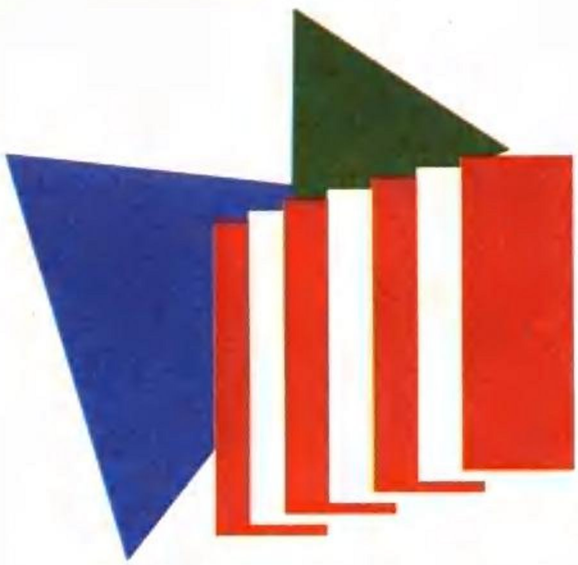
回归分析与经济数据建模

何晓群　编著



中国人民大学出版社

回归分析与经济数据建模

何晓群 编著

中 国 人 民 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

回归分析与经济数据建模/何晓群编著

北京：中国人民大学出版社，1996

ISBN 7-300-02280-4/F.680

Ⅰ.回…

Ⅱ.何…

Ⅲ.①回归分析-应用-经济-高等学校-教材②经济模型-高等学校-教材

Ⅳ.F224.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 22461 号

回归分析与经济数据建模

何晓群 编著

出版 发行：中国人民大学出版社

（北京海淀路 175 号 邮码 100872）

经　　销：新华书店

印　　刷：北京市丰台区印刷厂

开本：850×1168 毫米 1/32　　印张：14.75

1997 年 5 月第 1 版　1997 年 5 月第 1 次印刷

字数：364 000

定价：19.00 元

前　言

回归分析是统计学中的一个非常重要的分支，它在自然科学、管理科学和社会、经济等领域有着十分广泛的应用。从本世纪 90 年代起，随着统计学在中国被确立为一级学科，财经类院校统计专业的课程设置已有较大变化，加强数理统计内容的学习和应用已成为中国统计界的共识。本书正是为了适应新的统计学学科体系和财经类院校统计专业教学的需要而编著的。

本书写作的指导思想是：在不失严谨的前提下，明显不同于纯数学类教材，突出经济案例的应用和统计思想的渗透，较全面地系统介绍回归分析的基本理论和方法。

为了贯彻这一指导思想，本书在系统介绍回归分析基本理论和方法的同时，尽力结合中国社会、经济研究实例，把回归分析的方法与在社会、经济领域中的应用结合起来，注意定性与定量的紧密结合，努力把同行们以及自己在经济研究中应用回归分析的经验和体会融入其中。几乎每种方法都强调它们的优缺点和实际运用中应注意的问题，并对每章的内容给予综述性评注。考虑到读者已学过线性代数，所以，在大部分的推导中使用矩阵这个有力的工具。笔者认为这不仅对学生熟悉矩阵方法的应用和学习本书的内容有利，而且对后继课程的学习和自学一些新的统计学方法也会大有裨益。为使读者掌握本书内容，又考虑到这门课程的应用性和实践性，每章后面给出一些简单的思考与练习，我们鼓励读者自己利用一些经济数据去实现这些方法。回归分析的应用离不开计算机，本书的案例大都运用在我国已很流行的 TSP、 SPSS 软件实现。本书的一些重要应用案例和结论都注明了参考文献，有兴趣的读者可进一步阅读它们。

本书共分 14 章。第一章考虑到财经类专业学生的基础状况，回顾性地介绍了本书需要的一些预备知识；第二章为了给读者一个整体印象，对回归分析的研究内容和建模过程给出综述性介绍；第三章和第四章详细介绍了一元和多元线性回归的参数估计，显著性检验及其应用；第五章到第八章分别对违背回归模型基本假设的几种情况，从产生背景、诊断方法、处理方法等方面结合实际经济问题给予较详细的讨论；第九章介绍了回归变量选择与逐步回归方法；第十章和第十一章分别介绍了两种有偏估计方法，即岭回归和主成分回归。考虑到读者在读本书前还没有学习多元统计，所以本书用较大篇幅介绍了主成分的基本原理和应用；第十二章结合中国国债收入案例介绍了一个在样本容量 n 小于自变量个数时处理的新方法，即偏最小二乘法。考虑到这一方法的实现会有一定困难，本书的附录Ⅴ给出了我们用 C 语言编写的计算程序；第十三章介绍了可化为线性回归的曲线回归、分段回归、多项式回归，还结合笔者做过的一个实例介绍了真正非线性回归模型的计算，其实这个计算程序 TSP 软件中就有；第十四章结合案例分别介绍了自变量中含有定性变量和因变量是定性变量的回归问题，以及 Logistic 回归模型。

