测度与概率基础

中山大学概率论教研室编

广东科技出版社

内 容 简 介

本书介绍学习概率论，数理统计及随机过程所必须的测度论基础知识．主要内容有实值测度理论，勒贝格测度及勒贝格司帝阶测度，抽象勒贝格积分理论，可测变换，乘积空间，广义测度以及它们在概率中的应用．

读者对象：高等院校理工科师生，科学技术工作者．

测度与概率基础

中山大学概率论教研室编

*

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

中山大学印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 9印张140.000字

1981年11月第1版 1981年11月第1次印刷

印数 1—4.300册

书号 7182·32 定价：1.37元

序　言

测度论是进一步学习概率论、数理统计、随机过程以及现代控制和通讯理论的必要数学基础。本书介绍学习概率论所必须的测度论基础知识。主要内容有：实值测度理论，勒贝格测度及勒贝格-司帝阶测度，抽象勒贝格积分理论，可测变换，乘积空间，广义测度，以及它们在概率论中的应用。

本书可作为高等院校数学系概率论与数理统计专门组的基本教材，也可作为其他学科与工程技术人员学习近代概率论与数理统计知识的基础读物。

本书按照选材精炼而叙述详细的原则进行编写。因而与国外同类教材比较，本书具有简明扼要，深入浅出，概念叙述及定理证明详尽的特点，便于教学及读者自学。通过本书的学习，读者可望在较短时间内打好进一步学习概率论与数理统计的扎实基础。全书共八章。各章末附有习题。

本书由郑宗成同志执笔编写，编写时参考了郑曾同教授、梁之舜教授讲授测度论课程时的讲稿，内容上部分地吸取了刘良深副教授编写的《积分与测度理论初步》中的材料。本书初稿在中山大学曾多次使用和修改，但缺点错误仍难避免，希望读者指正。

编者

1981年7月

目　录

第一章　集与集族

§1　集及其运算

在一般实变函数论书中，对于集及其运算都作过详细的介绍，本节中我们仅作简略的复习，以使读者了解本书所用的符号。

在本书中，我们用大写字母A，B，C，…等表示集，用小写字母a,b,c…等表示它们的元素。记号$a\in A$表示元素a属于集A，而记号$a\overline{\in}A$表示元素a不属于集A。

设E与F为两个给定集，若E的每一元素都是F的元素，则称集E是集F的子集，或称集F包含集E，并记作

$$E\subset F \quad 或 \quad F\supset E.$$

若不特别声明，今后我们所讨论的集均为某给定集X的子集。

不包含任何元素的集，称为空集，恒用ϕ表示。显然对每一集E，恒有

$$\phi\subset E\subset X.$$

两集E和F，若满足

$$E\subset F \quad 和 \quad F\subset E$$

则称E与F相等，记为$E=F$。

设E与F是任意两集，由至少属于E，F两集之一的一切

元素所组成的集叫做E与F的并集，并记作$E\cup F$。

类似地可定义任意多个集的并集：设E_t，$t\epsilon T$，是任意一族集，其中T是不空指标集，那么由至少属于一个$E_t(t\epsilon T)$，的一切元素所组成的集，称为$E_t,t\epsilon T$，的并集，并记作$\bigcup\limits_{t\epsilon T}E_t$.特别地$n$个集$E_1,E_2\cdots E_n$的并集记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$,可列个集$E_i,i=1,2,\cdots$的并集记作$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$。

由同时属于集E及集F的一切元素所组成的集，称为E与F的交集，记作$E\cap F$。类似地可得$\bigcap\limits_{t\epsilon T}E_t$的意义：由同时属于每一个$E_t(t\epsilon T)$的一切元素所组成的集。

如果两个集E和F无公共元素，即

$$E\cap F=\phi,$$

则称E与F互不相交。若族集$\{E_t\}$，$t\epsilon T$，中的任意两个集互不相交，则称$\{E_t\}$，$t\epsilon T$两两不相交。显然有

