高等数学

第四卷

（第一分册）

R. 罗 德 著
秦 裕 瑗 译

人民教育出版社

高等数学

第四卷

（第二分册）

R. 罗德 著
秦裕瑗 译

人民教育出版社

高等数学

第四卷

（第三分册）

R. 罗德 著
秦裕瑗 译

人民教育出版社

本书系根据莱比锡托伊布讷出版社（B. G Teubner Verlagsgesellschaft）出版的罗德（R.Rothe）著“高等数学”（Höhere Mathematik）第四卷第一分册1957年第10版译出的。可供我国高等学校理工科有关师生参考。

简 装 本 说 明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高 等 数 学

第四卷　第一分册

R. 罗 德 著

秦 裕 瑗 译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

天津市第一印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

书号13012·0213　开本787×1092 1/32　印张4 2/16

字数 110,000　印数 5,001-205,000　定价0.34元

1965年4月第1版　1978年11月第4次印刷

本书系根据莱比锡托伊布讷出版社（B.G. Teubner Verlagsgesellschaft）出版的罗德（R.Rothe）著“高等数学”（Höhere Mathematik）第四卷第二分册1961年第11版译出的。可供我国高等学校理工科有关师生参考。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20%。希鉴谅。

高等数学

第四卷 第二分册

R. 罗德 著

秦裕瑗 译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

天津市第一印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

书号13012·0214 开本787×1092 1/32 印张 3 14/16

字数 105,000 印数 5001-205000 定价0.32元

1965年4月第1版 1978年11月第4次印刷

原出版者序言

“高等数学”第四卷含有为数頗多的习題，以供学习前三卷的內容之用．每个习题通常都附有解法提示及其結果．不少习題20多年前就已为罗德教授所选用，不能再查明它們的出处．有些是罗德本人拟的，有些是与他的助教們进行生动的討論时产生的，有些則选自各式各样数学的、物理的以及工程的文献．当然，这些习題也同整部著作一样主要是供学习工科、物理及数学的学生們用的．但其中大批的习題，还有那些带有工科內容的习題，可能对教师授課时有用，并会受到所謂优秀班学生的欢迎．自然，对高等专科学校（机械制造学校，工程学校等等）也是可以适用的．

第十版是第九版未加更改的再印本．

托伊布納出版社

1956 年秋于萊比錫

高　等　数　学

第四卷

（第二分册）

R. 罗　德　著

秦　裕　瑗　译

人　民　教　育　出　版　社

目　录

（第一分册）

第一章　数、变量与函数

1. 第一卷§1至§4的练习題

軌迹問題．函数的建立及函数値的計算．反函数．絕对値的計算．方程的图解．整有理函数．内插公式．分式有理函数、代数函数及超越函数图形的描繪．从 n 推到 $n+1$ 法(即数学归納法)．

1．試将活塞曲柄头到飞輪圓心的距离 $OK=s$ 表示为曲柄角 ψ(图 1)的函数．为此，引入长度比 $OC:CK=r:l=\lambda$．当曲柄角取什么值时，柄头恰在靜止点 A 与 B 的中間？曲柄角取什么值时，推杆 CK 与飞輪相切？(参閱第 24 頁第 1 題．)①

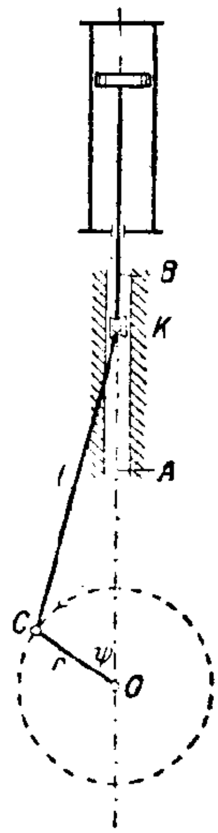

图　1

解：由正弦定理，在三角形 OKC 中，若令 $\measuredangle OKC=\theta$，則有 $\sin\theta=\lambda\sin\psi$ 及 $\frac{s}{l}=\frac{\sin(\theta+\psi)}{\sin\psi}$．对于 $\sin(\theta+\psi)$ 应用和角公式，就得到

$$s=l(\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}).$$

在靜止点 A 与 B 处，綫段 s 的长为 $l-r$ 与 $l+r$．因此当柄头在 A 与 B 的中間时 $s=l$，这时

$$\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}=1,$$

所以　$\psi=\arccos\frac{1}{2}\lambda.$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}-\psi$，即 $\psi=\operatorname{arcctg}\lambda$ 时，推杆与飞輪相切．

