中央财经大学成人高等教育系列教材

经济数学基础

——微积分

中央财经大学数学教学部编

经济科学出版社

中央财经大学成人高等教育系列教材

经济数学基础——微积分

中央财经大学数学教学部　编

经济科学出版社

1998年8月

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础:微积分/黄惠青主编. 一北京:经济科学出版社,1998.8
中央财经大学成人高等教育系列教材
ISBN 7-5058-1476-1

Ⅰ.经… Ⅱ.黄… Ⅲ.①经济数学-高等教育:成人教育-教材②微积分-高等教育:成人教育-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 17311 号

责任编辑:张建光
责任校对:徐领弟
版式设计:周国强
技术编辑:潘泽新

经济数学基础——微积分
中央财经大学数学教学部 编
*
经济科学出版社出版、发行 新华书店经销
北京地质印刷厂印刷
出版社电话:62541886 发行部电话:62568479
经济科学出版社暨发行部地址: 北京海淀区万泉河路 66 号
邮编:100086
*
850×1168 毫米 32 开 9.5 印张 240000 字
1998 年 8 月第一版 1998 年 8 月第一次印刷
印数:0001—7000 册
ISBN 7-5058-1476-1/G・286 定价:14.50 元

前　　言

中央财经大学数学教学部在总结多年教学实践经验的基础上，参照北京市教育委员会最新颁布的北京市成人高等院校财经类专业《经济应用数学基础教学大纲》中微积分部分的要求，根据财经类专业成人教育专科教学的特点，于 1998 年 4 月编写了本书，供函授教育、夜大学专科使用。

本书主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分和二元函数的微积分等共七章。

本教材力图在 80 课时至 120 课时内让读者了解微积分中的若干重要概念、理论、方法，从而建立正确的数学概念，力求让读者学会用数学方法分析、描述进而定量地解决经济学中的一些简单的实际问题。为充分体现成人教育的特点和需要，在不影响数学学科系统性、科学性的同时，提高教学上的适应性和灵活性，我们在内容上做了如下的尝试：

在极限部分，为便于读者理解函数的极限，我们首先给出一种极限直观形象的描述性定义，然后再用数学语言给出极限的精确定义。在二元函数中，空间解析几何这一预备知识放在第七章的第一节后面，做为对二元函数几何意义理解的必要补充。为了便于读者更好地自学，全书配有较多的例题，同时每节后配有一定数量的练习题，以利于基础知识的掌握和基本方法的训练，每章后还附有一些综合性的习题，以及适应近年来各类考试的标准化试题而选编的习题，以提高读者用数学方法分析和处理问题的能力。考虑到函授教学的面授时数比夜大学的面授时数少，书中加有 * 标记的内容对函授教学可根据实际情况选用或不用。

本教材由中央财经大学数学教学部集体编写。各章执笔人员

是：杜式文（第一、二章）、贺今（第三、四章）、黄惠青（第五、六章）、陈乃辉（第七章）。黄惠青负责总纂任主编，杜式文和贺今任副主编。在本教材的编写过程中，我们参考了1993年出版的《经济数学基础》中的微积分部分。

由于我们水平有限，书中的不当之处恳切希望读者批评指正。

编者
1998年4月

目　　录

第一章　函　数

微积分又称为高等数学(微积分是高等数学的简称).与研究以常量为主的初等数学不同,微积分研究的对象是变量.而函数是涉及变量最主要的概念.学习微积分这门课程,首先应该从研究函数的概念及性质入手.

§1.1　函数的概念

一、常量与变量

在自然现象和社会生产中常常会遇到各种各样的量,其中有些量的数值是不变的,例如地球的直径,地球与月球的距离,长度单位1米,时间单位1秒,等等.这些量称为常量,数学习惯用a、b、c等字母表示.另一些量的数值在某个过程中是不断变化的.例如变速运动的速度,某些商品的价格,股市中的指数,等等.这些量称为变量,数学习惯用x、y、z等字母表示.

二、函数的概念

在观察一个具体的变化过程中会发现,一个变量的变化常常不是孤立的,或者说它常是伴随着其他变量的变化而变化.这些变化之间存在着内在联系和某种规律.请看下列例子.

例1. 正方体的体积V随边长x的变化而变化,其变化规律为$V=x^3$.

例2. 圆心在原点半径为a的圆上的每一点(x,y)满足关系式$x^2+y^2=a^2$.

例3. 研究一根铜线的电阻R与温度t的关系时,通过实验得

下列表格：

表 1-1

t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

电阻 R 是温度 t 的函数，表中列出了一些自变量对应的函数值.

例 4. 某种产品的总成本 C 与产量 Q 的关系，如图 1-1.

