恒星振动理论

黄润乾　李焱　编著

科学出版社

恒星振动理论

黄润乾 李 焱 编著

国家自然科学基金资助项目

科 学 出 版 社

1990

内容简介

本书系统地阐述了恒星振动的基本理论，详细地介绍了恒星径向振动和非径向振动模型的计算方法以及引起恒星发生振动的各种机理，还介绍了恒星振动理论在各类变星中的应用．书中对太阳振动也作了详细介绍．

本书可供天体物理工作者和研究生阅读，也可供有关专业高年级大学生阅读参考．

恒星振动理论

黄润乾　李　焱　编著

责任编辑　方开文

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1990年9月第一版　开本：787×1092　1/32

1990年9月第一次印刷　印张：11　5/8

印数：001—450　字数：262 000

ISBN 7-03-001666-1/P·322

定价：12.90元

前　言

在众多的恒星之中，有相当数量的星是变星．它们的光度、颜色、视向速度、光谱等等都会发生周期性的变化．恒星振动理论是解释变星的基本理论，是恒星物理的重要组成部分．它从恒星结构和动力学性质出发，利用扰动理论研究恒星在什么情况下会发生振动，以及振动的性质和周期等问题．几十年来它已从最初的恒星径向振动理论发展到非径向振动理论，成功地解释了诸如造父变星、天琴座RR型变星、白矮变星、快速脉动的Ap型星等许多类型的变星，以及像太阳5分钟振动等许多复杂的现象．近年来恒星振动理论受到天体物理界的高度重视，发展十分迅速．这一方面是因为近代观测技术迅速发展，许多以前不知道的变星和振动现象被发现，促使理论的进一步发展，另一方面由于恒星振动理论和观测的发展又开辟了一条了解恒星内部结构和动力学性质的途径．它已成为恒星结构和演化理论的验证和补充．本书的编写，旨在将恒星振动基本理论，以及近年来取得的一些主要进展介绍给我国天体物理工作者．作者希望，本书的出版能引起天体物理界有更多的人重视恒星和太阳振动的研究．

本书共有八章．其中第一至第五章以及第六章的一、二两节由黄润乾编写．第六章的三、四节以及第七、八两章由李焱编写．

由于作者水平所限，书中错误和不当之处必然不少，敬请读者批评指正．

目　　录

第一章　张量与场论

恒星内部的物质运动遵循流体力学的基本方程组而，在流体力学中张量与场论运算被广泛地采用．一方面是因为若采用张量表示法进行运算，流体力学方程能够比较简单明了，另一方面则因为有些物理量(如流体中的应力和应变等)本身就是张量．因此，了解张量和掌握张量与场论运算是很必要的．

在笛卡儿直角坐标系中定义的张量称为笛卡儿张量．在任意曲线坐标系中定义的张量称为普遍张量．本章仅研究笛卡儿张量．这对于研究流体力学已经够用了．

§1．张量的定义

我们通过研究单位矢量的坐标变换和一般矢量的坐标变换逐步地引入张量的定义．

1．单位矢量的坐标变换

在研究笛卡儿坐标系(x_1, x_2, x_3)中的单位矢量的坐标变换之前，先需引进以下几个符号：

(1) a_i 表示一个矢量．i 是自由指标，可取1，2，3．

(2) 约定求和法则．我们约定在同一项中如果有两个自由指标相同，就表示要对这个指标从1到3求和．例如，

$$a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

(3) 符号 δ_{ij} 定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 当\ i\neq j\ 时\\ 1, & 当\ i=j\ 时\end{cases}$$

例如$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$, $\boldsymbol{e}_i$ 是正交坐标轴 q_i 的单位矢量. δ_{ij} 称为克朗内克(Kronecker)δ. 现在我们来考虑一笛卡儿坐标系(x_1, x_2, x_3),经过移动和转动后变为(x'_1, x'_2, x'_3)(见图 1.1). 图 1.1 中的 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}'_i$ 为两坐标系中的单位矢量. 在 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}'_i$ 之间存在一定的函数关系. 根据任何一个矢量可以用三个线性无关的矢量来表示,于是有

