数学分析·高等代数·高等几何·解析几何

问题与思考

陈汝栋　主编

上海科学技术文献出版社

数学分析 高等代数 高等几何 解析几何

问 题 与 思 考

陈汝栋 主编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

数学分析　高等代数　高等几何　解析几何
问 题 与 思 考
陈汝栋　主编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路 2 号)
全 国 新 华 书 店 经 销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本 787×1092　1/32　印张 10　字数 241,000
1992 年 9 月第 1 版　1992 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—7,000
ISBN 7-80513-990-3/O·68
定 价：5.75 元
《科技新书目》269-291

前　言

数学分析，高等代数，高等几何，解析几何是高等师范院校数学系的四门基础课程。这些学科的内容至今可以说已经相当成熟。然而，由于本世纪泛函分析、抽象代数和拓扑学的发展，使这些古老的学科焕发了生机。直至今日，人们仍在对这些理论进行着不懈的探索和研究，出现了不少有影响的结果。这些散见于近期文献的结果，作为对现有理论的进一步完善和发展，无疑具有重要意义。遗憾的是，在教材及参考书中对这些结果很难系统提及，使得有些结论鲜为人知，这无疑对这些课程的学习是一缺憾。另一方面，对大学低年级学生来说，往往对一些较抽象的证明题感到望而生畏。究其原因，主要是对概念理解不够准确，对方法使用不够熟练，以致在作题时不能运用自如。

针对上述情况，本书作者在对这些课程长期教学、深入探讨的基础上，基于为学生解惑、排难的原则，将学生在学习中容易混淆的、似是而非的概念，结合文献中的有关新结果，用问题的形式将它们揭示出来，以应学生之急需和弥补教材之不足。在本书中，我们由浅入深、循序渐进地提出了近800个问题，对每个问题都给予简明的解答或举出反例说明，并对有些问题给出了更深的结论，使读者在思考中获得对概念的正确理解、对方法的熟练使用。这些问题立论明确，紧扣教材，集中反映了学习过程中容易混淆的概念及各类方法使用中的疑难问题（区别于习题解答）。同时也融合了这些学科的最新结果。因此，它不仅可以为学生学习这些课程充当助手，同时也可成为有关教师的益

友。

本书以现行较通用的教材为主线，问题设计以先专科后本科的原则，较难的问题用*标出，对教材中有的及自明的问题不予列入。

本书作者系全国18所大专院校二十余名有长期教学经验及科研实践的数学系教师。其中，数学分析由于延荣，王长庆，王洪汉，刘华民，李义华，陈汝栋，张庆政，孟培源，崔艳兰，戴汉有编写；高等代数由卫宗礼，王新社，陈贞忠，陈晋健，吴丽云，沈熙林，杨秋锁编写；高等几何由陈汝栋，彭群钦，蔡国梁编写；解析几何由牛晓奇，冯秀峰，陈汝栋，彭永成编写。由陈汝栋负责主编工作，其中杨秋锁，王洪汉，蔡国梁，于延荣也做了部分主编工作。施德明教授、刘浩岳教授、黄其奉教授和王汉光副教授，亲审了书稿，提出了许多修改意见，作者在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，加之时间仓促，虽为使本书达到理想效果而竭尽全力，疏漏之处在所难免，诚望读者及各位同行给以指正。

作　者

1991年5月

目　录

数 学 分 析

一、分 析 引 论

1. 函 数

1 经过恒等变形得到的两个函数，是否一定相同？为什么？

答 不一定。如 $f(x)=1$，$g(x)=\dfrac{x}{x}$，当 $x\neq0$ 时，$f(x)\equiv g(x)$，但显然 $f\neq g$. 因为恒等变形可以在某个集合上进行。

2 能否用平面上一条曲线给定一个函数？是否任何一条平面曲线都能确定一个函数？

答 能。但不是任何一条平面曲线都能给定一个函数。这是因为，当平行于 y 轴的直线与曲线相交多于一个点时，依函数定义不能确定一个函数。

3 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f(f(x))=x$？

答 否。$f(f(x))$ 的定义域为 $x\neq0$，而后者为 R.

4. $y=f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$，则 $f(x+c)$ 的定义域为 $[a+c, b+c]$ 吗？

答 否。应为 $[a-c, b-c]$.

