

高等学校教材

数 学 分 析

上 册

王焕初 编著

西北工业大学出版社

1989年3月 西安

内 容 简 介

本书是作为理科“数学分析”和工科“高等数学”课程的教材而编写的。内容符合各学科所规定的教学大纲。全书分上、下两册。上册内容包括一元函数的微分学与积分学以及空间解析几何；下册内容包括多元函数的微分学、积分学、级数以及常微分方程。本书可作为综合性大学数学、计算数学专业的“数学分析”课程的教材和高等工科学校各专业的“高等数学”课程的教材。

高等学校教材

数 学 分 析

上册

王焕初 编著

责任编辑 刘彦信

责任校对 郭生儒

西北工业大学出版社出版

(西安市友谊西路127号)

陕西省新华书店发行

空军导弹学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-0122-2/O·10 (课)

开本787×1092毫米 1/32 8.25印张 185千字

1989年3月第1版 1989年3月第1次印刷

印数1—2000册

定价：1.66元

前 言

本书是根据1980年高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会审订的“数学分析教学大纲”和工科数学课程教学指导委员会于1986年拟定并经国家教育委员会1987年批准的“高等数学课程教学基本要求”编写的。

书中的空间解析几何与常微分方程两部分，是工科“高等数学”课程的内容，其它均为理科“数学分析”课程的内容，标有“°”的则是超出工科“高等数学”课程基本要求的内容。

本书从实数的完备性开始，由一元函数到多元函数，由函数的极限和连续性到函数的微分学和积分学，对于每一个新的理论，总是把它的来源叙述得清清楚楚，丝毫没有脱节之处。

本书内容和一般通用教材有许多不同之处。例如，曲线的弧长定义和曲面的面积定义是属于同一类型的数学问题，如果不用同一方法处理，就失去数学的概括性。因此，本书关于曲线弧长的定义与一般著作中所用的定义是不相同的，还有曲线的拐点问题，为了不至于把拐点和两侧凹凸情况相反的角点相混淆，本书关于拐点的定义也与一般著作中所用的定义是不相同的。又如，对几何学和物理学中的问题，在一般著述中，多从有关问题的近似值出发，以求出其计算公式。这就可能使读者因此而产生错误的思路，即：对事物的近似值求极限，就得到事物的真值。为了避免这种情况，本书舍弃了应用近似值这个途径，而直接从有关问题在几何学或物理学中的定义求出其真实结果，然后再推导出这个真实

结果的计算公式。

以上这些都是本书在理论上不同于一般著述之处。至于其它不同之处，就不赘述了。

本书完成初稿后，承蒙国家教委工科数学课程指导委员会委员孙家永教授予以审阅，并提出了不少宝贵意见，俾得修改定稿。但修改后，恐尚有不妥之处，敬希读者批评指正。

王焕初

1988年1月于西北工业大学

目 录

第一章 函数的极限和函数的连续性..... 1

1•01	实数概念.....	1
1•02	数集的界.....	3
1•03	无穷序列.....	6
1•04	整标变量.....	7
1•05	无穷小量.....	8
1•06	无穷大量.....	11
1•07	整标变量的极限.....	11
1•08	一元函数的概念与分类.....	22
1•09	函数的极限.....	25
1•10	函数极限的一些定理.....	29
1•11	两个重要极限.....	32
1•12	函数极限的另一定义.....	37
1•13	柯西准则.....	38
1•14	函数的连续性.....	39
1•15	连续函数的一些定理.....	41
1•16	函数的一致连续性.....	48
1•17	初等函数的连续性.....	49
1•18	函数的不连续点.....	56
1•19	无穷小的比较.....	57

第二章 一元函数的微分学.....60

2•01	速度.....	60
2•02	曲线的切线.....	61

2·03	函数的导数和导函数	62
2·04	求导函数的基本法则	64
2·05	基本初等函数的导函数公式	68
2·06	用参数表示的函数的求导法	74
2·07	高阶导数和高阶导函数	75
2·08	函数的微分	79
2·09	高阶微分	82
2·10	近似计算和误差	84
2·11	微分学的一些定理	86
2·12	洛比达法则	89
2·13	函数的增减性和极值	97
2·14	曲线的切线和法线	101
2·15	曲线的升降性和极值点	102
2·16	曲线的凹凸性和拐点	105
2·17	曲线的渐近线	109
2·18	函数的作图	113
2·19	曲线弧长的定义和弧的微分	116
2·20	曲率	118
2·21	极坐标曲线	121
2·22	函数的最大值和最小值	124
2·23	方程实根的近似解法	128

