数学基础知识丛书

一次函数与二次函数

华昌年 周林生 胡 琛

江苏人民出版社

一次函数与二次函数

华昌平　周林生　胡　琛

江苏人民出版社

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书从集合、对应、映射定义函数开始至一、二次函数变化率引进导数结束，比较系统全面地介绍函数；一、二次函数的概念、性质、图象及其应用实例。全书共分四个部分：一、函数和它的图象；二、一次函数；三、二次函数；四、一次函数与二次函数的变化率。

一次函数与二次函数

华昌年 周林生 胡 琛

•

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行

淮海印刷厂印刷

1980年3月第1版

1980年3月第1次印刷

印数：1－70,000册

书号：13100·038 定价：0.40元

责任编辑 何震邦

目　　录

一、函数和它的图象

§1 函数概念

函数是数学中最重要的概念之一.

近代数学关于函数的概念是建立在集合间元素对应的基础之上的.

1. 集合

具有一定共同特征的一类事物的全体叫做集合. 例如,平面上所有的点的集合;正偶数的集合;满足某一方程的一切根的集合;所有大于零且小于或等于 2 的实数所成的集合;某校高二(1)班学生的集合等等.

组成集合的每一个个体叫做这个集合的元素. 例如,4 是正偶数集合的一个元素. 1 是所有大于零且小于或等于 2 的实数所成集合的一个元素.

集合用大写字母 A、B、C、M、N 等表示,元素用小写字母 a、b、c、x、y 等表示.

如果 a 是某个集合 A 的一个元素,那么就说,元素 a 属于集合 A,写成

$$a \in A.$$

读作"a 属于 A".

如果 b 不是集合 A 的元素,那么就说元素 b 不属于集合 A,写成

$$b \overline{\in} A.$$

读作“b不属于A”.

集合的元素的个数有限时，这类集合称为有限集；由无限多个元素组成的集合称为无限集. 例如,某校高二(1)班学生的集合是有限集；正偶数集合，平面上所有点的集合则是无限集. 特别地，连一个元素也不包含的集合称为“空集”. 例如，方程 $x^2+5=0$ 的实数根所成的集合就是一个空集.空集用 ϕ 表示. 空集也是有限集.

表示集合的方法，常用的有列举法和描述法.

把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，用来表示集合，这种方法叫做列举法. 例如，所有小于 5 的正整数这个集合的元素是 1，2，3，4. 如果用A表示这个集合,那么可以写成

$$A=\{1,2,3,4\}.$$

把描述集合中元素的公共特性或表示集合中元素的规律写在大括号内，用来表示集合，这种方法叫做描述法. 例如，所有大于 2 的实数所成的集合，如果用 B 表示这个集合，那么可以写成

$$B=\{x\mid x>2\text{且 } x \text{ 为实数}\}.$$

这表示集合 B 是由满足条件 $x>2$ 且 x 为实数的一切x组成的，我们把条件写在括号内的右方，把 x 写在括号内左方，中间用一竖把它们分开（也可以用“：”把它们分开）.

例 1 设 $M=\{x\mid x^2-1=0\}$，它是由满足 $x^2-1=0$ 的一切 x 所成的集合，解方程，得

$$M=\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}.$$

集合 M 是有限集，它的元素有两个：-1 和 1.

例 2 设 $N=\{x\mid x^2-1\geqslant 0,\ \ x^2-3x<0\}$. 它是由同时满足两个条件“$x^2-1\geqslant 0$”和“$x^2-3x<0$”的 x 所组成

的集合，即 x 必须满足：

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ x^2-3x<0. \end{cases}$$

解联立不等式，得

$N=\{x \mid x^2-1\geqslant 0,\ x^2-3x<0\}=[1,\ 3)$.

集合 N 是无限集，它是一个区间.

2. 映射

先看下面一些例子.