5 设 $f(x)$、$g(x)$ 单调增加，则 (1) $f(x)+g(x)$ 单调增加？(2) $f(x)\cdot g(x)$ 单调增加？(3) $f(x)/g(x)$（当 $g(x)\neq0$）单调增加？(4) $f(x)-g(x)$ 单调增加？

答 (1) 正确；(2) 不正确，如 $f(x)=x$，$g(x)=-x^{-\frac{1}{2}}$，

$x\in(0, +\infty)$；(3) 不正确，如 $f(x)=x$, $g(x)=x^{\frac{3}{2}}$； (4)不正确，如 $f(x)=x$, $g(x)=x^3$。

6 两个相同单调性的函数的复合函数是否仍有相同的单调性？

答 单调增加函数的复合函数必是增函数，单调减少的函数的复合函数未必是减函数。如 $f(x)=-x$ 单调减少，但 $f(f(x))=x$ 非单调减少。一般地，有下列命题：

命题 设 $f_i(x)(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 n 个单调函数。则

$$f(x)=f_n(f_{n-1}(\cdots f_1(x)))$$

单调增加的充分必要条件为 f_i 中有偶数个单调减少；$f(x)$ 为单调减少的充分必要条件为 f_i 中有奇数个单调减少。

7 严格增加的函数是否一定无界？

答 否。如 $y=\operatorname{arctg} x$。

8 任意函数都存在单调区间？

答 否。如 $D(x)$（狄利克莱）函数。

9 周期函数定义域一定为 R（实数集）？当定义域为区间呢？

答 否。如 $y=\sqrt{\sin x}$。

当定义域为区间时，则定义域为 R（可用反证法）。

10 若 $f(x+l)=-f(x)$，则 $f(x)$ 非周期函数？

答 否。因 $f(x+2l)=f(x)$。

一般地，设 $f(x+l)=kf(x)(l>0)$，则当 $f(x)$ 连续时，$f(x)$ 为周期函数的充要条件为 $k=0, \pm1$.（见[27]）

11 周期函数是否必有最小正周期？在什么条件下有最小正周期？

答 周期函数未必有最小正周期，如 $y=D(x)$. 当非常值周期函数 $f(x)$ 在某点连续时，则必有最小正周期（见[11] 1963 (12)）。

12 二个周期函数的和、差、积、商是否仍为周期函数？

答 只要考虑和、积情形。有下列结论：

(1) 若 $f(x)$、$g(x)$为周期函数，且其周期可公度，则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$均为周期函数。

(2)* 若 $f(x)$、$g(x)$为周期函数，且其周期不可公度，$f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$ 也可能是周期函数(不是周期函数的例子是容易举出的)：

例如，任取 t_1、t_2、t 二二无公度，在 $I_i=[0, t_i)(i=1, 2)$ 上定义关系：

$x\sim x'$，如果 $x-x'=nt+mt_i(n,m\in Z$ (整数))．易证此关系为等价关系。

依此等价关系将 $I_i(i=1, 2)$ 分为等价类 $I_{ij}(j\in J$，J 为某指标集)，可以证明 I_{ij} 为可数集。

定义 $f_i(x)(i=1, 2)$：

记 $\bar{x}_{ij}$ 为 I_{ij} 的代表，$f(\bar{x}_{ij})=\bar{x}_{ij}(j\in J)$

其它点 $x=\bar{x}_{ij}+nt+mt_i\in I_{ij}(i=1, 2)$，$f_i(x)=\bar{x}_{ij}+na^i$ $(i=1, 2)$其中$|a_i|>\max\{t_1, t_2\}$，且 $a_1=-a_2$。

则函数 $f_1(x)$、$f_2(x)$为以 t_1、t_2 为周期的周期函数（且为其最小正周期)，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$为以 t 为周期的周期函数，这里 t_1、t_2 不可公度。

若令 $L_i(x)=e^{f_i(x)}(\mathrm{i}=1, 2)$，则 $L(x)=L_1(x)\cdot L_2(x)$ 为以 t 为周期的周期函数，t_1，t_2 为 $L_1(x)$、$L_2(x)$ 的最小正周期，且不可公度。(上述例子的证明见[11]1965(5))

13 奇、偶函数的复合函数的奇偶性如何？

答 有下列结论成立：

命题 若 $f_i(x)(i=1, 2, \cdots, n)$为奇函数或偶函数，则 $f(x)=f_n(f_{n-1}(\cdots f_1(x)))$ 为偶函数的充分必要条件是 f_i 中至

