高等学校教材

数学分析

上册

王焕初 编著

西北工业大学出版社
1989年3月 西安

内容简介

本书是作为理科“数学分析”和工科“高等数学”课程的教材而编写的。内容符合各学科所规定的教学大纲。全书分上、下两册。上册内容包括一元函数的微分学与积分学以及空间解析几何；下册内容包括多元函数的微分学、积分学、级数以及常微分方程。本书可作为综合性大学数学、计算数学专业的“数学分析”课程的教材和高等工科学校各专业的“高等数学”课程的教材。

高等学校教材

数学分析

上册

王焕初　编著

责任编辑　刘彦信

责任校对　郭生儒

西北工业大学出版社出版

（西安市友谊西路127号）

陕西省新华书店发行

空军导弹学院印刷厂印装

ISBN 7-5612-0122-2/O·10（课）

开本787×1092毫米　1/32　8.25印张　185千字

1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷

印数1—2000册　　定价：1.66元

前言

本书是根据1980年高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会审订的“数学分析教学大纲”和工科数学课程教学指导委员会于1986年拟定并经国家教育委员会1987年批准的“高等数学课程教学基本要求”编写的。

书中的空间解析几何与常微分方程两部分，是工科“高等数学”课程的内容，其它均为理科“数学分析”课程的内容，标有“°”的则是超出工科“高等数学”课程基本要求的内容。

本书从实数的完备性开始，由一元函数到多元函数，由函数的极限和连续性到函数的微分学和积分学，对于每一个新的理论，总是把它的来源叙述得清清楚楚，丝毫没有脱节之处。

本书内容和一般通用教材有许多不同之处。例如，曲线的弧长定义和曲面的面积定义是属于同一类型的数学问题，如果不用同一方法处理，就失去数学的概括性。因此，本书关于曲线弧长的定义与一般著作中所用的定义是不相同的，还有曲线的拐点问题，为了不至于把拐点和两侧凹凸情况相反的角点相混淆，本书关于拐点的定义也与一般著作中所用的定义是不相同的。又如，对几何学和物理学中的问题，在一般著述中，多从有关问题的近似值出发，以求出其计算公式。这就可能使读者因此而产生错误的思路，即：对事物的近似值求极限，就得到事物的真值。为了避免这种情况，本书舍弃了应用近似值这个途径，而直接从有关问题在几何学或物理学中的定义求出其真实结果，然后再推导出这个真实

结果的计算公式。

以上这些都是本书在理论上不同于一般著述之处。至于其它不同之处，就不缕述了。

本书完成初稿后，承蒙国家教委工科数学课程指导委员会委员孙家永教授予以审阅，并提出了不少宝贵意见，俾得修改定稿。但修改后，恐尚有不妥之处，敬希读者批评指正。

王焕初

1988年1月于西北工业大学

目 录

第一章　函数的极限和函数的连续性

§1·01　实数概念

在解析几何中已经使用过数轴，现将数轴的概念比较深入地述说一下。借以了解实数的概念。取一方向向右的水平直线(图1·01)。在此直线上固定一点O作为原点，再在此直线上取一点P，并以$|\overline{OP}|$表示线段$\overline{OP}$的长度，而用此长度作为单位长度，就构成一个数轴。在数轴上取一点A，如果点A在原点的右方，且$|\overline{OA}|:|\overline{OP}|=r$，就说点$A$代表数$r>0$；如果点$A$在原点的左方，就说点$A$代表$-r$。这样的数$r$可能是有理数，也可能是无理数，它是有理数的情况显而易见。现举例说明它是无理数的情况。以$\overline{OP}$为边作一正方形$OPCQ$，再以点O为圆心，OC为半径作一圆，设此圆与数轴交于点D(图1·01)，则点D所代表的数就是无理数$\sqrt{2}$。因此，在数轴上除去代表有理数的点外，就说其余的点所代表的数都是无理数。