Q 在$[a、b]$上任取一个具体数值 Q_0，从而在曲线上得到点(Q_0,C_0). 这样根据图 1-1 曲线体现出来的对应规律，就确定了 Q 与 C 的对应关系.

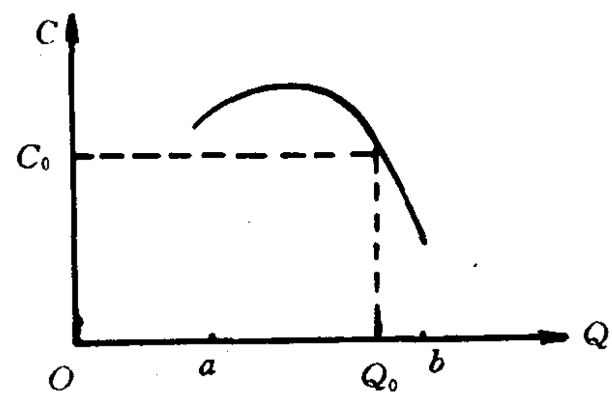

图 1-1

抽去以上各例的实际意义，我们可以发现以上四个例子中各有两个变量，其中一个变量在一定范围内的变化可以引起另一个变量的变化，且该变量在其变化范围内每取定一个值时，另一个变量也就有惟一的数值与之对应. 两个变量的这种对应关系就是函数的本质.

定义 1.1 设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 在其变化范围内所取的每一个值，变量 y 按一定规则总有惟一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数，f 称为对应关系.

在函数 $y=f(x)$中，函数 y 就是通过对应关系 f 与自变量联系到一起的. 自变量通常使用英文字母 x、t、r、p、q 等表示. 因变量或函数通常使用 y、z 等表示. 函数关系通常使用 f、g、φ、ψ 等表示.

定义 1.2 自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，记为 D.

对应的函数的取值范围称为函数的值域，记为T.

自变量根据取值的不同可以划分成离散型变量与连续型变量.

定义 1.3 只能取自然数或者只能跳跃式地取值的变量称为离散型变量，可以取任意实数的变量称为连续型变量.

如例 3 中的自变量就是离散型变量. 而例 1、例 2 和例 4 中的自变量都属于连续型变量.

根据函数的定义，我们要求自变量在定义域内每取定一个值时，函数 y 总有惟一确定的值与之对应，这种函数称为单值函数. 如例 1、例 3 和例 4. 但有时对于自变量的一个取值，函数可以有多个值与之对应，这种函数称为多值函数. 如例 2 经变形后可得 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，此处 y 就是多值函数. 但只要对变量加以某种限制，多值函数仍能成为单值函数. 如例 2 若规定 $y>0$，仍可成为单值函数. 在本书中，如无特别说明，所研究的函数均指单值函数.

三、函数的表示方法

函数关系的表示方法有三种形式：

1. 解析表示法

用数学式子表示自变量与函数的对应关系，这种方法称公式表示法，又称解析表达法. 这样的数学公式称函数表达式，又称函数的解析表达式，如例 1 和例 2.

2. 列表表示法

把自变量的一系列取值与对应的函数值列成表格，以此来表示自变量与函数的关系，称为列表表示法. 离散型变量通常用这种表示法，如例 3.

3. 图象表示法

用一条平面曲线表示自变量与函数的对应关系，称图象表示法. 这样的平面曲线称为函数的图象，它是函数关系的几何表示，如例 4.

总之，在函数 $y=f(x)$ 中，函数关系 f 可以用数学式子表达，

也可以用 x 与 y 的对应数值列表来表达，还可以用 x-y 平面中的一条曲线来表达. 在本教材中，我们主要使用函数的解析表达式，而图象法和列表法只作为必要补充.

在函数关系中，自变量起主导地位，函数处于从属地位. 但是这种地位是可以交换的，即 y 也可作为自变量，这时 x 就是 y 的函数.

四、反函数

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$，由此解析表达式，经过解方程，若能得到 x 为 y 的函数，则称这个新函数是函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 按习惯写法记为 $y=f^{-1}(x)$.

由定义可知，当 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 时，那么 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数自然是 $y=f(x)$，即 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 这时变量 x 与变量 y 是一一对应的. $y=f(x)$ 的定义域和值域分别为其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域和定义域.

例 5. 求 $y=\dfrac{3x+2}{2x-1}$ 的反函数.

解：因为 $y=\dfrac{3x+2}{2x-1}$，注意到当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时 y 没有值与之对应，故在 $x\neq\dfrac{1}{2}$ 时把 y 当自变量后有

$$(2x-1)y=3x+2,$$

所以有 $(2y-3)x=y+2$，由此有

$$x=\frac{y+2}{2y-3},$$

所以，$y=\dfrac{3x+2}{2x-1}$ 的反函数为 $y=\dfrac{x+2}{2x-3}$.