$$E\cup\phi=E;\quad E\cap\phi=\phi.$$

若$E\subset F$，则

$$E\cup F=F;\quad E\cap F=E,$$

特别地

$$E\cup E=E;\quad E\cap E=E.$$

容易证明集的并与交满足下面的运算规律。

交换律：$E\cup F=F\cup E$；$E\cap F=F\cap E$。

结合律：$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$；

$$(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G).$$

分配律：$E\cap(F\cup G)=(E\cap F)\cup(E\cap G)$；

$$E\cup(F\cap G)=(E\cup F)\cap(E\cup G).$$

设E和F是任意两集，由一切属于E而不属于F的元素所组成的集叫做E与F的差集，并记作$E\backslash F$。容易证明集的并、交及差运算满足下述等式

$$E\backslash(F\cup G)=(E\backslash F)\cap(E\backslash G);$$

$$E\backslash(F\cap G)=(E\backslash F)\cup(E\backslash G).$$

我们称集$X\backslash E$为集E的余集并用E'表之。关于余集运算显然有下面这些等式

$$E\cap E'=\phi;\quad E\cup E'=X;$$

$$\phi'=X;\quad X'=\phi;\quad (E')'=E.$$

若$E\supset F$则

$$E'\subset F'.$$

设E_t，$t\in T$，是任一集族，则

$$(\bigcup_{t\in T}E_t)'=\bigcap_{t\in T}E_t',$$

$$(\bigcap_{t\in T}E_t)'=\bigcup_{t\in T}E_t',$$

上述两等式称为De Morgan公式。从它们可以看出集之并与交之间的对偶关系。

设E和F是任意两集，集

$$(E\backslash F)\cup(F\backslash E)$$

称E和F的对称差，并用$E\Delta F$表之。由定义可看出当$E\supset F$时，则有

$$E\Delta F=E\backslash F.$$

当$E\cap F=\phi$时，则

$$E\Delta F=E\cup F.$$

集的对称差运算显然满足交换律，即

$$E\Delta F=F\Delta E。$$

现证明对称差运算也满足结合律。

定理1.1 设E,F及G是给定的集，那末有

$$(E\Delta F)\Delta G=E\Delta(F\Delta G)。$$

证明 设$x\in(E\Delta F)\Delta G$,那未x属于且只属于下列两集之一：

$$(E\Delta F)\backslash G,\ G\backslash(E\Delta F),$$

这时x只能仅属于E,F,G中之一或x属于E,F,G三个集之交集.同理，当$x\in E\Delta(F\Delta G)$时亦有同样的情况。证完。

最后我们说明两个今后常用的记号。设P是与X的元素x有关的命题，我们用符号

$$\{x:\ P\}$$

表示X中使命题P成立的那些元素组成的集。

例如X为实数轴，$\{x:\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$表示实数轴上的闭区间$[0,1]$。

又如X为二维实数空间，集

$$\{(x,y):\ x,y\text{为实数且}x^2+y^2=1\}$$

为平面上以原点为中心的单位园周。

设P_1,P_2是两个命题，规定记号$P_1\Rightarrow P_2$的意义为：若命题P_1成立，则P_2亦成立。若$P_1\Rightarrow P_2$及$P_2\Rightarrow P_1$同时成立，那么我们称命题P_1，P_2是等价的，记作$P_1\Leftrightarrow P_2$。

§2 集的极限

设$E_1,E_2,\cdots,E_n\cdots$是X的子集组成的序列*) 我们分别定义

*) 今后集序列$E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$将简记为$\{E_n\}$.

$$\overline{\lim_n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k ,$$

$$\underline{\lim_n} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

为$\{E_n\}$的上极限和下极限。若

$$\overline{\lim_n} E_n = \underline{\lim_n} E_n$$

则称$\{E_n\}$的极限存在且以$\lim\limits_n E_n$表之，此时按定义有

$$\lim_n E_n = \overline{\lim_n} E_n = \underline{\lim_n} E_n .$$

我们用记号

$$\{x: x\in E_n, i.o.\}$$

表示X中属于无穷个E_n的元素x所组成的集。而用记号

$$\{x: x\in E_n, a.a.\}$$

表示X中只能不属于有限个E_n的元素x所组成的集。

定理1.2 对任意集序列$\{E_n\}$恒有

$$\overline{\lim_n} E_n = \{x: x\in E_n. i.o\} , \tag{1.1}$$

$$\underline{\lim_n} E_n = \{x: x\in E_n, a.a.\} . \tag{1.2}$$

证明 我们仅证明(1.1)式，(1.2)式可类似地证明。设$x\in \overline{\lim\limits_n} E_n$，那么由上极限的定义，对每一$n$，必有自然数$k_n$，使$x\in E_{k_n}$ 故

$$x\in \{x: x\in E_n\, i.o.\} .$$

反之若x属于(1.1)式右边，则对每一$n(n=1,2,\cdots)$，均存在$k\geqslant n$，使$x\in E_k$，从而$x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k$，由上极限的定义，我们有$x\in\overline{\lim\limits_n}E_n$。定理证完。

