\ y)u(y)dy, \tag{1.1}$$

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ y)u(y)dy, \tag{1.2}$$

其中 $u(x)$ 是未知的实函数；$k(x,\ y)$ 是已知的二元实函数，通常称它是方程（1.1）（方程（1.2））的核；$f(x)$ 是已知的实函数，称它是方程的自由项（有时也称为是方程的非齐次项）。方程（1.1）叫做是第二类Volterra方程，方程（1.2）叫做是第二类Fredholm方程。

积分方程和微分方程之间，有着密切的联系。以二阶线性常微分方程为例，下面证明：二阶线性常微分方程的初值问题等价于Volterra积分方程（1.1），而二阶线性常微分方程两点边值问题则等价于Fredholm积分方程（1.2）。

首先考察初值问题

$$\begin{cases} u''+A(x)u'+B(x)u=F(x), \\ u(a)=u_0,\ u'(a)=v_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中$A(x)$，$B(x)$，$F(x)$是〔a，b〕上的连续函数，$A(x)$ 在

〔a，b〕上有连续的导函数。

对（1.3）式从a到x积分，得

$$u'(x)-v_0=-A(x)u(x)-\int_a^x[B(y)-A'(y)]u(y)dy$$

$$+\int_a^x F(y)dy+A(a)u.$$

再积分一次，得

$$\begin{aligned}u(x)-u_0=&-\int_a^x A(y)u(y)\,dy-\int_a^x dt\int_a^t[B(y)\\&-A'(y)]u(y)dy+\int_a^x dt\int_a^t F(y)dy\\&+[A(a)u_0+v_0](x-a)\\=&-\int_a^x A(y)u(y)dy-\int_a^x(x-y)[B(y)\\&-A'(y)]u(y)dy+\int_a^x(x-y)F(y)dy\\&+[A(a)u_0+v_0](x-a).\end{aligned}$$

所以可得

$$u(x)=f(x)+\int_a^x k(x,\ y)u(y)dy, \tag{1.4}$$

其中

$$k(x,\ y)=-\{A(y)+(x-y)[B(y)-A'(y)]\},$$

$$f(x)=\int_a^x(x-y)F(y)dy+[A(a)u_0+v_0]$$

$$(x-a)+u_0.$$

反之，从（1.4）式微分两次，即易得（1.3）式．因此初值问题（1.3）与线性Volterra积分方程（1.4）等价．

下边着重考察边值问题．令

$$Lu\equiv(p(x)u')'+q(x)u, \tag{1.5}$$

其中（下面令$I=[a,\ b]$）

$$p(x)\in C^1(I),\ p(x)>0\ (x\in I),$$

$$q(x)\in C(I); \qquad (1.6)$$

$u(x)\in C^2(I)$.(1.5)式所定义的算子L称为是Sturm-Liouville算子．考察边值问题

$$-Lu=g(x) \quad (x\in I), \qquad (1.7)$$

$$\begin{cases} R_1(u)\equiv\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=0, \\ R_2(u)\equiv\beta_1 u(b)+\beta_2 u'(b)=0. \end{cases} \qquad (1.8)$$

偏微分方程中许多方程的求解，都可以归结为求解上述问题．象常微分方程初值问题一样，我们也试图将上述边值问题（1.7）、（1.8）转化成求解一个积分方程的问题．下面先对所考虑的问题给出一个直观而粗糙的描述，然后给出其严格的叙述．

为此，我们需要使用所谓的Delta 函数 $\delta(t)$．它的定义如下：当$t\neq 0$时，$\delta(t)=0$；当$t=0$时，$\delta(0)=\infty$；但在含点$t=0$的任何区间J上有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_J\delta(t)dt=1.$$

Delta函数的一条重要性质是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(x-t)dt=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}f(t)\delta(x-t)dt=f(x),$$

其中$f(t)$是（$-\infty$，$+\infty$）上的任一连续函数．Delta 函数不能包含在古典的函数定义中，但现代数学已经为 Delta 函数提供了严格的数学基础（见夏道行等〔1〕）．

利用Delta函数，方程（1.7）可以改写为

$$-Lu=\int_a^b\delta(x-y)g(y)dy \qquad (a<x<b).$$

如果把$\int_a^b$看作是和式，并假定

$$-Lu=\delta(x-y) \tag{1.9}$$

在边值条件（1.8）下的解为$k(x, y)$，则根据线性微分方程迭加原理，边值问题（1.7）、（1.8）的解就应该是

$$u(x)=\int_a^b k(x, y)g(y)dy. \tag{1.10}$$

可见，在把边值问题（1.7）、（1.8）归结为（1.10）的过程中，$k(x, y)$ 的存在性是一个关键问题。

由于 $k(x, y)$ 是边值问题（1.9）、（1.8）的解，于是有

$$\left[p(x)\frac{\partial k}{\partial x}\right]'+q(x)k(x, y)=-\delta(x-y), \tag{1.11}$$

$$R_1(k)=R_2(k)=0. \tag{1.12}$$

根据$\delta(t)$的定义，$k(x, y)$ 应满足

$$\left[p(x)\frac{\partial k}{\partial x}\right]'+q(x)k(x, y)=0, \quad \text{当} a\leqslant x<y \text{或} y<x\leqslant b \text{时}. \tag{1.13}$$