① 本分册內，括号里所指的是本书第一卷中譯本的頁碼及題次——譯者．

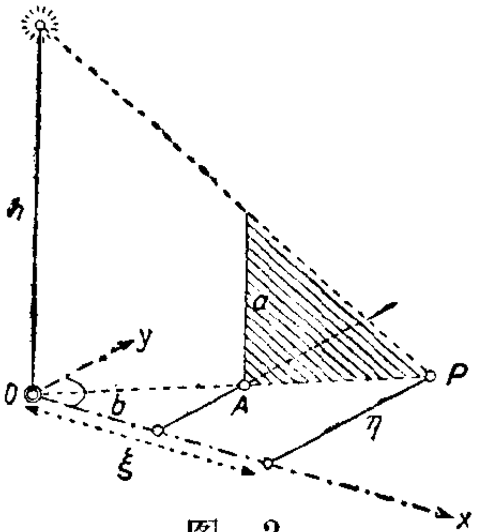

图　2

2. 有一个身长为 a 的人，在离路灯杆 b 处沿一直綫以等速 c 在路灯下行走，設路灯的高为 h，問他的头影沿怎样的曲綫移动(图 2)？

解：設这人所走路綫是过 A 且垂直于 x 軸的直綫，P 是头的影子，$t=0$ 为这人在 x 軸上的时刻．于是

$$AP=\frac{a}{h-a}\cdot OA,\quad \eta=\frac{hct}{h-a},\quad \xi=\frac{b\eta}{ct},\ \text{即}\ \xi=\frac{bh}{h-a}.$$

所以头影子沿一条平行于这人行进方向的直綫移动．

3. (第 2 題的推广)如果这人沿曲綫 $y=f(x)$ 行进，则头影所描画的曲綫方程如何？

解：由图 2 得关系式

$$y=\frac{h-a}{h}\eta,\quad x=\frac{h-a}{h}\xi,$$

所以曲綫方程是　$\eta=\dfrac{h}{h-a}f\left(\dfrac{h-a}{h}\xi\right)$，

就是說，头影所描画的曲綫是給定曲綫适当改变比例尺后所得的結果．这也可以用純粹几何方法来說明．

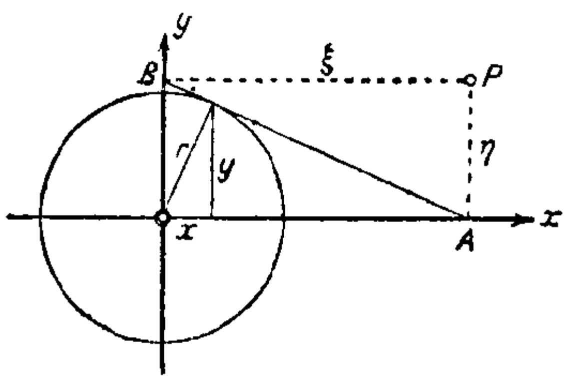

图　3

4. 在半徑为 r 中心在原点处的圓上作一切綫，与坐标軸交于 A 与 B 处．然后通过 A 与 B 作平行于坐标軸的直綫定出点 P．当切綫的位置改变时，問点 P 的軌迹如何？作出草图！

解：設 ξ、η 是所求軌迹的流动坐标，x、y 是切点的坐标，切綫在坐标軸上的截距，也就是点 P 的坐标．即 $\xi=\dfrac{r^2}{x}$ 及 $\eta=\dfrac{r^2}{y}$，于是軌迹的方程是

$$\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}=\frac{1}{r^2}\ \text{或}\ \eta=\pm\frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}\quad(\text{图}\,3).$$

5. 从一个孔口 A 沿水平方向以定速 c 噴出水流；水流的中綫近似于参数为 $p=\frac{c^2}{g}$ 的抛物綫.