本书可作为财经类院校统计专业本科生和非统计专业研究生的回归分析教材，也可作为广大经济理论工作者和实际部门同志的参考书。由于本书的内容较多，教师在选用此书为教材时应有很大的自由度，书中打 * 号的章节完全可以不讲，许多内容及案例可一带而过，或让学生自己阅读。

在本书的写作过程中，始终得到中国人民大学教材编审委员会和中国人民大学出版社的支持。中国人民大学统计学系易丹辉、袁卫、赵彦云、倪加勋、于秀林、顾岚等几位教授给予作者许多

关怀和指导。写作大纲还得到我系兼职教授、著名统计学家张尧庭、陈希孺先生和中国科学院应用数学研究所方开泰教授的悉心指点，他们对本书的写作提出了许多很好的建议。特别是张尧庭先生认真审阅了本书的大部分初稿，提出了许多宝贵意见。作者接受了张先生提出的大部分意见。若现在书中仍有不妥之处，当属笔者自负。

我系博士生刘勤和硕士生张晓朴为本书的部分案例做过一些计算和验证。本书的大部分案例是作者多年所作课题的积累，有个别案例为体现其典型性引用他人著作。

在此，作者谨向对本书出版有过帮助的师长和朋友表示衷心的感谢。

由于本人水平所限，本书中难免有不足之处，尤其是在一些应用研究的体会性论述中，恐有偏颇之处，恳切希望读者批评指正。

何晓群

1996年5月4日于中国人民大学静园

第一章　有关预备知识

回归分析是以数理统计的基本理论为基础，它的理论推导和具体方法的实现以矩阵代数为主要工具。尽管读者已学过矩阵代数和数理统计的基本内容，但由于对这些内容的具体应用并不熟悉，学过之后印象自然也就不深。为了在回归分析的一些推导中用时更顺手些，本章主要对回归分析中要用的矩阵代数和数理统计内容给予回顾。当然本章还将涉及到一些读者过去没学过的内容。不论是过去已学知识的复习还是新知识的引入，本章只给出结果，对一些结果的证明有兴趣的读者请参见参考文献［1］或其他专著。

§1.1　向量与矩阵

一、定义与基本运算

1. 有关定义。由 $n\times p$ 个实数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, p)$ 排成的一个矩形数表，称为一个 n 行 p 列矩阵，并用 $\boldsymbol{A}$ 表示，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

有时也简记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times p}$，$a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素。当 $n=p$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵。若 $p=1$ 时，矩阵的形式为：

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

我们称它为 n 维列向量。当 $n=1$ 时，矩阵的形式为 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1p})$，我们称它为 p 维行向量。若 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为零，$\boldsymbol{A}$ 称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$。若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，方阵中下标重复的元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 称为主对角元素，其余元素称为非对角元素。若方阵只有对角元素不为零，非对角元素全为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵，记作

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

若对角矩阵其对角线上的元素全为 1，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶单位矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$

如果将矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times p}$ 的行与列彼此交换，得到的新矩阵是一 p 行 n 列矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

称它为 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的转置矩阵。

若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，且 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵；若 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为斜对称阵。根据定义，斜对称阵的对角元素必为零。

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 中，当 $i>j$ 时所有元素均为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵；当 $i<j$ 时所有元素均为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为下三角阵。

2. 基本运算。

(1) 两个 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 的和，定义为：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$$

(2) 实数 α 和 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积记作 $\alpha\boldsymbol{A}$，仍是 $n\times p$ 矩阵，

$$\alpha\boldsymbol{A}=(\alpha a_{ij})$$

(3) $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $p\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{jk})$ 的积记作 $\boldsymbol{AB}$，是 $n\times r$ 矩阵，它的第 (i,k) 元素为 $\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk}$，即

$$\boldsymbol{AB}=(\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk})$$

对于矩阵的加法，数乘与乘的运算，容易验证：

对加法满足结合律和交换律

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

对乘法满足结合律

$(\alpha\beta)\boldsymbol{A}=\alpha(\beta\boldsymbol{A})$，$(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\alpha(\boldsymbol{AB})$

