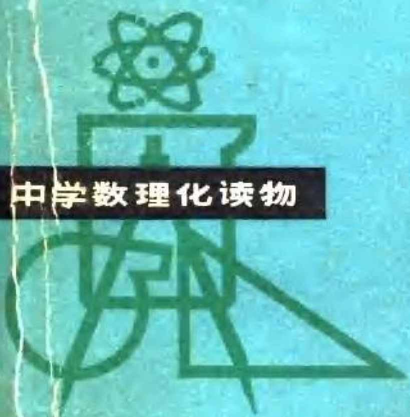
中学数理化读物



数学

复习参考资料

北京出版社

中学数理化读物

数学复习参考资料

北京师范大学
附属实验中学

北京出版社

中学数理化读物
数学复习参考资料
北京师范大学
附属实验中学
*
北京出版社出版
北京市新华书店发行
北京印刷三厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 14.5印张 270,000字
1978年5月第1版 1979年3月第2版
1979年3月第1次印刷
书号：7071·537 定价：0.93元

编辑说明

为了帮助广大青年和在校学生学习中学数理化基础知识，我们编辑了《中学数理化读物》。

这套读物包括供工农兵、青年和学生自学、复习的参考资料以及习题集等不同种类的数学、物理、化学方面的书籍。

在编写时，注意从实际出发，参照中学教学大纲，力求比较系统地叙述数理化的基础知识。我们希望通过学习这套读物，有助于广大青年进一步学好自然科学基础理论，为向工业、农业、科学技术和国防现代化进军打下一定的基础。

由于我们水平有限，又缺乏编辑这类读物的经验，缺点和错误在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

外
6
一

目　　录

第一章　数

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学.

数是数学中主要的也是基本的概念之一，本章主要复习各种数的概念、性质及运算.

在中学数学的范围内，所学各种数的范围可归纳为如下数系表：

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 自然数（正整数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（正、负）
        - 有限小数
        - 无限循环小数
    - 无理数（正、负）——无限不循环小数
  - 虚数 $(b\neq 0)$

§1　实　数

复习提要

一、自然数

自然数就是 1，2，3，……，n，…….

1. 自然数的性质：

（1）自然数是无限多的；它有最小的数 1，没有最大的数；

（2）任意两个自然数都可以比较大小，即自然数是有顺序的；

（3）在自然数的范围内可以进行加法和乘法运算，当被减数比减数大的时候，可以进行减法运算．

2．质数与合数：

质数：除 1 以外的自然数中，只能被 1 和这个数本身整除的数，叫做质数(或素数)．

合数：不但能被 1 及本身整除，还能被其它的数整除的自然数叫做合数．

1 既不是质数，也不是合数．

3．分解自然数成质因数的连乘积时，相同的质数要写成乘方的形式；合数分解成质因数时，只能得到一种结果．

例如：$720=2\times2\times2\times2\times3\times3\times5=2^4\cdot3^2\cdot5$．

4．分解质因数的应用：

（1）求两个数或几个数的最大公约数

例如：求 84，180，264 的最大公约数

先分解质因数：$84=2^2\times3\times7$，

$180=2^2\times3^2\times5$，

$264=2^3\times3\times11$；

这几个数的公约数含有 2 的最高次幂是 2^2，含有 3 的最高次幂是 3，此外再无其它公约数，因此，最大公约数是 $2^2\times3=12$．

（2）求两个数或几个数的最小公倍数

例如：求 48，56，105，225 的最小公倍数．

先分解质因数：$48=2^4\times3$，$56=2^3\times7$，$105=3\times5\times7$，$225=3^2\times5^2$；

这些数的公倍数一定含有约数 2、3、5、7，而且它们的幂指数至少等于在各分解式当中同一底的最高的幂指数，因此，最小公倍数应是 $2^4\times3^2\times5^2\times7=25200$.

（3）如果两个自然数的最大公约数是 1，则称这两个数互质。例如，4 和 9 是互质的.

二、有理数

1．定义：设 p，q 为整数，若 $q\neq0$，形如$\frac{p}{q}$的数叫做有理数.

