无界函数逼近

王仁宏 著

科 学 出 版 社

无界函数逼近

王仁宏 著

科学出版社

1983

内 容 简 介

本书较系统地介绍了无界函数的各种逼近方法，其中包括 Бернштейн 学派的主要成果和七十年代前后国外某些学者的有关结果并包括徐利治教授与著者自六十年代初以来所获得的一些研究成果．以及作者本人所引进的拟局部正线性算子及其扩展乘数法原理、逼近算子对无界函数的逼近阶的各种估计式、逼近算子的构造理论与方法等等．

本书可供函数论、数值逼近论等方面的研究人员、科技工作者、大学教师及高年级学生参考．

无界函数逼近

王仁宏 著

责任编辑 张启男 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年4月第一版 开本：850×1168 1/32

1983年4月第一次印刷 印张：7 7/8

印数：0001—6,700 字数：203,000

统一书号：13031·2212

本社书号：3026·13—1

定价： 1.50 元

序　　言

无界函数，特别是大范围无界函数的逼近理论的重要意义是无容置疑的．我们知道，大范围无界函数逼近问题的研究是本世纪二十年代才由 С. Н. Бернштейн 和以他为首的苏联学派所开创的．他们主要考虑了指数型超越整函数和多项式带权逼近方法，得到了许多有意义的理论成果．其中 Бернштейн 问题和 Pollard 等人的工作，是多项式带权逼近理论中的一个十分卓越的成就．所有这一部分经典性结果，我们在本书的第二章中都作了重点介绍．

1937年，苏联 И. Н. Хлодовский 曾将 Бернштейн 多项式变形，使之可用以逼近半实轴上的一类无界连续函数．1961 年徐利治[9]复苏了 Хлодовский 的思想，讨论了一般线性正算子逼近无界连续函数的问题，得到了较为一般的结果．其后徐利治又与著者一起在文献[9]的基础上做了一系列的工作[10-24]，给出了所谓“扩展乘数法”的一般原理及其具体应用．扩展乘数法的重要特点之一，就是能用以变形或改造各种具体的显明多项式算子，使之对定义在全空间上的各种无界函数都具有可逼近的性质．另一个特点是，在使用扩展乘数法时，无界函数类的增长阶实际上是不受任何限制的（见第三章）．显然上述一系列结果，可以看作是经典 Weierstrass 逼近定理在两个方面，也就是在函数定义域与无界性方面的推广．本书第三章和第四章分别就线性正算子和拟局部正线性算子给出了扩展乘数法的基本原理和它们的具体应用．而第五章主要讨论线性算子的逼近阶的各种估计，其中有些内容并不仅限于无界函数的逼近问题．

为使读者便于阅读本书，我们在第一章“引论”里特别概述了一些有关的基本知识．为了便于从事逼近理论和应用的科技工作

者了解和应用各种算子的已有成果，在第六章里我们还罗列了著者所能查找到的各种线性算子及其逼近性质.

现在简单地说一下本书的写作过程. 1977 年 4 月间，徐利治教授曾建议著者写作一本有关无界函数逼近方面的专门著作. 其后，在本书的整个写作过程中，他给予了热情的鼓励和帮助，并且在本书初稿完成后，又对本书初稿进行了审阅，提出了许多宝贵意见. 借此机会，谨向徐利治教授深切致谢. 另外，厦门大学数学系陈文忠副教授为帮助写好第六章，曾向著者提供了几十种线性算子的宝贵资料. 本书初稿还曾在吉林大学数值逼近讨论班报告过几次. 对于陈文忠副教授和吉林大学数值逼近讨论班的全体同志的鼓励和帮助谨致衷心的谢意.

由于著者水平所限，书中一定会有不妥之处，敬请读者指正.

王仁宏

1979 年 4 月于长春

目　录

第一章　引　　论

本书是一本专门讨论无界函数逼近问题的著作. 在讨论过程中必然会涉及到一些虽然不是本书的直接议题，但却也是展开本书的一些必要的预备知识.

鉴于以上情况，在本章中我们将以引论的形式，比较集中地、有时还不加证明地介绍一些有用的工具性的知识. 例如泛函分析中的各种空间、重要不等式以及线性算子理论，无穷大的强度的 Du Bois-Reymond 定理，概率论中的 Laplace 公式以及多重渐近积分定理等等.

特别在 §2 中，我们将介绍经作为典 Weierstrass 逼近定理一种推广形式的 Stone-Weierstrass 逼近定理. 它是指明逼近可能性的一个十分重要的定理.

后面各章所论无界函数的收敛性结果，均可看作是 Stone-Weierstrass 逼近定理在另一方向上的推广.