此外，对任给$\varepsilon>0$，有

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\left[p(x)\frac{\partial k}{\partial x}\right]'dx+\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}q(x)k(x, y)dx$$

$$=-\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\delta(x-y)dx,$$

于是

$$p(x)\frac{\partial k}{\partial x}\bigg|_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}+\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}q(x)k(x, y)dx=-1.$$

令$\varepsilon\to 0$，则得

$$p(y)[k'_x(y+0, y)-k'_x(y-0, y)]=-1.$$

因此，$k(x,y)$又满足

$$k'_x(y+0,\ y)-k'_x(y-0,\ y)=-\frac{1}{p(y)}. \qquad (1.14)$$

下面严格证明：确实存在满足（1.12）、（1.13）、（1.14）三式的函数 $k(x,\ y)$，使得如果 $u(x)$ 由（1.10）式确定，则 $u(x)$ 必是边值问题（1.7）、（1.8）的解．为此，先证明下列引理．

引理1.1 设（1.6）式成立，并且

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2>0,\ \beta_1^2+\beta_2^2>0. \qquad (1.15)$$

又设边值问题

$$Lu=0,\ R_1(u)=R_2(u)=0 \qquad (1.16)$$

仅有零解．则必存在两个函数 $u(x)$，$v(x)$，满足

(i) $u(x)\in C^2(I)$，$v(x)\in C^2(I)$；

(ii) $Lu(x)\equiv 0$，$R_1(u)=0$；

(iii) $Lv(x)\equiv 0$，$R_2(v)=0$；

(iv) $u(x)$ 与 $v(x)$ 线性无关；

(v) $p(x)(uv'-u'v)\equiv -1$．

证 设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$ 是方程 $Lu=0$ 的一个基本解组．令

$$u=u_1(x)R_1(u_2)-u_2(x)R_1(u_1), \qquad (1.17)$$

$$v=u_1(x)R_2(u_2)-u_2(x)R_2(u_1). \qquad (1.18)$$

显然边值问题（1.16）的解为

$$u^*=c_1u_1+c_2u_2,$$

其中 c_1 和 c_2 由

$$c_1R_i(u_1)+c_2R_i(u_2)=0 \quad (i=1,\ 2)$$

确定．因为边值问题仅有零解，故必有

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (1.19)$$

所以$R_1(u_1)$与$R_1(u_2)$必不同时为0．又因为u_1和u_2线性无关，所以$u(x)\neq 0$．同理$v(x)\neq 0$．

显然，由（1.17）式及（1.18）式定义的$u(x)$及$v(x)$满足引理的要求（i）、（ii）、（iii）．下证u与v线性无关．假若不然，则存在常数$c\neq 0$，使$v=cu$．但因u满足引理的要求（ii），故$R_1(v)=cR_1(u)=0$．又$R_2(v)=0$，这表明v是边值问题（1.16）的解．此与该边值问题仅有零解矛盾．故u与v线性无关．

直接验证知对任意的$u\in C^2(I)$，$v\in C^2(I)$，都有

$$[p(x)(u'v-v'u)]'=vLu-uLv. \tag{1.20}$$

因此，若u，v由（1.17）、（1.18）式确定，则由它们满足引理要求（ii）、（iii）知，必有

$$[p(x)(u'v-v'u)]'=0.$$

从而存在常数c，使

$$p(x)(u'v-v'u)=c. \tag{1.21}$$

但因$p(x)>0$，并且$u'v-v'u\neq 0$（因为$u'v-v'u$恰好是u和v的Wronsky行列式，u，v都是$Lu=0$的解，并且u与v线性无关，根据常微分方程理论，必有$u'v-v'u\neq 0$），故$c\neq 0$．从而$\frac{u}{c}$和v满足引理的全部要求．证完．

令
$$Q=I\times I,$$
$$Q_1=\{(x,\ y)\in Q\,|\,a\leqslant x\leqslant y\leqslant b\},$$
$$Q_2=\{(x,\ y)\in Q\,|\,a\leqslant y\leqslant x\leqslant b\}.$$

定理1.2 设（1.6）、（1.15）式成立，并且边值问题（1.16）仅有零解．则必存在唯一的具备下列性质的函数$k(x,\ y)$：

(i) $k(x,y)$在Q上有定义，并且连续；

(ii) $k(x,y)$是对称的，即$k(x,y)=k(y,x)$；

(iii) $k(x,y)$在Q_1和Q_2上有连续的偏导数k'_x，k''_{xx}；

(iv) 对固定的$y\in I$，$k(x,y)$满足

$Lk(x,y)=0$，当$x\neq y$，$x\in I$时，

$R_1(k)=R_2(k)=0$，当 $y\in(a,\ b)$ 时；

(v) 当$x=y$时k'_x 有第一类间断点，并且

$$k'_x(y+0,y)-k'_x(y-0,y)=-\frac{1}{p(y)},\quad y\in(a,b). \qquad (1.22)$$

证 设$u(x)$ 和$v(x)$ 满足引理1.1的全部要求．为使 $k(x,y)$ 具备性质（iv）中的 $Lk(x,\ y)=0\ (x\neq y)$，则它必具有下列形式：

$$k(x,\ y)=\begin{cases}A_1(y)u(x)+B_1(y)v(x), & \text{当}a\leqslant x<y\text{时}, \\ A_2(y)u(x)+B_2(y)v(x), & \text{当}y<x\leqslant b\text{时},\end{cases} \qquad (1.23)$$