推论 1 $\underline{\lim\limits_n}E_n\subset\overline{\lim\limits_n}E_n$ 。

推论 2 改变集序列$\{E_n\}$的有限项不影响此集序列的上、下极限。

若集序列$\{E_n\}$满足$E_1\supset E_2\supset\cdots$我们将记为$E_n\downarrow$，若满足$E_1\subset E_2\subset\cdots$则记为$E_n\uparrow$。

定理1.3 设$\{E_n\}$为集序列，

1)若$E_n\downarrow$，则$\lim\limits_n E_n$存在且

$$\lim_n E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n,$$

2)若$E_n\uparrow$，则$\lim\limits_n E_n$存在且

$$\lim_n E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

证明 由定理1.2立即推得。

定理1.4 设$\{E_n\}$为任一集序列，F是X的任一子集，则

1) $$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\overline{\lim_n}E_n,$$

$$\underline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\underline{\lim_n}E_n,$$

2) $\overline{\lim_n}(F\cap E_n)=F\cap\overline{\lim_n}E_n$,

$\underline{\lim_n}(F\cap E_n)=F\cap\underline{\lim_n}E_n$,

3) $\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)=F\backslash\underline{\lim_n}E_n$,

$\underline{\lim_n}(F\backslash E_n)=F\backslash\overline{\lim_n}E_n$,

4) $\overline{\lim_n}(E_n\backslash F)=\overline{\lim_n}E_n\backslash F$,

$\underline{\lim_n}(E_n\backslash F)=\underline{\lim_n}E_n\backslash F$.

证明 我们仅证明1),3),4)的第一式，其余等式可以类似证明。

先证1)的第一式。设$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$，则$x$属于无穷个$F\cup E_n$，若$x\in F$，那么$x\in F\cup\overline{\lim_n}E_n$，于是

$$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)\subset F\cup\overline{\lim_n}E_n; \tag{1.3}$$

若$x\bar{\in}F$，则x属于无穷个E_n，因而$x\in\overline{\lim_n}E_n$，这样(1.3)式仍成立。

另一方面，若$x\in F\cup\overline{\lim_n}E_n$，则当$x\in F$时，便有$x$属于所有$F\cup E_n$，因而$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$；如果$x\in\overline{\lim_n}E_n$，则由

$$\overline{\lim_n}E_n\subset\overline{\lim_n}(F\cup E_n)$$

知，$x\in\overline{\lim_n}(F\cup E_n,)$这样便得

$$F\cup\overline{\lim_n}E_n\subset\overline{\lim_n}(F\cup E_n). \tag{1.4}$$

由(1.3)和(1.4)式得

$$\overline{\lim_n}(F\cup E_n)=F\cup\overline{\lim_n}E_n.$$

这便证明了1)的第一式。

往证3)的第一式。设$x\in\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)$，则$x$属于无穷个$F\backslash E_n$,从而$x\in F$且$x$属于有限个$E_n$，也即$x\in F\backslash\underline{\lim_n}E_n$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)\subset F\backslash\underline{\lim_n}E_n\ . \tag{1.5}$$

反之设$x\in F\backslash\underline{\lim_n}E_n$,那么$x\in F$且$x$属于有限个$E_n$,因而$x\in\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(F\backslash E_n)\supset F\backslash\underline{\lim_n}E_n\ . \tag{1.6}$$

由(1.5)和(1.6)即得3)的第一式。

往证4)的第一式。设$x\in\overline{\lim_n}(E_n\backslash F)$，那么$x$属于无穷个$E_n\backslash F$，从而$x$属于无穷个$E_n$且不属于$F$，也即$x\in\overline{\lim_n}E_n\backslash F$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(E_n\backslash F)\subset\overline{\lim_n}E_n\backslash F. \tag{1.7}$$

反之设$x\in\overline{\lim\limits_n}E_n\setminus F$，则$x$属于无穷个$E_n$且不属于$F$，故$x\in\overline{\lim\limits_n}(E_n\setminus F)$，这样便得

$$\overline{\lim_n}(E_n\setminus F)\supset\overline{\lim_n}E_n\setminus F\ . \tag{1.8}$$

由(1.7)和(1.8)两式即得4)的第一式。

推论 在定理的条件下，若更设$\lim\limits_n E_n$存在，则我们有

1) $\lim\limits_n(F\cup E_n)=F\cup\lim\limits_n E_n$，

2) $\lim\limits_n(F\cap E_n)=F\cap\lim\limits_n E_n$，

3) $\lim\limits_n(F\setminus E_n)=F\setminus\lim\limits_n E_n$，

4) $\lim\limits_n(E_n\setminus F)=\lim\limits_n E_n\setminus F$.