例 3　考察自然数集 $N=\{x \mid x$ 为自然数$\}$，与正偶数集合 $P=\{y \mid y$ 为正偶数$\}$，它们之间可以依照下列方法建立元素之间的对应.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n\cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ y & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots\cdots & 2n\cdots\cdots \end{array}$$

这样，把两个集合的元素连结成对，它们建立了自然数集合的元素和正偶数集合的元素之间的对应。这种对应是一对一的对应.

一般地，两个集合 M 和 N，对于集合 M 中的任一元素，集合 N 中有唯一的一个元素和它对应，同样对于集合 N 中的任一元素，集合 M 中也有唯一的一个确定的元素和它对应，这种对应关系称为一一对应。自然数集合和正偶数集合的元素之间就是一一对应的；实数集合和数轴上的点的集合之间也是一一对应的.

例 4　两个集合 $M=\{x \mid x$ 为不等于零的实数$\}$，$N=\{y \mid y$ 为正实数$\}$，在 M，N 的元素之间可以建立下列的对应：M 中任取一数，例如 2，N 中以它的平方，即 4 与它对应，这时对于 M 中任一元素，N 中只有一个元素与它对

应；但N中任一元素都可与M中不同的元素相对应，例如N中的 4 与M中的 2 与 -2 相对应。

一般地，对于集合M中的任何一个元素，集合N中都有唯一的元素和它对应，而且在M中至少有两个不同的元素与N中同一个元素相对应，这种对应关系，称为多一对应。如果N的每一个元素都对应于M的元素，便说这是M到N上的多一对应。如果N有些元素不对应于M的元素，便说是M到N中的多一对应。

一一对应和多一对应统称单值对应。

一般地，设M和N是两个集合，假定符号f表示某一种确定的对应规律，使得对于集合M中的每一个元素通过对应规律f在集合N中都有一个唯一的元素和它对应，记作$M \xrightarrow{f} N$，人们常常引入分别以M，N为变域的变元x，y而写成

$$x \xrightarrow{f} y.$$

这样的对应规律f叫做从集合M到集合N的单值对应，单值对应也叫映射。如果$x_0 \xrightarrow{f} y_0$，那么y_0叫做x_0在映射f下的象，x_0叫做y_0在映射f下的原象(图 1)。

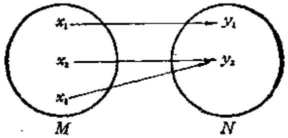


图 1

在例 3 中，对应规律 f 由 $y=2x$ 给出，它是由自然数集到正偶数集的映射。

在例 4 中，对应规律 f 由 $y=x^2$ 给出，它是由非零实数集到正实数集的映射。在这一映射下，$x=2$，$x=-2$ 的象都是 $y=4$，而 $y=1$ 的原象有两个。即 $x=1$ 和 $x=-1$。

例 5 用映射的观点解释代数式 $2x^2+3x-5$ 的值。

对于实数集合 R 中的每一个元素 x，有 $x\xrightarrow{f}f(x)=2x^2+3x-5=y$，是一个由 R 到 R 中的映射。

由图 2 可见，把 $x=2$，-1.5，0，-7，$3\frac{1}{2}$ 等分别送进电子计算机的输入端，则相应地输出 $y=9$，-5，-5，72，30。求代数式的值就相当于由原象求象，从例 4 和例 5 可以看出，不同的原象可以有相同的象。

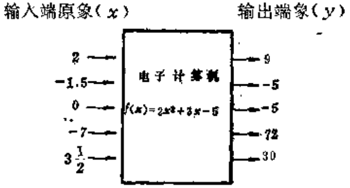


图 2

3. 函数

设 M 和 N 是两个集合，假定对于集合 M 中的每一元素 x 按照一个确定的对应规律 f（即映射）在集合 N 中有唯一元素 y 和它对应，便说在 x，y 之间定义了一个函数对应。记作

$$x\xrightarrow{f}y \text{ 或 } y=f(x).$$

其中 $f(x)$ 叫做 x 的 f 函数. x 所在的集合 M 称为该函数的定义域，x 也叫做该函数的自变量. y 所在的集合 N 称为该函数的值域. 有时集合 M 中的元素 x 可以是一种变量，而集合 N 中的元素 y 则是另一种变量.