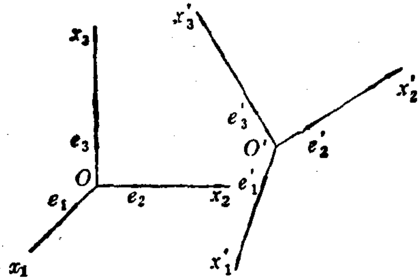

图 1.1

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}'_1=\alpha_{11}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{12}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{13}\boldsymbol{e}_3=\alpha_{1j}\boldsymbol{e}_j\\ \boldsymbol{e}'_2=\alpha_{21}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{22}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{23}\boldsymbol{e}_3=\alpha_{2j}\boldsymbol{e}_j\\ \boldsymbol{e}'_3=\alpha_{31}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{32}\boldsymbol{e}_2+\alpha_{33}\boldsymbol{e}_3=\alpha_{3j}\boldsymbol{e}_j\end{cases} \tag{1.1.1}$$

上式中的 α_{ij} 是两坐标系中不同坐标轴之间夹角的余弦,即

$$\alpha_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.2}$$

我们将(1.1.1)中的三个式子用一个简单的式子表示为

$$\boldsymbol{e}'_i=\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.3}$$

这就是单位矢量的坐标变换关系. 现在讨论上式中的 α_{ij} 如何确定. 根据 $\boldsymbol{e}'_i$ 是笛卡儿坐标系中的单位矢量可得

$$\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j=\delta_{ij} \tag{1.1.4}$$

另一方面,由于

$$e_i' \cdot e_j' = \alpha_{ir} e_r \cdot \alpha_{js} e_s = \alpha_{ir}\alpha_{js} e_r \cdot e_s = \alpha_{ir}\alpha_{js}\delta_{rs} = \alpha_{is}\alpha_{js} \tag{1.1.5}$$

由(1.1.4)和(1.1.5)两式可得

$$\alpha_{is}\alpha_{js} = \delta_{ij} \tag{1.1.6}$$

(1.1.6)式可以用来确定 α_{ij}, 例如

$$\left.\begin{array}{ll} \text{当 } i=j=1 \text{ 时, 有} & \alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2=1 \\ i=j=2 \text{ 时, 有} & \alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2=1 \\ i=j=3 \text{ 时, 有} & \alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2=1 \\ i=1,\ j=2 \text{ 时, 有} & \alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{22}+\alpha_{13}\alpha_{23}=0 \\ i=1,\ j=3 \text{ 时, 有} & \alpha_{11}\alpha_{31}+\alpha_{12}\alpha_{32}+\alpha_{13}\alpha_{33}=0 \\ i=2,\ j=3 \text{ 时, 有} & \alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}+\alpha_{23}\alpha_{33}=0 \end{array}\right\} \tag{1.1.7}$$

我们研究单位矢量坐标变换关系的逆关系. 采用和上面完全相同的方法可以得到和(1.1.3), (1.1.6)相似的关系式:

$$e_i = \alpha'_{ir} e'_r \tag{1.1.8}$$

$$\alpha'_{ir}\alpha'_{jr} = \delta_{ij} \tag{1.1.9}$$

然而考虑到以下的关系式:

$$e_i \cdot e'_s = \alpha'_{ir} e'_r \cdot e'_s = \alpha'_{ir}\delta_{rs} = \alpha'_{is}$$

$$e_i \cdot e'_s = e_i \cdot \alpha_{sj} e_j = \alpha_{sj}\delta_{ji} = \alpha_{si}$$

于是可以得到

$$\alpha'_{is} = \alpha_{si} \tag{1.1.10}$$

考虑到(1.1.10)式, 则由(1.1.8)式可以得到

$$e_i = \alpha_{ri} e'_r \tag{1.1.11}$$

这就是单位矢量坐标变换关系的逆关系. 由以上单位矢量的坐标变换关系(1.1.3)和(1.1.11)可以看出, 单位矢量坐标变换时, 只需在原来的单位矢量前面乘一个因子 α_{ij} 就可以得到新坐标系中的单位矢量.