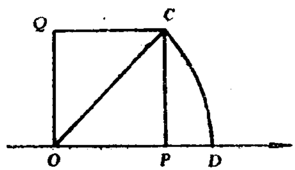

图　1·01

有理数和无理数统称为实数。实数的大小关系，按照数

轴上代表它们的点的左右位置而定。如果代表数α的点在代表数β的点的左方，就说$\alpha<\beta$。

设a，b是有理数，$a<b$，则有

$$a<a+\frac{1}{2}(b-a)<b,\quad a<a+\frac{3}{5}(b-a)<b,\ \cdots$$

所以，两个有理数之间有无穷多个有理数存在。又因为

$$a<a+\frac{1}{3\sqrt{2}}(b-a)<b,\ a<a+\frac{4}{7\sqrt{5}}(b-a)<b\cdots$$

所以，两个有理数之间又有无穷多个无理数存在。因此，两个实数之间既有无穷多个有理数又有无穷多个无理数存在。

现在，设数轴上代表数α的点是点A，则代表小于数α的所有实数的点都在点A的左方，代表大于α的所有实数的点都在点A的右方。因此，在小于α的所有实数中必定没有最大的数，在大于α的所有实数中又必定没有最小的数。所以，如果把α和小于α的所有实数作为集合B，把大于α的所有实数作为集合B'，则在集合B中有最大的数，而在集合B'中没有最小的数；如果把小于α的所有实数作为集合C，把α和大于α的所有实数作为集合C'，则在集合C中没有最大的数，而在集合C'中有最小的数。这就从数轴的概念上说明了实数有以下的性质。

实数的完备性 把全部实数分成上下两类A'和A，而使下类A中的任何数都小于上类A'中的任何数，这就只可能有两种情况：一种是在下类A中有最大的数，而在上类A'中没有最小的数；另一种是在下类A中没有最大的数，而在上类A'中有最小的数。

实数的上述性质也叫作实数的**连续性**。下面是实数的一个分类表

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 零
      - 正负整数
    - 分数(正负分数)
  - 无理数(正负无理数)

以后我们所说的数都指的是实数。

在数轴上，把满足下面各不等式的一切 x 的数，用它的右边的名称和记号以表示：

$a \leqslant x \leqslant b$　　闭区间$[a, b]$；

$a < x < b$　　开区间(a, b)；

$a \leqslant x < b$　　半闭区间$[a, b)$；

$a < x \leqslant b$　　半开区间$(a, b]$，

而把它们统称为**区间**，又把区间$(a-\delta, a+\delta)$叫做点a的**邻域**，而不拘δ是任何正数。

§1·02　数集的界

如果一个集合的元素都是数，就把它简称为**数集**。

设有一数集和一个数 m，如果这个数集中的数都不小于 m，就称m为这个数集的**下界**，并说这个数集**下有界**。下有界的数集有无穷多个下界。

设有一数集和一个数M，如果这个数集中的数都不大于M，就称M为这个数集的**上界**，并说这个数集**上有界**。上有界的数集有无穷多个上界。

上下都有界的数集叫做**有界集**。

定理　上有界的数集必有最小上界，下有界的数集必有最大下界。

从图1·02可以直观理解这一定理的正确性。

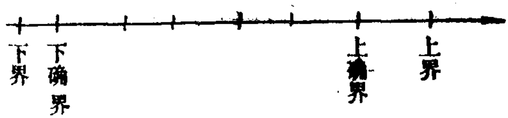

图 1·02

数集的最小上界和最大下界分别称为数集的**上确界**和**下确界**。

°**证** 对于上有界的数集B来说，如果在数集B中有最大的数α，则α和大于α的一切数都是数集B的上界，而小于α的数就不可能是数集B的上界。所以α是数集B的一切上界中的最小数，即最小上界。

如果在上有界的数集B中没有最大的数，则数集B中就不能含有它的上界。设数集B的一切上界所作成的数集是A'，而设小于数集A'中一切数的数所作成的数集是A，则数集A必包含数集B。现在考虑数集A是否有最大的数。设数集A中有最大的数β，则β或属于B或不属于B。如果β属于B，则数集B中有了最大的数，和题设矛盾。如果β不属于B，则β就是数集B的一个上界，而应属于A'。所以，在数集A中没有最大的数。再根据实数的完备性，即知数集A'中必有最小的数，这个数就是数集B的一切上界中的最小数，即最小上界。这就证明了上有界的数集必有最小上界。

同理可证下有界的数集必有最大下界。证完。

【例一】 数集$\{5, 7, 15\}$的下确界是5，上确界是15。这是因为所给数集中有最小的数5和最大的数15。

【例二】 数集$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$的下确界是$\frac{1}{2}$，上确界是1。

这是因为所给数集中有最小的数$\frac{1}{2}$，还有比任何小于1的数都大的数，而1又是它的一个上界。

【例三】 数集$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$的下确界是0，上确界是1。

这是因为所给数集中有最大的数1，还有比任何大于0的数都小的数，而0又是它的一个下界。

【例四】 函数$f(x)=\frac{x}{1+x}$在区间$(0, +\infty)$内的值域的下确界是0，上确界是1。

这是因为在区间$(0, +\infty)$内有如下的情况

当$0 \leqslant x \leqslant 1$时，$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$，