在集合 M 中当自变量 x 取定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 的对应值 y_0 称为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，凡函数 $f(x)$ 在 x_0 的值我们记为 $f(x_0)$，故有

$$y_0=f(x_0)$$

应当指出：

上面我们由集合、对应、映射建立了严格的科学的函数定义，但考虑到某些读者的实际情况，本书也常采用通常的函数定义和表示方法.

例 6 正方形的边长和面积之间的关系由 $y=x^2$ 给出，式中 x 代表正方形的边长，y 代表正方形的面积. 正方形的各种不同边长组成一个集合 M，对应于这些不同边长的正方形的面积组成另一集合 N，这两个集合的元素间的对应关系就是 $y=x^2$. 对于 x 的每一个在定义域中的值，一定可以找到一个 y 的确定的值和它对应.

例如，当 $x=2cm$ 时，　$y=4cm^2$；

$x=3.1m$ 时，$y=9.61m^2$ 等等.

例 7 某种汽车耗油量 Q 在同一时间内与行车速度 V 之间的关系如图 3 所示. 它形象地表示出耗油量 Q 和速度 V 之间的关系，对每一个确定的速度 V，在曲线上都可以找到确定的耗油量 Q 与它对应. 例如当 $V=30$ 时，$Q=2$，$V=38$ 时，$Q=1.8$. 在本例中，行车速度组成一个集合，耗油量组成另一个集合，这两个集合的元素间的对应关系由图示的曲线所给定.

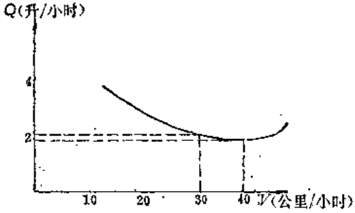


图 3

例 8 某生产队开展冬季积肥运动，用水泵把储水量为 720 立方米的池塘抽干，为了掌握工作进程，把时间 t 和池塘剩水量 v 的一些对应数据列成下表：

t（小　　时）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v（立 方 米）	720	660	600	540	480	420	360	300	240	180	120	60	0

这里时间 t 构成一个集合 T．剩水量 v 构成另一个集合 V．这两个集合间元素的对应关系由上表给出，确定了集合 T 中的一个元素就可以通过查表确定集合 V 中的另一个元素．

例 9 两个集合 Y 和 X 的元素 y 和 x 之间的对应关系由下列规则给出

$$y=\begin{cases}1 & （若 x 为有理数）\\ 0 & （若 x 为无理数）\end{cases}$$

那么当　$x=3$ 时，　$y=1$；　　$x=\sqrt{2}$ 时，$y=0$；

$$x=-\frac{2}{5} 时，y=1；\qquad x=\pi 时，y=0。$$

这一函数，称之为迪里克莱函数，它是由德国数学家迪里克莱（1805——1859）所规定的。

4．函数的定义域和值域

函数的定义域和值域是研究函数的重要前提．例如对于函数关系式 $f(x)=x^2$，只有当了解到和这个式子发生关系的对象，即函数的定义域和函数的值域后，才能确切了解由这个式子所给出的两个集合的元素之间的函数对应关系．譬如，在实数范围内讨论，函数的定义域和值域都是实数的集合；如在有理数范围内讨论，则函数的定义域和值域都只能是有理数集合，虽然表示函数关系的解析式相同，却不能表示相同的函数，就解析式 $f(x)=x^2$ 来说，在实数范围内 $f(\sqrt{2})=2$，而在有理数范围内 $f(\sqrt{2})$ 没有意义．