2 一般矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标变换

有任一矢量 $\boldsymbol{a}$, 在两坐标系中可分别表示为

$$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i=a'_k\boldsymbol{e}'_k \tag{1.1.12}$$

将(1.1.3)代入上式，可得

$$a_i\boldsymbol{e}_i=a'_k\alpha_{ki}\boldsymbol{e}_i$$

由上式可得一般矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标变换关系

$$a_i=\alpha_{ki}a'_k \tag{1.1.13}$$

再研究一般矢量 $\boldsymbol{a}$ 坐标变换关系的逆关系. 将(1.1.13)式两边乘以 α_{ji}, 则有

$$\alpha_{ji}a_i=\alpha_{ji}\alpha_{ki}a'_k=\delta_{jk}a'_k=a'_j$$

于是可得

$$a'_j=\alpha_{ji}a_i \tag{1.1.14}$$

这就是一般矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标系变换时的逆变化关系. 总结一般矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标变化关系(1.1.13)和(1.1.14)式可知，一般矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标变换时，只需在原来矢量前面乘以一个因子 α_{ij} 就可以得到新坐标系中矢量 $\boldsymbol{a}$ 的表达式.

3. 张量定义

我们将矢量的坐标变换关系进行推广，并引出张量的定义.

如果在一个直角坐标系中，量 P 有 3^2 个分量，即

$$P=p_{ij}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \tag{1.1.15}$$

并且在坐标系变换时，这 9 个量遵守以下的变换关系:

$$p'_{ij}=\alpha_{il}\alpha_{jm}p_{lm} \tag{1.1.16}$$

即在 p_{lm} 前面乘两个因子 α_{il} 和 α_{jm}，则称 P 为二阶笛卡儿张量.

二阶张量的定义还可以推广到 n 阶张量. 如果在一直角坐标系中量 P 有 3^n 个分量:

$$P = p_{j1j2\cdots jn} \tag{1.1.17}$$

并且在坐标系变换时，这 3^n 个分量遵守以下的变换关系:

$$p'_{i1i2\cdots in} = \alpha_{i1j1}\alpha_{i2j2}\cdots\alpha_{injn}\, p_{j1j2\cdots jn} \tag{1.1.18}$$

即在 $p_{j1j2\cdots jn}$ 前面乘 n 个因子 α_{i1j1}, α_{i2j2}, $\cdots$, α_{injn}, 则称 P 为 n 阶笛卡儿张量.

从 n 阶张量的定义可以看出，当 $n=0$ 时，张量的分量只有一个，且满足

$$p' = p$$

的关系，因此是一个标量. 由此可见，标量可看作零阶张量.

当 $n=1$ 时，张量有三个分量，且满足

$$p'_{i1} = \alpha_{i1m1} p_{m1}$$

的关系，因此它是一个矢量. 由此可见，矢量可看作一阶张量.

§2. 张量的代数运算

1. 张量的加法

设 $P = p_{i1i2\cdots in}$, $Q = q_{i1i2\cdots in}$ 是两个 n 阶张量，则

$$T = t_{i1i2\cdots in} = p_{i1i2\cdots in} \pm q_{i1i2\cdots in} \tag{1.2.1}$$

也是一个 n 阶张量. 即同阶张量的每个分量可以相加减. 因为 P 和 Q 是 n 阶张量，根据定义有

$$p'_{i1i2\cdots in} = \alpha_{i1j1}\alpha_{i2j2}\cdots\alpha_{injn} p_{j1j2\cdots jn}$$

$$q'_{i1i2\cdots in} = \alpha_{i1j1}\alpha_{i2j2}\cdots\alpha_{injn} q_{j1j2\cdots jn}$$

将两式相加或相减得

$$p'_{i1i2\cdots in}\pm q'_{i1i2\cdots in}=\alpha_{i1j1}\alpha_{i2j2}\cdots\alpha_{injn}(p_{j1j2\cdots jn}\pm q_{j1j2\cdots jn})$$

即
$$t'_{i1i2\cdots in}=\alpha_{i1j1}\alpha_{i2j2}\cdots\alpha_{injn}t_{i1i2\cdots in}$$

故 $t_{i1i2\cdots in}$ 是 n 阶张量. 张量

$$T=t_{i1i2\cdots in}$$

定义为 P 与 Q 之和或差.