§3 集族及几种常用的集族

今后，我们将常常考虑某固定集X和以X的子集为元素的集，为明确起见，我们把以X的子集为元素的集，称为X上的集族，在不会混乱的场合下，将简称为集族。本书中集族将用粗体字母**A**，**B**…来表示。因集族中的元素是集，所以今后术语“集族**A**中的元素”和“集族**A**中的集”将表示同一意义。因集族是一种特殊的集，故关于集的记号和术语，可以同样地用之于集族。例如E是X的一个子集，**E**为X上的集族，则记号

$$E \in \mathbf{E}$$

表示集E属于集族$\mathbf{E}$，或者说E是$\mathbf{E}$中的一个元素。

设$\mathbf{E}$和$\mathbf{F}$是X上任意两个集族，则记号

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$$

表示$\mathbf{E}$中每一集都属于$\mathbf{F}$。

又如T是不空指标集，对于每一$t \in T$，$\mathbf{F}_t$是X上的集族，则符号$\bigcap_{t \in T} \mathbf{F}_t$表示集族$\mathbf{F}_t$，$t \in T$，的交即

$$\bigcap_{t \in T} \mathbf{F}_t = \{ E : E \in \mathbf{F}_t, \text{对一切} t \in T \}.$$

类似地可以理解集族的并，两集族的差等概念。

设$\mathbf{E}$是一集族且满足条件："若$E \in \mathbf{E}$，$F \in \mathbf{E}$，则$E \cap F \in \mathbf{E}$" 我们将称$\mathbf{E}$对交运算封闭。

又如$\mathbf{E}$满足条件："若$E_n \in \mathbf{E}$，$n = 1, 2, \cdots$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{E}$"

则称$\mathbf{E}$对可列并运算封闭"。

下面我们介绍几种常用的集族。

设$\mathbf{P}$为一集族，且满足下列三个条件：

1) $\phi \in \mathbf{P}$，

2) 若$A, B \in \mathbf{P}$，则$A \cap B \in \mathbf{P}$，

3) 若$A, B \in \mathbf{P}$且$A \supset B$则

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$$

其中每一个C_k均属于$\mathbf{P}$且$C_i \cap C_j = \phi (i \neq j)$，则称$\mathbf{P}$为半环。

显然若$\mathbf{P}$为半环，那么$\mathbf{P}$中任二元素A，B之差$A \setminus B$必能表为$\mathbf{P}$中有限个两两不相交的集之并。

例1 记全体实数所成的集为R，a，$b \in R$且$a \leq b$，那么我

们把集

$$\{ x: a \leq x < b \}$$

称为R中的左闭右开区间，简称半开闭区间，并记作$[a,b)$。R中全体半开区间构成一个半环。

例2 设R^n为n维实数空间(即n维欧几里得空间)，又设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为R^n中两元素且$a_i \leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,n$。那末R^n中满足下列关系

$$a_i \leqslant x_i < b_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

的元素$x=(x_1,x_2\cdots,x_n)$所组成的集称为R^n中的半开闭区间。R^n中全体半开闭区间构成一个半环。

例3 设X为任意集，用**B**(X)表示X中全体子集组成的集族，则**B**(X)为半环。只含ϕ集的集族$\{\phi\}$亦是一个半环。

例4 设X为任意集，X中全体单点集连同ϕ集构成一个半环。

设**R**为不空集族，且满足下述条件：若E，F$\in$**R**，则E$\cup$F$\in$R，E\F$\in$**R**，那么我们称**R**为环。换句话说：如果一个非空集族对于并及差两种运算是封闭的，那么它就是一个环。

例3中的集族也是环。

例5 设X是无穷集，则由X中一切有限子集组成的集族是环。

容易证明，凡环必是半环，反之半环不一定是环。上面例1，例2及例4中的集族均是半环，但它们都不是环。

定理1.5 设R为不空集族，则下列1) 2) 3)都是使R为环的充要条件：

1) 若E，$F\in$**R**，则$E\cap F\in$**R**，$E\Delta F\in$**R**。