一个水輪（半徑为 R）这样装置：它的中心 M 在水流与輪緣相触点 B 的垂直下方. 設从孔口到輪緣的垂直距离 m 是已知的，問水輪中心位于何处(图 4)？

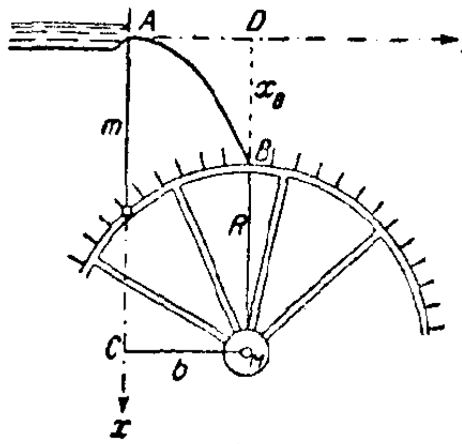

图 4

解：B 的坐标是 $x_B=\frac{b^2}{2p}$，$y_B=b$. 数值 b 可以由 $AC=DM$，即是由 $m+\sqrt{R^2-b^2}=R+x_B$ 算得：

$$b^2=2p(\sqrt{(p+R)^2-2pm}-(p+R-m)).$$

M 的坐标是 $\qquad x_M=m-p+\sqrt{(p+R)^2-2pm},\ y_M=b.$

6. 試将球的面积 O 表示为它的体积 V 的函数. 作图!

解：$O^3=36\pi V^2$. 以 O, V 为坐标的点的曲綫是一个半立方抛物綫.

7. 在一个內軸徑为 R 的軸承里，有 n 个同样大小的滚珠，它們相邻两个之間的距离是 σ. 問滚珠的半徑 ρ 是多少(图 5)？

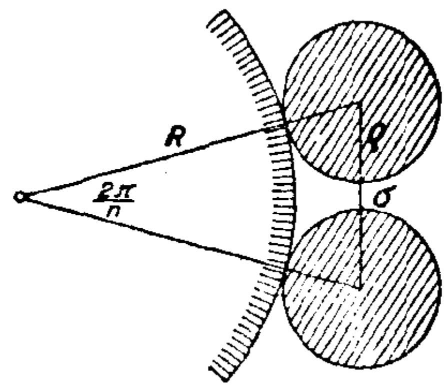

图 5

解：
$$\rho=\frac{R\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\sigma}{2}}{1-\sin\frac{\pi}{n}},\quad n>2.$$

如果 $\sigma=0$，軸承的滚珠就相切.

8. 在絕热情况下，当压力改变时，气体按定律 $p\cdot v^{1.414}=C$ (p 是压力，v 是体积）而膨脹. 試繪出当 $C=100$ 时相应的“复热”曲綫.

解：为了計算出曲綫上的点，取对数，并从 $\lg p=2-1.414\lg v$ 算出 p. 在双分对数紙上，这是一条直綫.

9. 設 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$，則 x 取哪些值时，才有

a) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\geqslant 0$,

b) $\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\gamma)(x-\delta)}\geqslant 0$?

(参閱第24頁第2題.)

解: 各括号里的式子的正負号列表如下:

	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x<\gamma$	$x=\gamma$	$\gamma<x<\delta$	$x=\delta$	$x>\delta$
$x-\alpha$	−		+	+	+	+	+	+	+
$x-\beta$	−	−	−		+	+	+	+	+
$x-\gamma$	−	−	−	−	−		+	+	+
$x-\delta$	−	−	−	−	−	−	−		+

这两个函数当 $x<\alpha$, $\beta<x<\gamma$, $x>\delta$ 时取得正值. 前一个函数当 $x=\alpha$、$x=\beta$、$x=\gamma$、$x=\delta$ 时等于零,可是第二个函数仅仅在 $x=\alpha$ 与 $x=\beta$ 处等于零. 它在 $x=\gamma$ 与 $x=\delta$ 处有极点. 图6中有阴影的区域是函数曲綫通过的部分.

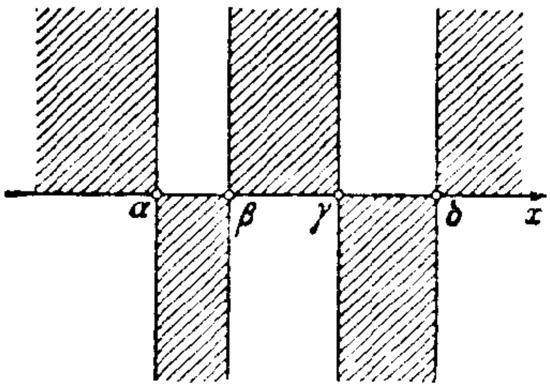

图 6

10. 适合 $|x|+|y|=1$ 的所有点 (x, y) 构成什么几何图形? (参閱第24頁第3題.)