2. 张量的乘积

设 $P=p_{i1i2\cdots ir}$, $Q=q_{j1j2\cdots js}$ 分别是 r 阶和 n 阶张量, 则

$$T=t_{i1i2\cdots irj1j2\cdots js}=p_{i1i2\cdots ir}q_{j1j2\cdots js}$$

是一个 $(r+s)$ 阶的张量. 因为

$$\begin{aligned}t'_{i1i2\cdots irj1j2\cdots js}&=p'_{i1i2\cdots ir}\cdot q'_{j1j2\cdots js}\\&=\alpha_{i1}\alpha_{i2}\cdots\alpha_{ir}\alpha_{j1}\alpha_{j2}\cdots\alpha_{js}p_{i1i2\cdots ir}q_{j1j2\cdots js}\end{aligned}$$

故 $T=t_{i1i2\cdots irj1j2\cdots js}$ 是一个 $(r+s)$ 阶张量.

3. 张量的收缩

设 $P=p_{i1i2\cdots in}$ 为一 n 阶张量, 若它有两个下标相同, 例如最后两个下标相同, 即

$$P=p_{i1i2\cdots in-2\ in\ in}$$

则此张量收缩为一个 $(n-2)$ 阶张量. 因为

$$\begin{aligned}p'_{i1i2\cdots in-2\ in\ in}&=\alpha_{i1k1}\alpha_{i2k2}\cdots\alpha_{in-2\ kn-2}\ \alpha_{inl}\alpha_{inm}\ p_{k1k2\cdots kn-2\ lm}\\&=\alpha_{i1k1}\alpha_{i2k2}\cdots\alpha_{in-2\ kn-2}\ \delta_{lm}\ p_{k1k2\cdots kn-2lm}\\&=\alpha_{i1k1}\alpha_{i2k2}\cdots\alpha_{in-2\ kn-2}\,p_{k1k2\cdots kn-2\ ll}\end{aligned}$$

故 $P=p_{i1i2\cdots in-2\ in\ in}$ 是一个 $(n-2)$ 阶张量. 这种情况称之为张量 P 的收缩.

4. 张量的内积

张量的内积就是张量的乘法加张量的收缩. 设有两个 3 阶张量 $P=p_{ijk}$ 和 $Q=q_{rsk}$, 它们有一个下标相同, 于是乘积

PQ为一个$(6-2)$阶张量，称为P和Q的内积，并用$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$表示之.

例 1 $P=p_{ik}$, $Q=q_{kj}$，都是二阶张量，则$P\cdot Q=p_{ik}q_{kj}$是一个二阶张量.

例 2 $P=p_{ij}$是一个二阶张量，$\boldsymbol{a}=a_j$是一个一阶张量(矢量)，则$P\cdot\boldsymbol{a}$是二阶张量P和矢量$\boldsymbol{a}$的右向内积，$\boldsymbol{a}\cdot P$是二阶张量P和矢量$\boldsymbol{a}$的左向内积. 一般说来$P\cdot\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{a}\cdot P$. 只有当$P$为二阶对称张量时，才有$P\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot P$.

例 3 $P:Q=p_{ij}q_{ij}$是二阶张量P和二阶张量Q相乘加二次收缩(即有两个下标相同)得来，以":"表示之.