$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

对乘法和加法满足分配律

$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$，$(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$

此外，矩阵的转置运算还有如下关系式：

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$，$(\alpha\boldsymbol{A})'=\alpha\boldsymbol{A}'$

$(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$

3. 矩阵分块。在矩阵运算中，往往先将矩阵"分块"再进行运算，这样做特别是对高阶矩阵会起到简化运算的作用。例如，将两个 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别分为四块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$，$\boldsymbol{B}_{ij}$ 为 $n_i\times p_j$ 子矩阵，$i=1$，2；$j=1$，2；$n_1+n_2=n$；$p_1+p_2=p$，则有

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}'_{11} & \boldsymbol{A}'_{21}\\ \boldsymbol{A}'_{12} & \boldsymbol{A}'_{22}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

$$\alpha\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha\boldsymbol{A}_{11} & \alpha\boldsymbol{A}_{12}\\ \alpha\boldsymbol{A}_{21} & \alpha\boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

又如，将 $n\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成如上四块，而将 $p\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分成如下四块：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}_{ij}$为 $p_i\times r_j$，$j=1$，2；$j=1$，2；$r_1+r_2=r$，则容易验证有下列分块乘法规律：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

当然，还可以按以上原则将矩阵分成更多的块进行运算，行块和列块的数目也不必相同。

二、矩阵的逆和秩

1. 方阵的行列式。由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素组成的行列式，叫做方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为$|\boldsymbol{A}|$或 $\det\boldsymbol{A}$。它有下面一些熟知的性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的某行(或列)元素全为零，则$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$；

(2) $|\boldsymbol{A}'|=|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\alpha\boldsymbol{A}|=\alpha^n|\boldsymbol{A}|$；

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 的两行(或列)成比例，则$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}$；

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 的两行(或列)互换，所得矩阵之行列式等于$-|\boldsymbol{A}|$；

(6) 若将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(或列)乘以一个常数加到另一行（或列）上，所得矩阵的行列式等于$|\boldsymbol{A}|$。

本书中还经常用到下列一些性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，…，$\boldsymbol{A}_k$ 是 n 阶方阵，则

$$|\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_k|$$

(2) 若分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$中，$\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{0}$，则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}|$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 阵，则

$$|I_m+AB|=|I_n+BA|$$

证明见参考文献［2］。

（4）若 A 为正交阵，则

$$|A|=\pm 1$$

（5）若 A 为三角阵，则

$$|A|=\prod_i a_{ii}$$

2. 逆矩阵。设 A 为 n 阶方阵，如果有 n 阶方阵 B，使得

$$AB=BA=I$$

则称 B 是 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}。逆矩阵有以下基本性质：

（1）$AA^{-1}=A^{-1}A=I$；

（2）$(A')^{-1}=(A^{-1})'$；

（3）若方阵 A 和 B 均有逆矩阵存在，则

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

（4）设 A 为 n 阶可逆阵，b 和 a 为 n 维向量，则方程

$$Ab=a$$

的解为：

$$b=A^{-1}a$$

（5）$|A^{-1}|=|A|^{-1}$；

（6）若 A 是正交矩阵，则

$$A^{-1}=A'$$

（7）若 A 是对角阵，$A=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$，且 $a_{ij}\neq 0$；$i=1,2,\cdots n$，则 $A^{-1}=\mathrm{diag}(a_{11}^{-1},\cdots,a_{nn}^{-1})$；

（8）设将可逆矩阵 A 分块为：

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，其中 A_{11} 和 A_{22} 为方阵，若 $|A_{11}|\neq 0$，则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} \\ -I \end{pmatrix}B^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1},\ -I)$$

其中 $B=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

若 $|A_{22}|\neq 0$，则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-I\\ A_{22}^{-1}A_{21}\end{pmatrix}D^{-1}(-I,\ A_{12}A_{22}^{-1})$$

其中 $D=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$

(9) 若 $|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，则

$$\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A & D\\ 0 & B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}$$

(10) 设方阵 A 的行列式 $|A|$ 分块为：

$$|A|=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}$$

当 $|A_{11}|\neq 0$ 时，则有 $|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$

当 $|A_{22}|\neq 0$ 时，则有 $|A|=|A_{22}|\cdot|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$