第三章 不定积分 132

3·01	原函数和不定积分	132
3·02	不定积分的基本公式和积分表	133
3·03	变量替换积分法	135
3·04	分部积分法	137
3·05	有理分式的积分法	141

3·06	三角函数的有理式的积分法	145
3·07	无理式的积分法	148

第四章 定积分 153

4·01	曲边梯形	153
4·02	定积分	154
4·03	积分和的性质	155
4·04	可积函数的类型	157
4·05	定积分的性质	160
4·06	牛顿-莱布尼茨公式	168
4·07	定积分的变量替换	169
4·08	定积分的分部积分法	171
4·09	曲边梯形的面积	172
4·10	曲边扇形的面积	176
4·11	曲线的弧长	177
4·12	旋转体的体积	182
4·13	旋转面的面积	184
4·14	由已知平行截面面积计算立体体积	185
4·15	液体压力	187
4·16	质点系的静力矩和重心	188
4·17	均匀曲线的重心	189
4·18	均匀薄板的重心	192
4·19	定积分的近似算法	195
4·20	广义积分	200
4·21	双曲函数	203

第五章 矢量代数与空间解析几何 207

5·01	矢量概念	207
------	------	-----

5.02	矢量的加减法和数乘法	208
5.03	矢量在投影轴上的投影	210
5.04	两矢量的数量积	212
5.05	两矢量的矢量积	213
5.06	三矢量的混合积	214
5.07	矢量积服从于分配律的证明	215
5.08	空间直角坐标系	216
5.09	矢量的坐标和坐标表示式	217
5.10	矢量的各种结合的坐标表示式	219
5.11	两矢量的夹角	222
5.12	空间两点间的距离和线段的定比分点	223
5.13	过定点有定向法线矢量的平面的方程	224
5.14	平面的一般方程	226
5.15	二平面的夹角	228
5.16	直线的一般方程及其方向数	229
5.17	直线的对称式方程和参数方程	230
5.18	两直线的夹角	232
5.19	直线和平面的夹角	233
5.20	曲面的方程的概念和球面的方程	234
5.21	母线垂直于坐标面的柱面及其方程	236
5.22	旋转面的方程	237
5.23	曲面的截口	239
5.24	空间曲线的切线和法面	239
5.25	空间曲线的弧长	242
5.26	椭球面	245
5.27	单叶双曲面	246
5.28	双叶双曲面	248
5.29	椭圆抛物面	250

5•30 双曲抛物面.....	251
5•31 柱面坐标和球面坐标.....	253

第一章 函数的极限和函数的连续性

§1.01 实数概念

在解析几何中已经使用过数轴，现将数轴的概念比较深入地述说一下。借以了解实数的概念。取一方向向右的水平直线(图1.01)。在此直线上固定一点 O 作为原点，再在此直线上取一点 P ，并以 $|\overline{OP}|$ 表示线段 $\overline{OP}$ 的长度，而用此

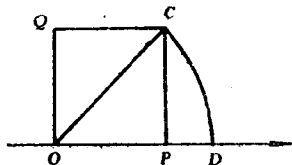


图 1.01

长度作为单位长度，就构成一个数轴。在数轴上取一点 A ，如果点 A 在原点的右方，且 $|\overline{OA}| : |\overline{OP}| = r$ ，就说点 A 代表数 $r > 0$ ；如果点 A 在原点的左方，就说点 A 代表 $-r$ 。这样的数 r 可能是有理数，也可能是无理数，它是有理数的情况显而易见。现举例说明它是无理数的情况。以 $\overline{OP}$ 为边作一正方形 $OPCQ$ ，再以点 O 为圆心， OC 为半径作一圆，设此圆与数轴交于点 D (图1.01)，则点 D 所代表的数就是无理数 $\sqrt{2}$ 。因此，在数轴上除去代表有理数的点外，就说其余的点所代表的数都是无理数。

有理数和无理数统称为实数。实数的大小关系，按照数

轴上代表它们的点的左右位置而定。如果代表数 α 的点在代表数 β 的点的左方，就说 $\alpha < \beta$ 。

设 a, b 是有理数， $a < b$ ，则有

$$a < a + \frac{1}{2}(b-a) < b, \quad a < a + \frac{3}{5}(b-a) < b, \dots$$

所以，两个有理数之间有无穷多个有理数存在。又因为

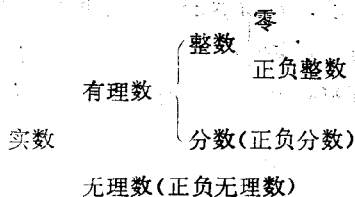
$$a < a + \frac{1}{3\sqrt{2}}(b-a) < b, \quad a < a + \frac{4}{7\sqrt{5}}(b-a) < b \dots$$