由此可以看到，在研究函数关系的时候，应该以两个集合的存在为前提，但是在问题的考察过程中，我们注意的重点是函数的定义域．通常从以下两方面来考察函数的定义域．

(1) 函数关系由数学式子给出，那么函数的定义域必须使函数式有意义．如分式函数的分母不能为零；根指数为偶数的无理函数，被开方数必须是非负数；在对数函数中，真数必须是正数等等．

(2) 函数关系由具体问题给出，那么函数的定义域必须由实际意义来确定．例如有一个重物从 40 米的高处自由落下，高度和下落时间的关系式是

$$h=40-\frac{gt^2}{2}.$$

式中 h 是所求高度的米数，g 是重力加速度 9.8 米/秒^2，t 是下落时间的秒数．

由函数值域 $0\leqslant h\leqslant 40$ 得到 $0\leqslant t^2\leqslant\frac{80}{g}$，$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{80}{g}}$，从而自变量 t 的允许值范围是闭区间 $\left[0,\sqrt{\frac{80}{g}}\right]$。这说明在某些实际问题中，函数值域有时也会通过函数的对应法则，对函数的定义域给以特殊的限制。

例 10 已知 $F(x)=\frac{x}{2x-x^2}$，$f(x)=\sqrt{4-x}$，

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

求 (1) $F(-1)$、$F(2)$、$f(0)$、$\varphi(\sqrt{3})$、$\varphi(-\sqrt{6})$；

(2) $\frac{F(-1)-f(0)}{\varphi(-\sqrt{6})}$；

(3) $F(x)$，$f(x)$和 $\varphi(x)$的定义域。

解 (1) $F(a)$表示函数 $y=F(x)$在$x=a$ 时的值。

$$\therefore\quad F(-1)=\frac{-1}{2\times(-1)-(-1)^2}=\frac{-1}{-2-1}=\frac{1}{3}.$$

当 $x=2$ 时，$2x-x^2=0$，

$\therefore$ $F(2)$不存在，即 $F(x)$在$x=2$ 时无意义。

$f(0)=\sqrt{4-0}=2$。

当 $x=\sqrt{3}$ 时，$x^2-4<0$，

$\because$ $\varphi(\sqrt{3})$不存在，即$\varphi(x)$在$x=\sqrt{3}$时无意义。

$$\varphi(-\sqrt{6})=\frac{1}{\sqrt{(-\sqrt{6})^2-4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) $\because$ $F(-1)=\frac{1}{3}$，$f(0)=2$，

$\varphi(-\sqrt{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$\therefore\quad \frac{F(-1)-f(0)}{\varphi(-\sqrt{6})}=\frac{\frac{1}{3}-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{10}{3\sqrt{2}}=-\frac{10\sqrt{2}}{6}$$

$$=-\frac{5}{3}\sqrt{2}.$$

(3) $\because$ 在$F(x)=\frac{x}{2x-x^2}$中，分母不能为零，

由 $\qquad 2x-x^2=0$，

可解得 $\qquad x=0，x=2$。

$\therefore$ 函数$F(x)$的定义域是除0和2以外的一切实数，用区间表示就是$(-\infty,0)(0,2)(2,\infty)$；

$\because$ 在$f(x)=\sqrt{4-x}$中，必须$4-x\geqslant0$，即$x\leqslant4$，

$\therefore$ 函数$f(x)$的定义域是$(-\infty,4]$。

$\because$ 在 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 中，必须 $x^2-4>0$。

即 $(x+2)(x-2)>0$，

解这个不等式，得 $x>2$ 或 $x<-2$。

$\therefore$ 函数 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -2)$，$(2, +\infty)$。

例 11 求函数 $y=[x]$* 的定义域和值域。

解 这个函数的定义域是实数集，值域是整数集。

例 12 求函数 $y=\dfrac{x^2-7}{x+4}$ 的定义域和值域。

解 $\because$ $x+4\neq 0$，

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{x^2-7}{x+4}$ 的定义域是 $x\neq -4$ 的一切实数，即开区间 $(-\infty, -4)$ 和 $(-4, \infty)$。