少有一个为偶函数。

14 函数 $y=f(x)$ 与其反函数的图形关于 $y=x$ 对称？

答 否。只有 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 时，其图形与 $y=f(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称。

15 是否存在处处有限而又处处无界的函数？

答 存在。

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\dfrac{m}{n},\ m,n\text{ 互质},\ n>0 \\ 0, & x\text{ 为无理数。} \end{cases}$$

16 设 $y=\ln u$，$u=\sin x-1$，则 y 是 x 的复合函数？

答 否。因为 $\{u\mid \sin x-1=u,\ x\in R\}\cap\{u>0\}=\phi$。

17 分段函数均非初等函数吗？

答 否。如

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ \cos x, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

则由于 $f(x)=e^{\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2})}+\cos\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{x^2})-1$，依初等函数定义，知 $f(x)$ 为初等函数。

一般地，有定理* 对于分段函数

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x_1\leqslant x\leqslant x_2 \\ f_2(x), & x_2<x\leqslant x_3 \\ \cdots\cdots & \\ f_n(x), & x_n<x\leqslant x_{n+1} \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $[x_k,\ x_{k+1}]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上为初等函数，则 $f(x)$ 是 $[x_1,\ x_{n+1}]$ 上的初等函数。

若 x_1、x_{n+1} 改为 $-\infty$ 和 $+\infty$，相应的“$x_1\leqslant x\leqslant x_2$”改为“$x<x_2$”，“$x_n<x\leqslant x_{n+1}$”改为“$x>x_n$”则上述结论仍成立.(见[11]1990(3))

证明 注意到 $f(x)$ 在 $[x_k,\ x_{k+1}]$ 上为初等函数，故由初等

函数连续性知 $f(x_k+0)=f(x_k-0)=f(x_k)=f_{k-1}(x_k)$ $(k=2, \cdots, n)$，于是，只要令 $f_k(x_k)=f(x_k)(k=2, 3, \cdots, n)$，见参考文献[9]可证得。

2. 极　　限

18 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 的等价定义有哪些？

答 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 与下列说法等价：

(1) $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$;

(2) $\forall \varepsilon>0$, 仅有有限个 n 满足 $|a_n-a|\geqslant\varepsilon$;

(3) $\forall k>0$, $\exists N_k>0$, 当 $n>N_k$ 时, $|a_n-a|<\dfrac{1}{k}$;

(4) $\forall k>0$, 仅有有限个 n 满足 $|a_n-a|\geqslant\dfrac{1}{k}$;

(5) $\forall \mu<a<\eta$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $\mu<a_n<\eta$;

(6) $\forall \mu<a<\eta$, 至多有有限个 n 不满足 $\mu<a_n<\eta$;

(7^*) $\forall$ 包含 a 的开集 U, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, $a_n\in U$;

(8^*) $\forall$ 包含 a 的开集 U, 至多有有限个 n 使 $a_n\notin U$。

我们只证明(5)$\Leftrightarrow$(7^*)，其他见[1]。

(5)$\Rightarrow$(7^*) 设 U 是包含 a 的开集，由开集的构造[13]，必有开区间 $(\mu, \eta)\subset U$，且 $a\in(\mu, \eta)$，于是由(5)，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$a_n\in(\mu, \eta)\subset U$。

反之，显然。

(7)* 即为一般拓扑空间中数列极限定义。对于函数极限可参照上述等价定义类推。

19 证明数列极限通常有哪些方法？

答 通常有下列方法：

(1) 用定义(或等价定义)。在用定义证明极限时，可直接解

不等式；也可以先放大，再解不等式。在放大不等式时要掌握二条原则：放大后要较放大前简单；放大后要仍能趋于零；

（2）两边夹法则；

（3）实数连续性公理（单调有界原理）；

（4）柯西收敛准则；

（5）证数列$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$收敛于同一极限（或证x_{2n}与x_{2n+1}收敛于同一极限）。

20 下列用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}=0$ 的过程是否正确？

$\forall\varepsilon>0$，$\dfrac{1+n}{1+n^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n^2\varepsilon+\varepsilon-1-n>0$，只要

$$n<\frac{1-\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\text{ 或 }n>\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon},$$

当$0<\varepsilon<1$时，第一种情形$n<0$，不合题意，舍去。故只要

$$n>\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}.$$

于是，取

$$N=\left[\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right],$$

当$n>N$时，即有$\dfrac{1+n}{1+n^2}<\varepsilon$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}=0$。