解: 在四个象限中,这方程表成直綫

$$x+y=1,\quad -x+y=1,\quad -x-y=1 \text{ 与 } x-y=1.$$

点 (x, y) 的全体构成一个正方形的四个边, 它的頂点在坐标軸上且与原点的距离为1.

11, 試繪图: a) $y^2=1-|x|$, b) $|x\cdot y|=1$.

解: a) 当 $x>0$ 时, $y^2=1-x$; 当 $x<0$ 时, $y^2=1+x$.
这是两条抛物綫弧,它們在 $(0, \pm1)$ 处相交, 且对称于 x 軸.

b) 因为方程也可以写成形式 $xy=\pm1$, 曲綫是两条等軸双曲綫,它們的漸近綫是两个坐标軸.

12. 試繪图: $y=|x-a|+\frac{1}{2}|x-b|$, $(a<b)$.

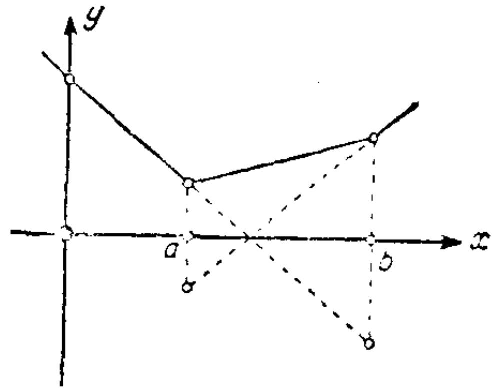

图 7

解: 曲綫是由三条直綫段所組成的折綫，角点在 $x=a$, $y=\frac{1}{2}(b-a)$ 与 $x=b$, $y=b-a$ 处. 三个部分的方程是: 当 $x>b$ 时, $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(2a+b)$; 当 $a<x<b$ 时, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(2a-b)$; 而当 $x<a$ 时, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}(2a+b)$. 它的构造可以从图形(图 7)中看到.

13. 試決定下列諸函数的反函数:

a) $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1}$, b) $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$,

c) $y=\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}$,

d) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ (参閱第24頁第 4 題),

e) $y=\sqrt[5]{\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}$.

解: a) $y=x+\frac{1}{x}$; b)与 c): 交换变量 x 与 y, 再在这两题中先作$\frac{1-x}{1+x}$. 于是容易得到

$$y=-\frac{x}{(1+x)^2} \quad 与 \quad y=\frac{3x+x^3}{1+3x^2}.$$

d) 交换变量后,令两个根式为 a 与 b. 应用二項式定理, 就得 $x^3=a^3+$ $+b^3+3abx$ 及 $y=\frac{1}{2}(3x+x^3)$.

e) 相应地应用二項式定理, 就得到 $x^5=y+5px(a^2+b^2-p)+10p^2x$, 又因为 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, 得到 $y=x^5-5px^3+5p^2x$.

14. 試求拋物綫 $y=x^2-4$ 与其反函数图形的交点. 繪图!

答: $x_1=y_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$, $x_2=y_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})$, $x_3=y_4=$

$=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$,　$x_4=y_3=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$.

15. 試用图解法解方程 $4x^3-7x+3=0$.

解: 求出曲綫 $y=x^3$ 与直綫 $y=\frac{7x}{4}-\frac{3}{4}$ 的交点的横坐标. 得: $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{3}{2}$.

16. 試用图解法求 $x^4-x-1=0$ 的实解.

解: 求出曲綫 $y=x^4$ 与直綫 $y=x+1$ 的交点的横坐标. 得 $x_1=-0.724$, $x_2=1.221$.

17. 試用图解法解方程 $10^x=x^{10}$.

解: 如果 $x>0$, 取对数得 $x=10\lg x$; 如果 $x<0$, 就先令 $x=-|x|$. 求直綫 $y=\pm\frac{x}{10}$ 与曲綫 $y=\lg x$ 的交点, 得到方程的三个解: $x_1=10$, $x_2=1.373$, $x_3=-0.827$(图 8).