当$x>1$时，$\frac{1}{2}<f(x)<1$。

还知道函数$f(x)$的值域中有比任何小于1的数都大的数。所以函数$f(x)$在区间$(0, +\infty)$内的值域有下确界0和上确界1。

【例五】 函数$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$的值域是有界的。

这是因为在区间$(-\infty, +\infty)$内有如下的情况

当$|x| \leqslant 1$时　　$1 \leqslant f(x)<2$，

当$|x|>1$时　　$0<f(x)<1$。

所以函数$f(x)$的值域是有界的。

本例中数集的确界，现在仅能知道它的下确界是0，它的上确界则须应用§2·12的计算方法才能求得。

§1·03 无穷序列

设有按照从左到右的次序所排列的无穷多个如下的数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,$$

就把它叫做**无穷序列**，简称**序列**。记为$\{x_n\}$。序列中的每一个数都叫做序列的**元素**，并把x_m叫做序列$\{x_n\}$的第m个元素（m是一个正整数）。

如果序列$\{x_n\}$的各元素有如下的关系

$$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n<\cdots,$$

就说它是一个**增序列**。如果各元素有如下的关系

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

就说它是一个**不减序列**。如果各元素有如下的关系

$$x_1>x_2>x_3>\cdots>x_{n-1}>x_n>\cdots,$$

就说它是一个**减序列**。如果各元素有如下的关系

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_{n-1}\geqslant x_n\geqslant\cdots,$$

就说它是一个**不增序列**。

如果从序列$\{x_n\}$中取出一部分元素（无穷多个），仍按它们原来的次序排列起来，就得到如下的新序列

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \cdots,\ x_{n_k},\ \cdots.$$

它叫做属于序列$\{x_n\}$的**子序列**，简记为$\{x_{n_k}\}$。

例如，下面的每一行都是一个序列。其中的第一行是一个增序列，第二行是一个减序列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots,$$

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots,$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$2,\ 2,\ 2,\ \cdots,\ 2,\ \cdots,$$

$$1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots,$$

下面这个序列就是上面第三行的序列的一个子序列：

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{1}{2n-1},\ \cdots.$$

如果一个序列的一切元素都含在某一有界集内，就说这个序列是一个**有界序列**。

§1·04 整标变量

设有一个变量，它所取的值能用一个序列$\{x_n\}$来表示，并且它取值的先后次序就是序列从左到右的次序，就说它是是一个**整标变量**，并用x_n以表示它。

以后，凡是用附有下标 n 的字母代表变量时，都指的是整标变量。

如果$\{x_n\}$是一个增（或不减）序列，就说x_n是一个**增（或不减）变量**。如果$\{x_n\}$是一个减（或不增）序列，就说x_n是一个**减（或不增）变量**。

在整标变量所取的无穷多个数值中，可能有许多数值是相同的，甚至这无穷多个数都是相同的一个数。因此，可以把一个常数看成整标变量。

如果一个变量所取的值不超出某一有界集，就说这个变量是**有界变量**。当把一个常数看成变量时，显然就是一个有界变量。

如果用一个增（或不减）变量x_n所取的一切值作为元素所

构成的集合是上有界的，就说增（或不减）变量 x_n 是上有界的，也说增（或不减）序列$\{x_n\}$是上有界的。

同样，如果用一个减（或不增）变量x_n 所取的一切值作为元素所构成的集合是下有界的，就说减（或不增）变量x_n 是下有界的，也说减（或不增）序列$\{x_n\}$是下有界的。

§1·05 无穷小量

定 义 设有一变量x_n，对于任何小的正数 ε，就存在一个正整数N，当$n>N$时，有如下的不等式成立

$$|x_n|<\varepsilon,$$

就说变量x_n是一个**无穷小量**，简称**无穷小**。如x_n是无穷小，则$-x_n$也是无穷小。

如果一个无穷小量所取的值都是正值，就把它称为正无穷小；如果一个无穷小量所取的值都是负值，则称其为负无穷小。

例如，当变量x_n所取的值是下面三个序列中的任何一个时，x_n都是无穷小，

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \cdots,\ -\frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ (-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \cdots,$$

定理一 两个无穷小的和或差都是无穷小。

证 设x_n和y_n是两个无穷小，ε是一个任何小的正数。因为x_n是无穷小，所以，可以找到一个正整数N'，当$n>N'$