有理数包括正负整数、零以及正负分数，因为它们都可以表示成$\frac{p}{q}(q\neq0)$的形式.

注意：（1）以零作分母的分数没有意义；

（2）可以通过约去公因数的方法，使得有理数$\frac{p}{q}$的分子分母互为质数；

（3）可以使有理数$\frac{p}{q}$的分母均为正数. $\left(如\frac{3}{-2}=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}\right)$.

2．性质：

（1）有理数中，既没有最小的数，也没有最大的数；

（2）有理数可以比较大小；

（3）在有理数范围内，可以进行加、减、乘、除（零不作除数）的运算.

3．运算法则：

运算 \ 法则 \ 原数	同号		异号	
	符号	绝对值	符号	绝对值
加	保持原号	相加	同绝对值较大者	相减
减	减去一个数等于加上它的相反数，然后按加法作			
乘	+	相乘	-	相乘
除	+	相除	-	相除

注意：(1) 任何数加零或减零还等于原数。

(2) 零乘以或除以任何数都得零。

4．乘方运算

(1) 定义：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{个}}$.

其中 a 是底数，n 叫做指数，a^n 叫作幂。

(2) 法则

i. $a=0$ 时，$a^n=0$；

ii. $a>0$ 时，$a^n>0$；

iii. $a<0$ 时，n 为偶数，$a^n>0$；

n 为奇数，$a^n<0$.

三、实数

1．方根：

(1) 定义：若 $x^n=a$，则 x 叫做 a 的 n 次方根（n 为自然数），记作 $\sqrt[n]{a}$；

显然，$(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）符号法则：

① 正数的偶次方根有两个值，这两个值的绝对值相等，而符号相反；

② 负数的偶次方根不存在；

③ 奇次方根的符号与被开方数的符号相同，

例如：$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$.

④ 0的方根是0.

2．算术根：

（1）定义：正数a的n次方根的正值叫做算术根，符号仍是$\sqrt[n]{a}$.

（2）注意：

① 负数的奇次根可以用与它对应的算术根表示出来，例如$\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$，一般为$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$.（$a>0$）

② 以后在实数范围内，符号$\sqrt[n]{a}$只表示算术根，因此，正数a的偶次方根的负值用$-\sqrt[n]{a}$来表示.

3．无理数：无限不循环小数叫做无理数.

4．实数：有理数和无理数统称为实数.

5．实数的性质：

（1）任意两个实数可以比较大小；

（2）在实数范围内，可以进行加、减、乘、除运算，在方根存在时，可以进行开方运算.

6．绝对值：若a是实数，$|a|$叫做a的绝对值，

$$|a|=\begin{cases}a & 当\ a\geq 0\ 时,\\ -a & 当\ a<0\ 时.\end{cases}$$

7．运算定律

a,b,c 为任意实数

$a+b=b+a$ （加法交换律）

$(a+b)+c=a+(b+c)$ （加法结合律）

$ab=ba$ （乘法交换律）

$(ab)c=a(bc)$ （乘法结合律）

$(a+b)c=ac+bc$ （乘法对加法分配律）

四、比和比例

1．定义：

（1）比：两数 a、b 的商 $\frac{a}{b}(b\neq0)$ 叫做 a 与 b 的比，a 称做比的前项，b 称做比的后项．

（2）比例：若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则称 a,b,c,d 四数成比例，a 和 d 叫做比例外项，b 和 c 叫做比例内项。

2．比例的性质：

（1）若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $ad=bc$；

反之，若 $ad=bc$，则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；（比例基本性质）

（2）若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$；（更比定理）

（3）若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；（反比定理）

（4）若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；（合比定理）

（5）若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{c}$；（分比定理）

(6) 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$；（合分比定理）

(7) 若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，

则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$．（等比定理）

例题分析

例 1　计算$(-6)-(-3)+(-7)-(+5)+(+12)$．

解：原式$=-6+3-7-5+12=15-18=-3$．

说明：先化成代数和的形式，然后利用加法的交换律与结合律把正数与正数合并，负数与负数合并，最后把合并后的正、负两数相加。

例 2　计算 $16\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\cdot(-2)^3-(-3)\cdot2$．

解：原式$=16\cdot9+5\cdot(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\cdot(-8)-(-3)\cdot2=144-15-6+15-144+6=0$

说明：1．运算顺序应是先乘方、开方，再乘、除，最后加、减；

2．相加时，先合并相反数较为简便

例 3　计算$\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div5+\frac{3}{7}\div(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3$．

解：原式$=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{3}{14}+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$

$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\right)$

$$=-\frac{3}{8}+\frac{5}{10}-\frac{7}{14}=-\frac{3}{8}.$$

说明：把分母间有倍数关系的分数先合并。

例 4　计算 $2.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right]$.