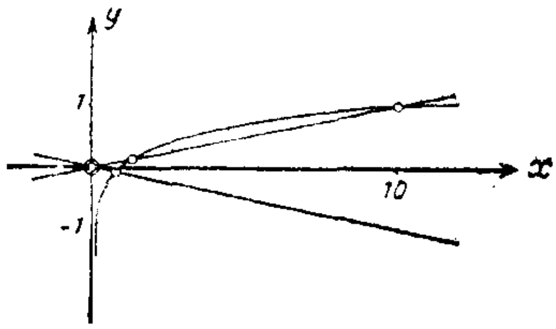

图 8

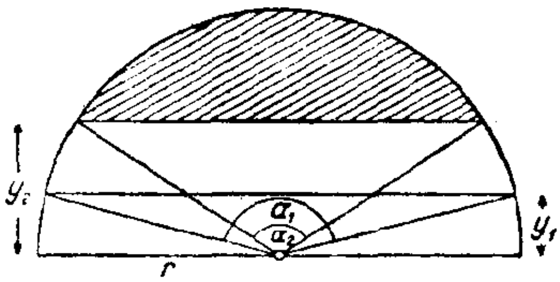

图 9

18. a) 試用两条平行弦把半徑为 r 的半圓分成三个面积相等的部分(图 9).

解: 按图 9 中的記号, 扇形(α_1)－三角形$(\alpha_1)=\frac{2}{3}$半圓, 即有 $\alpha_1-\sin\alpha_1=\frac{2\pi}{3}$, 相应地有 $\alpha_2-\sin\alpha_2=\frac{\pi}{3}$. 取曲綫 $y=\sin x$ 与 $y=x-\frac{2\pi}{3}$ 及 $y=x-\frac{\pi}{3}$ 的交点, 就得到 $\alpha_1=2.60=\mathrm{arc}149^\circ$, $\alpha_2=1.97=\mathrm{arc}112.9^\circ$. 于是这两个弦离中心的距离是 $y_1=0.2672\,r$ 与 $y_2=0.5526\,r$.

18. b) 如果把半圓分成 n 条, 那末就要解 $n-1$ 个方程

$$\alpha_\lambda-\sin\alpha_\lambda=\pi\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\quad(\lambda=1,\cdots,n-1)$$

$y_\lambda=r\cos\frac{1}{2}\alpha_\lambda$ 就是第 λ 条弦离中心的距离.

19. 試作一标尺，使我們从其分点上的数字可以讀出該分点将給定的綫段 AB 分成什么比例.（参閱第 24 頁第 5 題.）

解: 設綫段 AB 的长等于 s. 如果分綫段 AB 成比例 λ, 那末靠近 B 点的部分綫段的长等于 $\frac{s}{1+\lambda}$. 如果 $\lambda>0$, 分点就在 A 与 B 之間，如果 $\lambda<0$, 就在綫段 AB 之外(图 10).

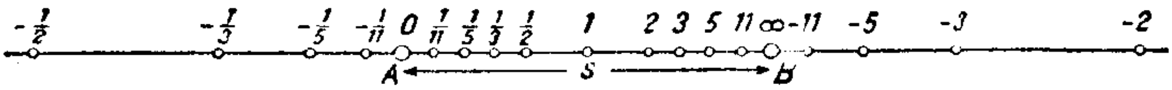

图 10

20. 試作函数 $f(x)=\frac{x}{1-x}$ 的标尺.

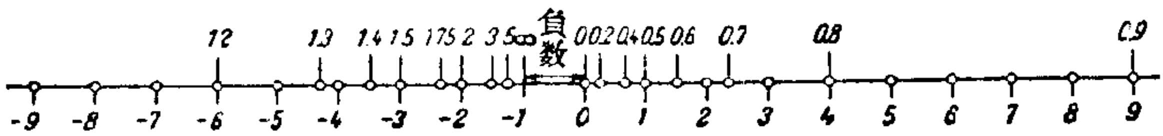

图 11

解: 見图 11. 值 $x=1$ 在标尺上是找不到的.

21. 試把具有零点 $x=2$ 与 $x=-1$ 的函数 $y=2x^4-2x^3-3x^2-x-2$ 分解为一次及二次实因子.

答: $y=(x-2)(x+1)(2x^2+1)$.

22. 試解方程 $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=2$.