例 6. $y=\sin x$ 在整个定义域上不存在反函数，而在定义域 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上，x 和 y 可形成一一对应关系，故可存在反函数 $x=\sin^{-1}y$. 通常记作 $y=\arcsin x$，称为反正弦函数，它的定义域是 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，值域为 $[-1,1]$.

有时也把相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说的原函数称为直接函数.

练 习 1-1

1. 判断以下各题 y 是否为 x 的函数：

(1) $y=\lg x^2$.　　(2) $y=\lg(-x^2)$.

(3) $y>x$.　　(4) $y=\arcsin(x^2+\sqrt{2})$.

(5) $y=\sqrt{x}+\lg(-x)$.

2. 作出下列函数的图形：

(1) $y=x$.　　(2) $y=x^2+1$.

(3) $y=\sqrt{x}$.　　(4) $y=\frac{1}{1-x}$.

(5) $y=\sin x$.　　(6) $y=\cos x$.

(7) $y=3x+4$.　　(8) $y=\lg x$.

(9) $y=2^x$.　　(10) $y=(\frac{1}{3})^x$.

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1$.　　(2) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

(3) $y=\frac{1-x}{1+x}$.　　(4) $y=1+\lg(x+3)$.

(5) $y=2^{x-1}$.

§1.2　函数的定义域和函数值

函数的定义域可以用集合来表示，也可以用区间来表示. 区间就是数轴上的一个子集. 区间可分成有限区间和无限区间两大类. 其中有限区间包括：

(1)开区间 (a,b)，即数集 $\{x|a<x<b\}$；

(2)闭区间 $[a,b]$，即数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3)左开右闭区间 $(a,b]$，即数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$；

(4)左闭右开区间 $[a,b)$，即数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$.

无限区间包括：

(1)$[a,\infty)$，即数集$\{x|a\leqslant x<\infty\}$；

(2)(a,∞)，即数集$\{x|a<x<\infty\}$；

(3)$(-\infty,b)$，即数集$\{x|-\infty<x<b\}$；

(4)$(-\infty,b]$，即数集$\{x|-\infty<x\leqslant b\}$；

(5)$(-\infty,\infty)$，即数集$\{x|-\infty<x<+\infty\}$，即整个数轴为其数集.

一般来说，对于由实际问题得到的函数，定义域是由实际问题的具体条件来确定的. 在没有任何实际背景而只存在函数解析表达式的情况下，函数表达式本身可决定定义域. 依据的原则是，自变量取实数值应使对应的函数值为惟一确定的实数值. 依据这一原则，若自变量取值不受限制，则存在下列四种基本情况：

(1) 分式 $\dfrac{1}{P(x)}$.

对于分式，只有当分母取值不为 0 时，分式才有意义，即 $P(x)\neq0$.

(2) 偶次根式$\sqrt[2n]{Q(x)}$，(n 为正整数).

为保证偶次根号下的被开方数的最终结果仍为实数，故 $Q(x)$ 不允许出现负值，即 $Q(x)\geqslant0$.

(3) 对数 $\log_a N(x)$，$(a>0,a\neq1)$.

若令 $y=\log_a N(x)$，则 $N(x)=a^y$，由于 $a^y>0$，故 $N(x)>0$.

(4) 反正弦函数 $y=\arcsin S(x)$ 和反余弦函数 $y=\arccos S(x)$.

由于反正弦函数和反余弦函数的反函数为 $S(x)=\sin y$ 和 $S(x)=\cos y$，而正弦值和余弦值的绝对值小于等于 1，故 $|S(x)|\leqslant1$.

例 1. 求 $y=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$的定义域.

解：因为 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)\neq0$，

所以 $$x\neq1,\ x\neq4,$$

因此函数定义域 $D=(-\infty,1)\cup(1,4)\cup(4,+\infty)$.

例 2. 求 $y=\lg(x^2-9)$的定义域.

解:为保证对数的真数大于 0,需解不等式 $x^2-9>0$,得 $x^2>9$,即 $x<-3$ 或 $x>3$. 因此函数定义域 $D=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

例 3. 求 $y=\dfrac{1}{x+2}-\sqrt[4]{16-x^2}$的定义域.

解:为使分母不为 0,故 $x\neq-2$. 为保证偶次根号下被开方数为正数或零,必须有 $16-x^2\geqslant0$,即 $x^2\leqslant16$,因此有 $-4\leqslant x\leqslant4$,于是函数的定义域为$[-4,2)\cup(2,4]$.