所以，两个有理数之间又有无穷多个无理数存在。因此，两个实数之间既有无穷多个有理数又有无穷多个无理数存在。

现在，设数轴上代表数 α 的点是点 A ，则代表小于数 α 的所有实数的点都在点 A 的左方，代表大于 α 的所有实数的点都在点 A 的右方。因此，在小于 α 的所有实数中必定没有最大的数，在大于 α 的所有实数中又必定没有最小的数。所以，如果把 α 和小于 α 的所有实数作为集合 B ，把大于 α 的所有实数作为集合 B' ，则在集合 B 中有最大的数，而在集合 B' 中没有最小的数；如果把小于 α 的所有实数作为集合 C ，把 α 和大于 α 的所有实数作为集合 C' ，则在集合 C 中没有最大的数，而在集合 C' 中有最小的数。这就从数轴的概念上说明了实数有以下性质。

实数的完备性 把全部实数分成上下两类 A' 和 A ，而使下类 A 中的任何数都小于上类 A' 中的任何数，这就只可能有两种情况：一种是在下类 A 中有最大的数，而在上类 A' 中没有最小的数；另一种是在下类 A 中没有最大的数，而在上类 A' 中有最小的数。

实数的上述性质也叫作实数的**连续性**。下面是实数的一个分类表



以后我们所说的数都指的是实数。

在数轴上，把满足下面各不等式的一切 x 的数，用它的右边的名称和记号以表示：

$a \leq x \leq b$ 闭区间 $[a, b]$;

$a < x < b$ 开区间 (a, b) ;

$a \leq x < b$ 半闭区间 $[a, b)$;

$a < x \leq b$ 半开区间 $(a, b]$;

而把它们统称为**区间**，又把区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 叫做点 a 的**邻域**，而不拘 δ 是任何正数。

§1.02 数集的界

如果一个集合的元素都是数，就把它简称为**数集**。

设有一数集和一个数 m ，如果这个数集中的数都不小于 m ，就称 m 为这个数集的**下界**，并说这个数集**下有界**。下有界的数集有无穷多个下界。

设有一数集和一个数 M ，如果这个数集中的数都不大于 M ，就称 M 为这个数集的**上界**，并说这个数集**上有界**。上有界的数集有无穷多个上界。

上下都有界的数集叫做**有界集**。

定理 上有界的数集必有最小上界，下有界的数集必有最大下界。

从图1.02可以直观理解这一定理的正确性。

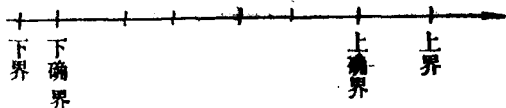


图 1·02

数集的最小上界和最大下界分别称为数集的**上确界**和**下确界**。

°证 对于上有界的数集 B 来说,如果在数集 B 中有最大的数 α ,则 α 和大于 α 的一切数都是数集 B 的上界,而小于 α 的数就不可能是数集 B 的上界。所以 α 是数集 B 的一切上界中的最小数,即最小上界。

如果在上有界的数集 B 中没有最大的数,则数集 B 中就不能含有它的上界。设数集 B 的一切上界所作成的数集是 A' ,而设小于数集 A' 中一切数的数所作成的数集是 A ,则数集 A 必包含数集 B 。现在考虑数集 A 是否有最大的数。设数集 A 中有最大的数 β ,则 β 或属于 B 或不属于 B 。如果 β 属于 B ,则数集 B 中有了最大的数,和题设矛盾。如果 β 不属于 B ,则 β 就是数集 B 的一个上界,而应属于 A' 。所以,在数集 A 中没有最大的数。再根据实数的完备性,即知数集 A' 中必有最小的数,这个数就是数集 B 的一切上界中的最小数,即最小上界。这就证明了上有界的数集必有最小上界。

同理可证下有界的数集必有最大下界。证完。

【例一】数集 $\{5, 7, 15\}$ 的下确界是5,上确界是15。
这是因为所给数集中有最小的数5和最大的数15。

【例二】数集 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$ 的下确界是 $\frac{1}{2}$,上确界是1。