其中$A_i(y)$，$B_i(y)$（$i=1$，2）是待定系数．为使$k(x,\ y)$ 满足性质（iv）中的$R_1(k)=R_2(k)=0$ （$y\in(a,b)$），必须有

$$R_1(k)\equiv A_1(y)R_1(u)+B_1(y)R_1(v)=0,$$

$$R_2(k)\equiv A_2(y)R_2(u)+B_2(y)R_2(v)=0.$$

由引理1.1知，$R_1(u)=0$，$R_2(v)=0$；于是为保证边值问题（1.16）仅有零解，必有 $R_1(v)\neq 0$，$R_2(u)\neq 0$（参考与（1.19）式有关的证明），从而$B_1(y)=A_2(y)=0$．因此，$k(x,y)$ 应具有下列形式

$$k(x,y)=\begin{cases}A_1(y)u(x), & \text{当}a\leqslant x<y\text{时}, \\ B_2(y)v(x), & \text{当}y<x\leqslant b\text{时}.\end{cases}$$

进一步，为使 $k(x,\ y)$ 具备性质（i）、（v），则 $A_1(y)$ 和 $B_2(y)$ 应满足

$$A_1(y)u(y)-B_2(y)v(y)=0,$$

$$A_1(y)u'(y)-B_2(y)v'(y)=\frac{1}{p(y)}.$$

因此，

$$A_1(y)=-\frac{v(y)}{(uv'-u'v)p(y)},$$

$$B_2(y)=-\frac{u(y)}{(uv'-u'v)p(y)}.$$

利用引理1.1结论（v），即知 $A_1(y)=v(y)$，$B_2(y)=u(y)$。因此，

$$k(x,y)=\begin{cases}u(x)v(y), & \text{当} a\leqslant x\leqslant y \text{时},\\ v(x)u(y), & \text{当} y\leqslant x\leqslant b \text{时}.\end{cases} \tag{1.24}$$

由（1.24）定义的 $k(x,\ y)$ 显然满足性质（ii）、（iii）。由以上证明可以看出，$k(x,y)$ 是唯一确定的．证完．

定义1.3 满足定理1.2性质（i）～（v）的函数 $k(x,\ y)$，称为是相应于边值问题（1.16）的Green函数．

定理1.4 设（1.6）、（1.15）式成立，并且边值问题（1.16）仅有零解，$k(x,\ y)$ 是相应于边值问题(1.16)Green函数．设 $g(x)\in C(I)$．则下列结论成立：

（i）边值问题（1.7）、（1.8）存在唯一的解；

（ii）若函数 $v(x)$ 由

$$v(x)=\int_a^b k(x,\ y)g(y)dy \tag{1.25}$$

确定，则必有 $v(x)\in C^2(I)$，并且 $v(x)$ 是边值问题（1.7）、（1.8）的（唯一）解；

（iii）若$v(x)\in C^2(I)$是边值问题（1.7)、(1.8）的解，则$v(x)$必满足（1.25）式.

证 显然，仅需证明结论（i）、(ii)，（iii）是（i）、(ii）的推论．先证（i）．设方程（1.7）的一个特解为u^*，则方程（1.7）的一般解为

$$u=u^*+c_1u_1+c_2u_2, \tag{1.26}$$

其中u_1和u_2是$Lu=0$的一基本解组．要使（1.26）式定义的u满足边界条件（1.8)，则c_1和c_2必须且仅须满足

$$R_i(u^*)+c_1R_i(u_1)+c_2R_i(u_2)=0 \quad (i=1,2) \tag{1.27}$$

而方程组（1.27）存在唯一解（亦即边值问题（1.7)、(1.8）存在唯一解）的充要条件是

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_1(u_1) & R_1(u_2) \\ R_2(u_1) & R_2(u_2) \end{vmatrix}\neq 0. \tag{1.28}$$

同理，边值问题（1.16)仅有零解的充要条件也是(1.28)式成立．由于定理已假定边值问题（1.16）仅有零解，故结论（i）成立．

再证结论（ii）．（1.25）式可以写成

$$v(x)=\int_a^x k(x,y)g(y)dy+\int_x^b k(x,y)g(y)dy.$$

对上式微分一次，得

$$\begin{aligned} v'(x)=&k(x,x)g(x)+\int_a^x k'_x(x,y)g(y)dy \\ &-k(x,x)g(x)+\int_x^b k'_x(x,y)g(y)dy \\ =&\int_a^b k'_x(x,y)g(y)dy. \end{aligned} \tag{1.29}$$

再对（1.29）式微分一次，并注意到定理1.2的性质(v)，得