例 4. 求 $y=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\lg(x-2)}+\arcsin\dfrac{x-3}{2}$的定义域.

解:对 $\sqrt{x^2+1}$,x 的取值范围为$(-\infty,+\infty)$,对$\dfrac{1}{\lg(x-2)}$,由于 $\lg(x-2)$不能为 0,且$(x-2)>0$,所以 x 取值应满足条件 $x\neq3$和 $x>2$.

对 $\arcsin\dfrac{x-3}{2}$,应使$-1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant1$,也即$-2\leqslant x-3\leqslant2$,因此,$1\leqslant x\leqslant5$.

综上所述,整个函数的定义域为$(2,3)\cup(3,5]$.

定义 1.5 若两个函数的定义域相同,且解析表达式也相同,则称两个函数相同.

例 5. 判断函数 $y=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$与 $y=x-1$ 是否相同.

解:由于 $y=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,而 $y=x-1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,两函数定义域不同,故这两个函数是不相同的函数.

反过来,只要定义域和解析表达式相同,便是相同的函数. 这时与函数采用的字母无关. 例如:$y=x^2+2x-1$ 与 $z=u^2+2u-1$ 是完全相同的两个函数.

对一个函数 $y=f(x)$,当其自变量 x 在定义域内取某一数值 x_0 时,对应的函数值记作 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$. 它表示在 $f(x)$的表达式

中，凡有 x 的地方都用 x_0 代替所得到的数值.

例 6. 设 $f(x)=x^2-\lg(x+1)+7$，求：$f(0)$，$f(-x)$，$f(\frac{1}{x})$.

解：$f(0)=0^2-\lg(0+1)+7=7.$

$$f(-x)=(-x)^2-\lg(-x+1)+7=x^2-\lg(1-x)+7.$$

$$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2-\lg(\frac{1}{x}+1)+7=\frac{1}{x^2}-\lg(x+1)+\lg x+7.$$

例 7. 若 $f(x+1)=x^2+6x-2$，求：$f(x)$.

解：设 $x+1=t$，则 $x=t-1$，因此

$$f(x+1)=f(t)=(t-1)^2+6(t-1)+2=t^2+4t-7,$$

即
$$f(x)=x^2+4x-7.$$

例 8. 若 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求：$f(x-5)$，$f(x-\frac{1}{2})+f(x+\frac{1}{2})$的定义域.

解：(1)因为 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$. 所以，要使 $f(x-5)$有意义，必须

$$0\leqslant x-5\leqslant 1，即\ 5\leqslant x\leqslant 6,$$

故 $f(x-5)$的定义域为$[5,6]$.

(2) 要使 $f(x-\frac{1}{2})+f(x+\frac{1}{2})$有意义，必须

$$\begin{cases}0\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant 1,\\ 0\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

所以，$f(x-\frac{1}{2})+f(x+\frac{1}{2})$的定义域为一点$\frac{1}{2}$.

例 9. 函数 $y=f(x)$由点 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值改变了多少？

解：$y=f(x)$在 x_0 点的函数值为 $f(x_0)$，在点 $x_0+\Delta x$ 的函数值为 $f(x_0+\Delta x)$，函数值的改变量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

练　习　1-2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}$.　　　　(2) $y=\sqrt{3x+1}$.

(3) $y=\dfrac{1}{1-e^x}$.　　　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9-x_2}}$.

(5) $y=\dfrac{1}{\dfrac{x-2}{x}}$.　　　　(6) $y=\sqrt{\lg(x-4)}$.

2. 判断以下各对函数是否为相同的函数：

(1) $y=\lg x^2, y=2\lg x$.

(2) $y=x, y=\sqrt{x^2}$.

(3) $y=|x|, y=\sqrt{x^2}$.

(4) $y=\sqrt[3]{x^5-x^4}, y=x\sqrt[3]{x^2-x}$.

(5) $y=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}, y=\dfrac{x}{x-1}$.

(6) $y=2x+1, u=2t+1$.

(7) $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}, y=\sqrt{x(x-1)}$.

3. 已知 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}-6$，求：$f(1), f(2), f(-1), f(-x)$, $f(\dfrac{1}{x}), f(x^3), f(u)$的值.

4. $f(x+1)=x^2+3x+5$，求：$f(0), f(x)$.

5. 如果 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x+1)$.

6. 若 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域；

(1)$f(2x)$.　　　　(2)$f(x+5)$.

(3)$f(x^2)$.　　　　(4)$f(x+\dfrac{1}{4})+f(x-\dfrac{1}{4})$.

7. 在下列函数定义域内任意点 x 处，自变量有了改变量 Δx 后，求函数的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$：