解：原式 $=2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-4\frac{2}{3}$

$$=\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}\right)$$

$$=3\frac{5}{8}-5\frac{1}{2}=-1\frac{7}{8}.$$

说明：如果算式中有小数也有分数，一般先把小数化成分数。

例 5　计算 $-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right)$.

解：原式 $=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$.

$$=-\frac{3\times4\times1\times7\times5\times3}{2\times3\times5\times4\times7\times5}=-\frac{3}{10}.$$

说明：1．乘除混合运算时，先化成连乘积；

2．乘除运算中，带分数要化成假分数；

3．连乘积的符号由乘数中负数的个数来决定；有偶数个负数时，积为正；有奇数个负数时，积为负。

例 6　计算 $\left[(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1$.

解：原式 $=\left[25\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1$

$$=(-15+15)\times8\div7+1=0+1=1.$$

外
1
一

说明：要注意防止$(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)=(-1)^2\cdot(-3)=-3$的错误。

例 7 计算 $-2^2+(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3$.

解：原式$=-4+4-9+27=18$.

说明：要注意$-2^2\neq(-2)^2$，$-(-3)^2\neq+3^2$.

例 8 求$\frac{1}{(-0.3)^2}$.

解：$\frac{1}{(-0.3)^2}=\frac{1}{0.09}=\frac{100}{9}=11\frac{1}{9}$.

说明：注意$(-0.3)^2\neq0.9$.

例 9 如果a是任意实数，求$\sqrt{a^2}$的值.

解：
$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时} \\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

例 10 设a是任意实数，化简$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}$。

解：
$$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}=|a|+|1-a|$$
$$=\begin{cases} 2a-1 & \text{当 } a\geqslant 1 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } 0\leqslant a<1 \text{ 时} \\ 1-2a & \text{当 } a<0 \text{ 时}. \end{cases}$$

说明：应注意不要产生a一定表示正数，而$-a$一定表示负数的错觉。

例 11 求 $a=2\sqrt{3}(2+\sqrt{7})$ 的不足近似值和过剩近似值$\left(\text{使误差小于}\frac{1}{10^2}\right)$.

解：$a=2\sqrt{3}(2+\sqrt{7})=4\sqrt{3}+2\sqrt{21}=\sqrt{48}+\sqrt{84}$

查平方根表得：

$$6.928<\sqrt{48}<6.929$$

$$9.165<\sqrt{84}<9.166$$

$$\therefore \quad 16.093<\sqrt{48}+\sqrt{84}<16.095$$

$$16.09<a<16.10.$$

即所求 a 的不足近似值是 16.09；

所求 a 的过剩近似值是 16.10.

例 12　证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

证明：用反证法

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么 $\sqrt{2}$ 可表示成分数，即 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$（其中 m,n 是自然数，且 m、n 互质）

$$\therefore \quad 2=\left(\frac{n}{m}\right)^2=\frac{n^2}{m^2},\ n^2=2m^2,$$

n^2 是偶数，n 也是偶数，设 $n=2p$.

那么 $m^2=2p^2$，

$\therefore$　m 也是偶数；

这样，m、n 都是偶数，与 m、n 互质的假设相矛盾.

因此，$\sqrt{2}$ 不是有理数，而是无理数.

说明：读者可仿此证明 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，也是无理数.

习　题　一

1. 下列方程中，哪些在自然数范围内有解？

　(1) $x+2=5$；　　(2) $x-5=6$；

　(3) $x+5=1$；　　(4) $x+2=2$.

2. 下列方程中，哪些在有理数范围内有解？