3. 矩阵的迹。设 A 为 n 阶方阵，A 的迹定义为它的对角线元素之和，记为 $\mathrm{tr}A$，即

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

对于方阵的迹显然有如下性质：

(1) $\mathrm{tr}A'=\mathrm{tr}A$；

(2) $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$；

(3) $\mathrm{tr}(\alpha A)=\alpha\mathrm{tr}A$；

(4) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}\ (BA)$。

4. 矩阵的秩。设 A 为 $n\times p$ 矩阵，若存在 A 的一个 r 阶子方阵的行列式不等于零，而 A 的一切 $(r+1)$ 阶子方阵的行列式均为零，则称 A 的秩为 r，记作 $rkA=r$。矩阵的秩具有如下性质：

(1) $rkA=0$，当且仅当 $A=0$；

(2) 若 A 为 $n\times p$ 阵，则 $0\leqslant rkA\leqslant\min(n,\ p)$；

(3) $rkA=rkA'$；

(4) $rk\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=rk\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}=rkA+rkB$；

(5) $rk(AB)\leqslant\min(rkA,\ rkB)$；

(6) $rk(A+B)\leqslant rkA+rkB$；

(7) 若矩阵 A 和 C 为可逆阵，则

$$rk(ABC)=rkB$$

三、特征根与特征向量

1. 特征根与特征向量的概念及性质。设 A 是 p 阶方阵，方程

$$|A-\lambda I_p|=0$$

是 λ 的 p 次多项式，它一定有 p 个根(可以是复的，也可能有重根)，这 p 个根称做矩阵 A 的特征根。若 λ_i 是 A 的特征根，则 $|A-\lambda_i I_p|=0$，这时一定存在一个非零的向量 l_i，使得

$$(A-\lambda_i I_p)l_i=0$$

或

$$Al_i=\lambda_i l_i$$

则称 l_i 为 A 的对应 λ_i 的特征向量。

下面列举一些关于特征根和特征向量的性质：

(1) A 和 A' 有相同的特征根。

(2) 若 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_p$ 为 A 的特征根，则 $A-kI_p$ 的特征根为 $\lambda_1-k,\ \lambda_2-k,\ \cdots,\ \lambda_p-k$；$kA$ 的特征根为 $k\lambda_1,\ k\lambda_2,\ \cdots,\ k\lambda_p$。这里 k 为常数。

(3) 若 $A=\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{pp})$，则 $a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{pp}$ 为 A 的 p 个特征根，相应的特征向量分别为 $e_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)'$，$e_2=(0,1,0,\cdots,0)'$，$\cdots$，$e_p=(0,\cdots,0,1)'$。

(4) 若乘积 AB 和 BA 有意义，则 AB 与 BA 有相同的非零特征根。

(5) 若 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_p$ 是 A 的特征根，A 可逆，则 A^{-1}的特征

根为 λ_1^{-1}，λ_2^{-1}，…，λ_p^{-1}。

（6）若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，则 $|\lambda_i(\boldsymbol{A})|=1$，$i=1$，2，…，$p$。

（7）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征根全为实数。故可按大小次序排成 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$。

（8）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，λ_i，λ_j 是它的两个不相同的特征根，则相应的特征向量 $\boldsymbol{l}_i$ 和 $\boldsymbol{l}_j$ 互相正交。若 λ_i 与 λ_j 相同，我们也可以选择使相应的 $\boldsymbol{l}_i$ 和 $\boldsymbol{l}_j$ 互相正交，这时 $\boldsymbol{A}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_i'$$

它称为 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解。

（9）若 $\boldsymbol{A}$ 是三角阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征根正好是它的对角元素。

（10）$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i, |\boldsymbol{A}|=\prod_{i=1}^{p}\lambda_i$。

2. 特征根的极值性质。特征根的极值性质在主成分分析的理论推导中很有用，下面我们讨论特征根的极值性质。

设 $\boldsymbol{A}$ 为 p 阶对称阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 λ_1，λ_2，…，λ_p，依大小顺序排列，设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$；$\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$，…，$\boldsymbol{l}_p$ 为相应的标准化特征向量，从谱分解式

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}'_i$$

$$\boldsymbol{I}=\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{l}_i\boldsymbol{l}_i'$$

可知，对任给 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{p}a_i\boldsymbol{l}_i$ 有

$$\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}=\frac{\sum_{i=1}^{p}\lambda_ia_i^2}{\sum_{i=1}^{p}a_i^2}$$

式中，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|^2$。由于 $\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$，…，$\boldsymbol{l}_p$ 组成 p 维空间中的一组标

准正交基，

$$x'Ax=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2 \qquad 从而$$

利用上面的等式可得到

$$\sup_{x\neq 0} x'Ax/x'x=\sup_{a\neq 0}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2/a'a=\lambda_1$$

$$\inf_{x\neq 0}\frac{x'Ax}{x'x}=\inf_{a\neq 0}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2/a'a=\lambda_p$$