§3. 张量识别定理

定理 1 若$p_{i1i2\cdots im}$和任意n阶张量$q_{j1j2\cdots jn}$的乘积

$$p_{i1i2\cdots im}q_{j1j2\cdots jn}=t_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn} \tag{1.3.1}$$

恒为$(m+n)$阶张量，则$p_{i1i2\cdots im}$必为m阶张量.

证：将(1.3.1)式两边乘以$q_{j1j2\cdots jn}$，得

$$p_{i1i2\cdots im}q_{j1j2\cdots jn}q_{j1j2\cdots jn}=t_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}q_{j1j2\cdots jn} \tag{1.3.2}$$

上式右边为一m阶张量，而左边的$q_{j1j2\cdots jn}q_{j1j2\cdots jn}$为一个标量$\lambda$，并且总可以选出这样的$q_{j1j2\cdots jn}$使得$\lambda$不为零. 从而可知$p_{i1i2\cdots im}$是一个$m$阶张量.

定理 2 若$p_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}$和任意$n$阶张量$q_{j1j2\cdots jn}$的内积

$$p_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}q_{j1j2\cdots jn}=t_{i1i2\cdots im}$$

恒为m阶张量，则$p_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}$必为$(m+n)$阶张量.

证：
$$\begin{aligned}t'_{i1i2\cdots im}&=\alpha_{i1r1}\alpha_{i2r2}\cdots\alpha_{imrm}t_{r1r2\cdots rm}\\&=\alpha_{i1r1}\alpha_{i2r2}\cdots\alpha_{imrm}p_{r1r2\cdots rms1s2\cdots sn}q_{s1s2\cdots sn}\\&=\alpha_{i1r1}\alpha_{i2r2}\cdots\alpha_{imrm}p_{r1r2\cdots rms1s2\cdots sn}\alpha_{j1s1}\alpha_{j2s2}\cdots\\&\quad\alpha_{jnsn}q'_{j1j2\cdots jn}\end{aligned}$$

另一方面 $$t'_{i1i2\cdots im}=p'_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}q'_{j1j2\cdots jn}$$

由以上二式可得

$$(p'_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}-\alpha_{i1r1}\alpha_{i2r2}\cdots\alpha_{imrm}\alpha_{j1s1}\alpha_{j2s2}\cdots$$

$$\alpha_{jnsn}p_{r1r2\cdots rms1s2\cdots sn})q'_{j1j2\cdots jn}=0$$

因为 $q'_{j1j2\cdots jn}$ 是任意的，由此推出

$$p'_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}=\alpha_{i1r1}\alpha_{i2r2}\cdots\alpha_{imrm}\alpha_{j1s1}\alpha_{j1s2}\cdots$$

$$\alpha_{jnsn}p_{r1r2\cdots rms1s2\cdots sn}$$

即 $p_{i1i2\cdots imj1j2\cdots jn}$ 是 $(m+n)$ 阶张量.

例 1 因 $a_i=\delta_{ij}a_j$ 对任意矢量 a_i 恒成立，根据张量识别定理 2 知克朗内克符号 δ_{ij} 是二阶张量.

例 2 p_{ij} 和任意矢量 a_j 的内积 $p_{ij}a_j=b_i$ 恒为一矢量，则根据张量识别定理 2 可知，p_{ij} 必为二阶张量.

§4. 置换张量 ε_{ijk}

我们先定义一个置换符号 ε_{ijk}，然后证明 ε_{ijk} 是一个三阶张量，最后给出 ε–δ 恒等式.

置换符号 ε_{ijk} 定义为

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0, & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 中有两个以上指标相同时}\\ 1, & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 为偶排列时(如 } \varepsilon_{123},\ \varepsilon_{231},\ \varepsilon_{312} \text{ 等)}\\ -1, & \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 为奇排列时(如 } \varepsilon_{213},\ \varepsilon_{321},\ \varepsilon_{132} \text{ 等)}\end{cases} \tag{1.4.1}$$

根据置换符号 ε_{ijk} 的定义，可以得到两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积表达式：

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon_{ijk}a_jb_k \tag{1.4.2}$$

证明：