§1. 泛函分析的某些预备知识

函数逼近论的基本研究课题是：设已知某函数类 $\mathscr{F}$ 中的一函数 $f(x)$，欲在函数类 $\mathscr{F}$ 的某子类 $\mathscr{P}$ 中寻求函数 $p(x)$，使得 $p(x)$ 能够较好地近似给定函数 $f(x)$.

这里首先遇到的一个问题，是用什么"标准"来衡量 $f(x)$ 与 $p(x)$ 的"近似"程度？ $p(x)$ 与 $f(x)$ 的近似程度也就是它们的"偏差"，而 $p(x)$ 与 $f(x)$ 作为某空间中的元素（点）来说，它们的偏差就是它们之间的距离. 那么，按数学的观点来说，距离这个量应该具有什么特性呢？泛函分析中度量空间的概念给这个问题予以明确的回答.

定义 1.1　由某些元素 x，y，z 等等组成的集合 E 称为度量

空间，如果对其中任意两个元素 x，y 都有唯一的实数 $d(x, y)$ 与之相对应，它们满足下列公理：

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \quad d(x, y) \geqslant 0; \\
&2^\circ \quad d(x, y) = 0, \text{ 当且仅当 } x = y; \\
&3^\circ \quad d(x, y) = d(y, x); \\
&4^\circ \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

此时称 $d(x, y)$ 为元素 x 与 y 的距离.

度量空间 E 中元素 x 为元素序列 $\{x_n\}$ 的极限，如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

此时记之为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 或 } x_n \to x.$$

E 中元素序列 $\{x_n\}$ 称为基本序列，如果对任给 $\varepsilon > 0$，有自然数 $N = N(\varepsilon)$ 存在，使当 $n, m \geqslant N$ 时，恒有

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

如果 E 中任一基本序列都收敛于 E 中某元素，则称 E 是完备(完全)的.

定义 1.2 一个线性空间 E 是这样一些 x，y 等元素的集合：

1° 在 E 的元素之间定义了一个“加法”运算“$+$”，对于这个运算而言，E 成为一个交换群，它的零元素记为 $\mathbf{0}$;

2° 定义了集合 E 中元素与数(实或复) α, β, γ, $\cdots$ 的乘法，满足

$$
\begin{aligned}
&\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \\
&(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \\
&\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \\
&1 \cdot x = x, \\
&0 \cdot x = \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

定义 1.3 一个线性空间 E 称为线性赋范空间，如果对于 E 中任一元素 x 都有唯一的一个实数 $\|x\|$ 与之对应，这个数称为元素 x 的范数(或模)，它满足下列公理：

1° $\|x\| \geqslant 0$;

2° $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = \mathbf{0}$;

3° 对每个数 α (实或复),均有

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|; \tag{1.3}$$

4° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

显然,只要定义

$$d(x, y) = \|x - y\|, \tag{1.4}$$

则由式(1.3)不难推出式(1.1)中的各个性质. 从而线性赋范空间是一个度量空间.

按式(1.4)引入距离概念后,线性赋范空间 E 中的元素序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 或 } x_n \to x$$

意即

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \tag{1.5}$$

这种收敛性称为按范数收敛.

如果一个线性赋范空间在按范数收敛的意义下是完备的,则称之为 Banach 空间或 B 型空间.

例 1 在 n 维向量空间 E_n,在通常向量加法和数乘运算的前提下,只要如下定义元素(向量) $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的范数

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2}, \tag{1.6}$$

则不难验证 E_n 为一个 Banach 空间.

例 2 连续函数类 $C[0, 1]$,在通常函数加法和数与函数乘法的前提下,若令 $x = x(t)$ 的范数为

$$\|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|, \tag{1.7}$$

则可验证 $C[0,1]$ 是 Banach 空间.

例 3 只须对于 $x(t) \in L_p(0, 1)$, $(p \geqslant 1)$ 令

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, \tag{1.8}$$

则可知 $L_p(0,1)$ 是 Banach 空间.

Banach 空间的例子还很多,这里就不一一列举了.

在 n 维实(复)向量空间 E_n 中,除向量的加法运算及向量与实(复)数的乘法运算外,还定义了向量间的内积运算:向量

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \text{ 和 } y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

的内积为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i. \tag{1.9}$$

而 x 的范数(或长度)与内积的关系为

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}=\sqrt{(x,x)}. \tag{1.10}$$

定义 1.4 如果线性空间 H 满足:

1° H 中每一对元素 x,y 都有一个复数 (x,y) 与之相对应,该复数称为 x 与 y 的内积(数量积),满足

a) $(x,y)=\overline{(y,x)}$;

b) 对任意复数 α,β 均有

$$(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha(x_1,y)+\beta(x_2,y); \tag{1.11}$$

c) $(x,x)\geqslant 0$ 并且当且仅当 $x=\mathbf{0}$ 时才取等号;

2° 取实数 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 为元素 x 的范数时,H 是一个线性赋范空间;

3° 在度量 $d(x,y)=\|x-y\|$ 的意义上 H 是完备的.