仿照上述方法不难证明

$$\sup_{x'l_i=0} x'Ax/x'x=\lambda_{k+1}$$

$$i=1,\ \cdots,\ k$$

$$x\neq 0$$

若 $A'=A, B>0, \mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_p$ 为 A 相对于 B 的特征根，类似可得

$$\sup_{x\neq 0} x'Ax/x'Bx=\mu_1$$

$$\inf_{x\neq 0} x'Ax/x'Bx=\mu_p$$

若 $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p$ 为对应于 $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_p$ 的 $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ 的特征向量，则

$$\sup_{x'l_i=0} x'Ax/x'Bx=\mu_{k+1}$$

$$i=1,\ \cdots,\ k$$

$$x\neq 0$$

四、正定阵、非负定阵和投影阵

1. 二次型的矩阵表示。p 个变量 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p$ 的实二次型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)$，是指 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1p}x_1x_p+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2p}x_2x_p+\cdots+a_{pp}x_p^2=\sum_i^p\sum_j^p a_{ij}x_ix_j$，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,p)$是给定的实常数，称为

二次型的系数。

利用矩阵乘法二次型可表示为矩阵形式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_p) = \sum_{i}^{p}\sum_{j}^{p} a_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{x}'=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}$$为对称矩阵。

2. 正定阵、非负定阵。设有实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f(\boldsymbol{x})>0$,则称 $f(\boldsymbol{x})$为正定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，记作 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$；如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $f(\boldsymbol{x})<0$，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 为负定二次型，并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的，记作 $\boldsymbol{A}<\boldsymbol{0}$；如果对任何 $\boldsymbol{x}$，有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是非负定阵，记作 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}$。下面列举正定阵和非负定阵的一些性质：

(1) 一个对称阵是正(非负)定的，当且仅当它的特征根为正(非负)。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$亦正定。

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 p 阶正定阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $p\times g$ 阶矩阵($g\leqslant p$)，且 $rk\boldsymbol{B}=g$，则 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是正定的。

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定阵，则 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ 亦为正定阵，其中 $\boldsymbol{C}$ 为正数。

(5) 若 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}>\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}>\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}>\boldsymbol{0}$, 且 $|\boldsymbol{A}|>|\boldsymbol{B}|$。

(6) 若 $\boldsymbol{A}>\boldsymbol{0}$，将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_{11}$为方阵，则 $\boldsymbol{A}_{11}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}_{22}>\boldsymbol{0}$。$\boldsymbol{A}_{11.2}=\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}_{22.1}=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}>\boldsymbol{0}$。

(7) 若 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}$，因它是对称阵，则必存在一个正交阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=\boldsymbol{\Lambda}$$

其中，λ_1，…，λ_p 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，$\boldsymbol{T}$ 的列向量为相应的特征向量。于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T\Lambda T}'$$

(8) 由性质 1，λ_1，λ_2，…，λ_p 均非负，即 $\boldsymbol{\Lambda}\geqslant\boldsymbol{0}$。记 $f(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{diag}(f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_p))$，$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{T}'$，

特别 $\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{1/2},\cdots,\lambda_p^{1/2})$，

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{T\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{T}'$$

$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$称为 $\boldsymbol{A}$ 的平方根，由于 $\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\geqslant\boldsymbol{0}$，利用性质 3，得 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\geqslant\boldsymbol{0}$。综上所述，可得性质 9。

(9) 若 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{0}(>\boldsymbol{0})$，则存在 $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\geqslant\boldsymbol{0}(>\boldsymbol{0})$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$。

3. 投影阵。设 $\boldsymbol{A}$ 为 p 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵。对称的幂等阵称为投影阵，投影阵具有如下性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是投影阵，则 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=rk\boldsymbol{A}$。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是投影阵，则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 也为投影阵。

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的投影阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个特征根为 1，其余为 0，故满秩的投影阵必为单位阵。

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为投影阵，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$。

(5) 若 $\boldsymbol{X}$ 为 $n\times p$ 阵，$n\geqslant p$，$rk\boldsymbol{X}=p$，则 $\boldsymbol{P}_x=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ 是投影阵，且 $rk(\boldsymbol{P}_x)=p$。

§1.2 矩阵的分解和微商

一、矩阵的分解

矩阵的分解在多元分析中十分有用。下面列举出几个常用的结果。

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 p 阶对称阵，则存在一个正交阵 $\boldsymbol{T}$ 使

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{AT}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\equiv\boldsymbol{\Lambda}$$