答 正确．当$0<\varepsilon<1$时，上述证明中N有意义。若$\varepsilon>1$，则可取$\varepsilon'<1$，令相应上述证明的N，当$n>N$时$\dfrac{1+n}{1+n^2}<\varepsilon'$，于是，当$n>N$时，$\dfrac{1+n}{1+n^2}<\varepsilon$仍成立。

此类题一般先放大不等式，再解不等式。

21 下面 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$ 的证明是否正确？

$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{\varepsilon}<$

$2(2n+1)<6n$，所以，只要$n>\dfrac{1}{6\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{6\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，即有$\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$。

答 不正确。如 $\varepsilon=\dfrac{1}{11}$，$N=1$，$n=2>N$，但

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{2(2\times2+1)}\not<\frac{1}{11}.$$

错误在于：$6n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 不能保证 $2(2n+1)>\dfrac{1}{\varepsilon}$。

这里实际上采用了倒推证题方法。一定注意，每一步都要保证后者能够推出前者，否则将会出现错误。

22 若$n\to\infty$时，$x_n\cdot y_n$为无穷小，则在$n\to\infty$时，x_n，y_n至少有一为无穷小？

答 否。如 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，$y_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$。

23 两个非无穷小之和，必非无穷小？

答 否。如 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，$y_n=\dfrac{1}{n}-e$。

20—23题中的极限过程均可修改为对函数极限的各种情况，并对条件作相应修改，结论仍然一致。

24 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$均不存在，则$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))$与$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$也不存在？

答 否。后者可考虑

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x>0\\ -e^{-x}, & x\leqslant0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\cos x, & x\geqslant0\\ -\cos x, & x<0.\end{cases}$$

在$a=0$的情况。

对前者可考虑 $f(x)=x+\cos\dfrac{1}{x}$，$g(x)=-\cos\dfrac{1}{x}$，$a=0$。

25 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$、$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 不存在吗？

答 在假设条件下，$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ 不存在。$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 可能存在。如 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\operatorname{tg} x$，$a=0$；$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 可能不存在，如 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$g(x)=e^x$，$a=0$。

一般地，有下列结论成立。

定理 1 设 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 极限存在，且不为零，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 存在。

定理 2 设 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 极限存在，且 $f(x)$ 在 a 的某空心邻域内有界，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的必要充分条件是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 存在。

证明见[17]，1991.

26 若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$，$\lim\limits_{u\to A} f(u)=B$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x))=B$？

答 否。如

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{\sin u}{u}, & u\neq 0\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ p、q\text{ 互素},\ q\geqslant 1\\ 0, & x\text{ 为无理数或 } 0,\ 1.\end{cases}$$

这里 $R(x)$ 称为黎曼函数。$a=0$，$A=0$，$B=1$。

一般地，有下列命题成立。

命题 若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$，$\lim\limits_{u\to A} f(u)=B$，且满足下列条件之

一：(1) $f(u)$在 $u=A$ 连续；

(2) 在 a 的某空心邻域内不等于 A，则

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=B.$$

本命题是求极限时进行变量代换的理论根据，证明见 [1]，第三章。

27 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$，则当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}$ 为无穷大量？

答 否。若 $A=0$ 时不一定。

28 在计算极限时，当 $x\to a$ 时，$f(x)$、$g(x)$为无穷小，$f(x)\sim g(x)$，则 $f(x)$与 $g(x)$何时可以代换？

答 在计算乘积或商的极限时，可以用等价无穷小代换。这因，当 $g(x)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \dfrac{g(x)}{\varphi(a)}$（在积的情况同样考虑）

在计算和的极限时，显然可以代换。

对于乘积与和的混合运算，一般不可代换。

例如当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\mathrm{tg}x\sim x$，但通过计算知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\mathrm{tg}\,x}{x^3}=\frac{1}{2}\neq 0=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}.$$

下面针对这一类极限的计算问题，给出一个充分条件，至于其它情况，读者可参照讨论。

定理 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，$f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$，$g(x)\neq 0$，$f(x)\neq 0$，且 $g(x)=O(h(x))$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+\varphi(x)}{h(x)}=b\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{g(x)+\varphi(x)}{h(x)}=b.$$

证明 由 $f(x)\sim g(x)\ (x\to a)$，$g(x)\neq 0$，可得

$$f(x)=g(x)+o(g(x)),$$

于是