则称 H 是一个 Hilbert 空间. 满足条件 1° 的线性空间称为内积空间.

例 1 中指出的 n 维向量空间 E_n 不仅是一个 Banach 空间,而且在式(1.9)表示的内积定义下还是一个 Hilbert 空间.

复空间 $L_2^{(\rho)}(0,1)$ 在对元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 如下定义内积

$$(x,y)=\int_0^1 x(t)\bar{y}(t)\rho(t)dt \tag{1.12}$$

时,就是一个 Hilbert 空间. 特别地 $L_2(0,1)$ 是 Hilbert 空间,其中

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\bar{y}(t)dt. \tag{1.13}$$

同样实空间 $L_2^{(\rho)}(0, 1)$ 和 $L_2(0, 1)$ 也是 Hilbert 空间. 只要把定义 (1.12) 和 (1.13) 作相应改变就可以了.

为了介绍 Hölder 和 Minkowski 不等式,需要下述引理:

引理 1.1 若 $x, y \geqslant 0$, $a, b > 0$ 且 $a + b = 1$, 则

$$x^a y^b \leqslant ax + by. \tag{1.14}$$

并且(1.14)中等号当且仅当 $x = y$ 时成立.

证明 设 $t > 1$, $m < 1$, $f(t) = t^m$. 由中值定理

$$f(t) = f(1) + (t-1)f'(\xi), \quad 1 < \xi < t.$$

所以 $t^m = 1 + (t-1)m\xi^{m-1}$. 因为 $\xi^{m-1} < 1$,

$$t^m < 1 + m(t-1).$$

假定 $x > y > 0$. 令 $t = x/y > 1$, $m = a$,而此时 $b = 1 - m$. 于是由上式,得到

$$(x/y)^a < 1 + a(x/y - 1)$$

或

$$x^a y^{1-a} < y + a(x - y) = ax + (1-a)y.$$

从而

$$x^a y^b < ax + by.$$

至于 $0 < x < y$, 只须变换 a 和 b 的地位则可得同一个不等式. 如果 $x = y$, 则

$$x^a y^b = x^{a+b} = x = ax + bx.$$

引理 1.2 (Hölder 不等式) 设 x_k 和 y_k 是复数. 若 $p > 1$, 且 $1/p + 1/q = 1$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}. \tag{1.15}$$

证明 在引理 1.1 中, 令

$$x = \frac{|x_k|^p}{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}, \quad y = \frac{|y_k|^q}{\sum_{k=1}^n |y_k|^q},$$

$$a = 1/p, \quad b = 1 - 1/p = 1/q,$$

则有

$$\left(\frac{|x_k|^p}{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}\right)^{1/p}\cdot\left(\frac{|y_k|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}\right)^{1/q}\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{|x_k|^p}{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|y_k|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}. \tag{1.16}$$

对上式令 k 从 1 到 n 求和并两边各乘以

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q},$$

则得到

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}. \tag{1.17}$$

再根据

$$\left|\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k|, \tag{1.18}$$

即可证得 Hölder 不等式(1.15). 为使式(1.16)中取等号(从而式(1.15)取等号),必须有

$$\frac{|x_k|^p}{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}=\frac{|y_k|^q}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q},\ k=1,2,\cdots,n.$$

即

$$|x_k|^p=C|y_k|^q,\ k=1,2,\cdots,n, \tag{1.19}$$

其中 C 是常数;而且,除

$$x_ky_k=|x_ky_k|\cdot e^{i\theta},\ \theta=\text{常数},\ k=1,2,\cdots,n \tag{1.20}$$

外,式(1.18)中恒取"$<$"号. 所以式(1.15)取等号,必须且只须式(1.19)和(1.20)同时被满足.

定理 1.3 (Minkowski 不等式) 若 $p\geqslant 1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}. \tag{1.21}$$

证明 若 $p=1$，则式(1.21)可直接从三角不等式导出．若 $p>1$，

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}.$$

由 Hölder 不等式(注意其中 $1/p+1/q=1$)

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}.$$

类似地，有

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}.$$

综合以上两式，并用 $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}$ 去除即可证得 Minkowski 不等式 (1.21).