这是因为所给数集中有最小的数 $\frac{1}{2}$ ，还有比任何小于1的数都大的数，而1又是它的一个上界。

【例三】数集 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ 的下确界是0，上确界是1。

这是因为所给数集中有最大的数1，还有比任何大于0的数都小的数，而0又是它的一个下界。

【例四】函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的值域的下确界是0，上确界是1。

这是因为在区间 $(0, +\infty)$ 内有如下的情况

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } \frac{1}{2} < f(x) < 1.$$

还知道函数 $f(x)$ 的值域中有比任何小于1的数都大的数。所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的值域有下确界0和上确界1。

【例五】函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ 的值域是有界的。

这是因为在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有如下的情况

$$\text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时 } \quad 1 \leq f(x) < 2,$$

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时 } \quad 0 < f(x) < 1.$$

所以函数 $f(x)$ 的值域是有界的。

本例中数集的确界，现在仅能知道它的下确界是0，它的上确界则须应用§2.12的计算方法才能求得。

§1.03 无穷序列

设有按照从左到右的次序所排列的无穷多个如下的数

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots,$$

就把它叫做**无穷序列**，简称**序列**。记为 $\{x_n\}$ 。序列中的每一个数都叫做序列的**元素**，并把 x_m 叫做序列 $\{x_n\}$ 的第 m 个元素（ m 是一个正整数）。

如果序列 $\{x_n\}$ 的各元素有如下的关系

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n < \dots,$$

就说它是一个**增序列**。如果各元素有如下的关系

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n \leq \dots,$$

就说它是一个**不减序列**。如果各元素有如下的关系

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{n-1} > x_n > \dots,$$

就说它是一个**减序列**。如果各元素有如下的关系

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq x_n \geq \dots,$$

就说它是一个**不减序列**。

如果从序列 $\{x_n\}$ 中取出一部分元素(无穷多个)，仍按它们原来的次序排列起来，就得到如下的新序列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

它叫做属于序列 $\{x_n\}$ 的**子序列**，简记为 $\{x_{n_k}\}$ 。

例如，下面的每一行都是一个序列。其中的第一行是一个增序列，第二行是一个减序列

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots,$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \dots,$$

$$2, 2, 2, \dots, 2, \dots,$$

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots,$$

下面这个序列就是上面第三行的序列的一个子序列:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots.$$

如果一个序列的一切元素都含在某一有界集内, 就说这个序列是一个**有界序列**。

§1.04 整标变量

设有一个变量, 它所取的值能用一个序列 $\{x_n\}$ 来表示, 并且它取值的先后次序就是序列从左到右的次序, 就说它是一个**整标变量**, 并用 x_n 以表示它。

以后, 凡是用附有下列下标 n 的字母代表变量时, 都指的是整标变量。

如果 $\{x_n\}$ 是一个增(或不减)序列, 就说 x_n 是一个**增(或不减)变量**。如果 $\{x_n\}$ 是一个减(或不增)序列, 就说 x_n 是一个**减(或不增)变量**。

在整标变量所取的无穷多个数值中, 可能有许多数值是相同的, 甚至这无穷多个数都是相同的一个数。因此, 可以把一个常数看成整标变量。

如果一个变量所取的值不超出某一有界集, 就说这个变量是**有界变量**。当把一个常数看成变量时, 显然就是一个有界变量。

如果用一个增(或不减)变量 x_n 所取的一切值作为元素所

构成的集合是上有界的，就说增（或不减）变量 x_n 是上有界的，也说增（或不减）序列 $\{x_n\}$ 是上有界的。

同样，如果用一个减（或不增）变量 x_n 所取的一切值作为元素所构成的集合是下有界的，就说减（或不增）变量 x_n 是下有界的，也说减（或不增）序列 $\{x_n\}$ 是下有界的。

§1.05 无穷小量

定义 设有一变量 x_n ，对于任何小的正数 ε ，就存在一个正整数 N ，当 $n > N$ 时，有如下的不等式成立

$$|x_n| < \varepsilon,$$

就说变量 x_n 是一个**无穷小量**，简称**无穷小**。如 x_n 是无穷小，则 $-x_n$ 也是无穷小。

如果一个无穷小量所取的值都是正值，就把它称为**正无穷小**；如果一个无穷小量所取的值都是负值，则称其为**负无穷小**。

例如，当变量 x_n 所取的值是下面三个序列中的任何一个时， x_n 都是无穷小，

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots,$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \dots,$$

定理一 两个无穷小的和或差都是无穷小。

证 设 x_n 和 y_n 是两个无穷小， ε 是一个任何小的正数。因为 x_n 是无穷小，所以，可以找到正整数 N' ，当 $n > N'$