为了求函数的值域，可以把原式改写为关于 x 的方程，得

$$x^2-yx-4y-7=0.$$

要使这个方程有实根，必须

$$\Delta=(-y)^2-4(-4y-7)=y^2+16y+28\geqslant 0.$$

即 $(y+2)(y+14)\geqslant 0$。

因此值域为 $y\geqslant -2$ 或 $y\leqslant -14$。

即半开区间 $(-\infty, -14]$ 和半闭区间 $[-2, \infty)$。

例 13 已知 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x+1)$。

---

* $[x]$ 代表不超过 x 的最大整数，例如 $\left[\dfrac{1}{2}\right]=0$，$[5]=5$，$[+3.4]=3$，$[-2.17]=-3$，$[\pi]=3$ 等。

解　令 $x-1=X$，则 $x=X+1$。

$$x^2=(X+1)^2=X^2+2X+1.$$

即　$$f(X)=X^2+2X+1.$$

$$\therefore\quad f(x+1)=(x+1)^2+2(x+1)+1$$
$$=[(x+1)+1]^2$$
$$=x^2+4x+4.$$

5．函数的改变量

在有些具体问题中，研究量的变化时，要考察由于自变量的改变而引起函数值的改变的问题。

例如有一金属球受热均匀膨胀，半径从 $2cm$ 改变到 $2.01cm$，球体积已发生了如下改变：

设球原来的体积为 V_0，受热膨胀后的体积为 V_1，球体积的改变量就是 V_1-V_0，将它记作 ΔV。

则 $\Delta V=V_1-V_0=\frac{4}{3}\pi(2.01^3-2^3)\approx 0.5(cm^3)$。

一般地，函数 $y=f(x)$，当自变量从 $x=x_0$ 变到 $x=x_1$ 时，相应的函数值从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_1)$，称 x_1-x_0 为 x 的改变量，记作 $\Delta x=x_1-x_0$，称 $f(x_1)-f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的改变量，记作

$$\Delta y=f(x_1)-f(x_0).$$

由于 $\Delta x=x_1-x_0$，即 $x_1=x_0+\Delta x$，所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的改变量也可以表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

例 14　设自变量 x 的改变量为 Δx，求函数 $y=2x^2+1$ 在下列点处的改变量。

(1) 在 $x=-1$ 处；　(2) 在 $x=x_0$ 处。

解 (1) $\Delta y = f[(-1)+\Delta x]-f(-1)$

$$=2[(-1)+\Delta x]^2+1-[2(-1)^2+1]$$

$$=2[1-2\Delta x+(\Delta x)^2]+1-3$$

$$=-4\Delta x+2(\Delta x)^2;$$

(2) $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$=2(x_0+\Delta x)^2+1-(2x_0^2+1)$$

$$=2[(x_0)^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]+1-2x_0^2-1$$

$$=2x_0^2+4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2+1-2x_0^2-1$$

$$=4x_0\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

习 题 一

1. 指出下面的集合M由怎样性质的元素组成。如果是有限集，写出它的所有元素。

(1) 设Z是整数集，$M=\left\{n \,\middle|\, \frac{n}{5}\in Z,\ |n|\leqslant 20\right\}$；

(2) $M=\{x\,|\,x^2=0\}$。

2. 在数轴上分别画出下列各个点集的范围：

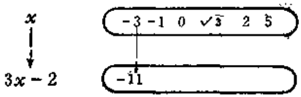
(1) $N_1=\{x\,|\,|x|>2\}$；

(2) $N_2=\{x\,|\,|x|\leqslant 1\}$；

(3) $N_3=\{x\,|\,|x+3|<2\}$；

(4) $N_4=\{x\,|\,1\leqslant|x-2|<3\}$。

3. 已知对应法则：$x\to 3x-2$，写出x所对应的数值。



第 3 题