为使式 (1.21) 中取等号，必须有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q},$$

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}\tag{1.22}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\cdot|x_i+y_i|^{p-1}=\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1}.\tag{1.23}$$

由引理 1.2 的注记，可从式(1.22)推出

$$|x_i|^p=C_1|x_i+y_i|^p,\ |y_i|^p=C_2|x_i+y_i|^p,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

假定 x_i 和 y_i 都不全为零，

$$|x_i| = C|y_i|, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 C 为常数；因为除 α 与 β 具有相同的方向外，总有

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|.$$

于是从式(1.23)我们推出

$$x_i = |x_i|e^{i\varphi}, \ y_i = |y_i|e^{i\varphi}, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以

$$x_i = Cy_i, \ i = 1, 2, \cdots, n; \ C > 0. \tag{1.24}$$

定义 1.5 从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的映射 $g = L(f)$ 称为线性算子，如果对一切 $f_1, f_2 \in X$ 和一切数 α，恒满足条件

$$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2),$$
$$L(\alpha f_1) = \alpha L(f_1).$$

特别地，如果 Y 就是实直线 R，则称 L 为(实)线性泛函数.

线性算子 L 称为是有界的，如果存在某正数 M，使得对一切 $f \in X$，均有

$$\|L(f)\| \leqslant M\|f\|. \tag{1.25}$$

注意 $\|L(f)\|$ 与 $\|f\|$ 这两个范数分别是取在 Y 与 X 上的. 使式(1.25)成立的所有正数 M 的下确界称为线性算子 L 的范数(或模)，记为 $\|L\|$. 显然有下列“基本不等式”成立

$$\|L(f)\| \leqslant \|L\| \cdot \|f\|. \tag{1.26}$$

同时也应有

$$\|L\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|L(f)\|}{\|f\|} = \sup_{f \neq 0} \left\| L\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \right\| = \sup_{\|f\|=1} \|L(f)\|. \tag{1.27}$$

可以断言，有界的线性算子必然是连续的，即从 $f_n \to f$ (按 X 的范数)可推出 $L(f_n) \to L(f)$ (按 Y 的范数). 事实上，由基本不等式知

$$\|L(f_n) - L(f)\| \leqslant \|L\| \cdot \|f_n - f\|.$$

从而连续性是显然的.

有时我们采用更为清晰的记号来表示线性算子. 比如当 $X=C(D)$ 时,线性算子 $L(f)$ 在 $x\in D$ 处的值常记为 $L(f;x)$.

定理 1.4 (Banach) 设线性算子序列在 Banach 空间 X 的每一点都自收敛,则这些线性算子的范数序列$\{\|L_n\|\}$必有界.

证明 假若不然,则 $\{\|L_n(x)\|\}$ 在任意闭球 $\|x-x_0\|\leqslant\delta$ 上无界. 事实上, 假如对所有的 n 和某一闭球 $\bar{S}(x_0,\delta)=\{x\in X|\ \|x-x_0\|\leqslant\delta\}$ 内所有的 x 都有

$$\|L_n(x)\|\leqslant K,$$

则对任意元素 y, 元素

$$y'=\frac{\delta}{\|y\|}y+x_0$$

属于这个球. 从而

$$\|L_n(y')\|\leqslant K$$

或

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|L_n(y)\|-\|L_n(x_0)\|\leqslant\left\|\frac{\delta}{\|y\|}L_n(y)+L_n(x_0)\right\|\leqslant K,$$

即

$$\|L_n(y)\|\leqslant\frac{K+\|L_n(x_0)\|}{\delta}\|y\|.$$

因为序列$\{L_n(x_0)\}$是收敛的,所以序列$\{\|L_n(x_0)\|\}$是有界的,因此有 K_1 存在,使

$$\|L_n(y)\|\leqslant K_1\|y\|.$$

从而 $\|L_n\|\leqslant K_1$, 这同开始的假定矛盾.

现设 $\bar{S}_0$ 是X内任一闭球,于其上序列$\{\|L_n(x)\|\}$无界, 因此存在这样的算子 L_{n_1} 和元素 $x_1\in\bar{S}_0$,使得

$$\|L_{n_1}(x_1)\|>1.$$

又由算子 L_{n_1} 的连续性,这个不等式在某一闭球 $\bar{S}_1(x_1,\delta_1)\subset\bar{S}_0$ 内也满足. 其次,在闭球 $\bar{S}_1$ 上序列 $\{\|L_n(x)\|\}$ 也无界,因而可决定一算子 $L_{n_2}(n_2>n_1)$ 和一元素 $x_2\in\bar{S}_1$,使得

$$\|L_{n_2}(x_2)\|>2.$$

再由 L_{n_2} 的连续性, 这不等式在某一闭球 $\bar{S}_2(x_2,\delta_2)\subset\bar{S}_1$ 内也满