解: 把方程化成 $\frac{4}{x^2-4}=0$, 它不为 x 的任何值所满足.

附言: 方程 $\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}+\frac{cx+d}{\gamma x+\delta}-k=0$ 在两个等式

$$a\gamma+c\alpha=k\alpha\gamma \text{ 与 } a\delta+b\gamma+c\beta+d\alpha=k(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

同时成立且适合不等式 $b\delta+d\beta-k\beta\delta\neq0$ 时无解，因为这时方程左端是一个

沒有零点的分式有理函数.

23. 試解方程 $x+7+5\sqrt{x+1}=0$.

解：用通常解方程的办法把它变成一个二次方程，它的根是 $x_1=8$, $x_2=3$. 然而，这两个值沒有一个是給定方程的解，故給定方程沒有解.

附言：第 22 題与第 23 題的方程都不是代数方程；因为一个代数方程是由令一个 x 的整有理函数等于零而形成的. 于是代数的基本定理也就不能应用到像上述的两个方程. 此外在这两个方程左端的函数都是代数函数.

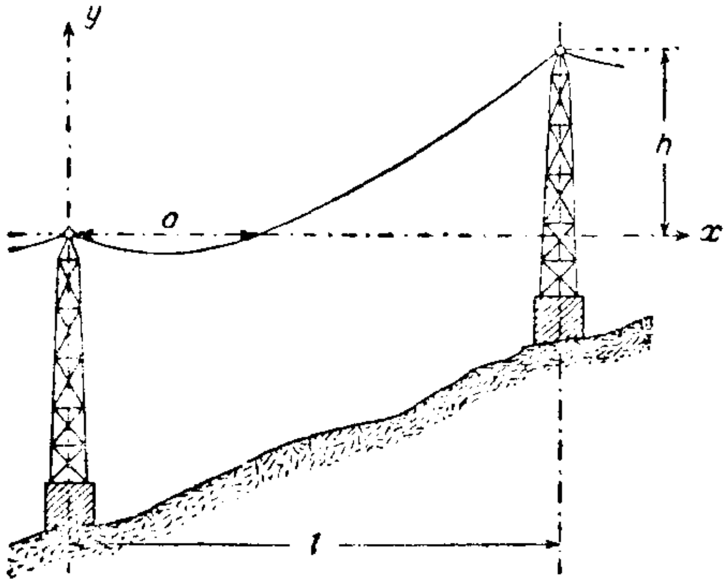

图 12

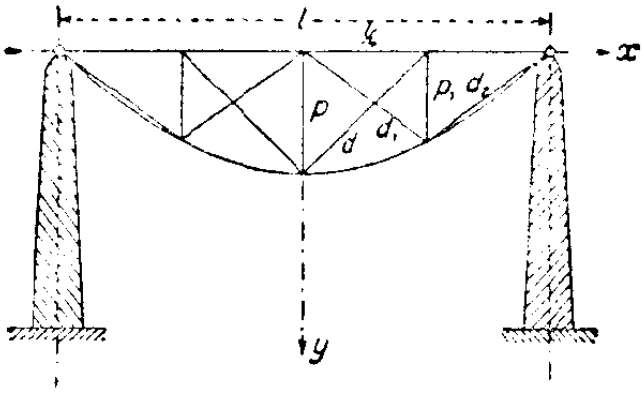

图 13

24. 高压輸电綫的形状近似于一个抛物綫 $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$. 試按图 12 中的数据求它的方程.

解：$y=\dfrac{hx(x-a)}{l(l-a)}$. 按拉格朗日内插公式立刻可以写得这个結果.

25. 試确定一抛物綫状桁架的鉛垂杆件及对角綫杆件的长度，已知它的跨度为 l 及矢高为 p.

解：抛物綫的方程是 $y=p-\frac{4px^2}{l^2}$.

$$p_1=\frac{3}{4}p,\ d=\frac{1}{4}\sqrt{16p^2+l^2},\ d_1=\frac{1}{4}\sqrt{9p^2+l^2}=d_2.$$

26. 在保罗式桁架（伊薩桥，在德国 Grosshesselohe 附近，1857）上，鉛垂杆件的长度由下面的公式来計算：

$$h=\frac{4f}{l^2}x(l-x)\left(1+\frac{2f^2}{l^2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)^2\right),$$

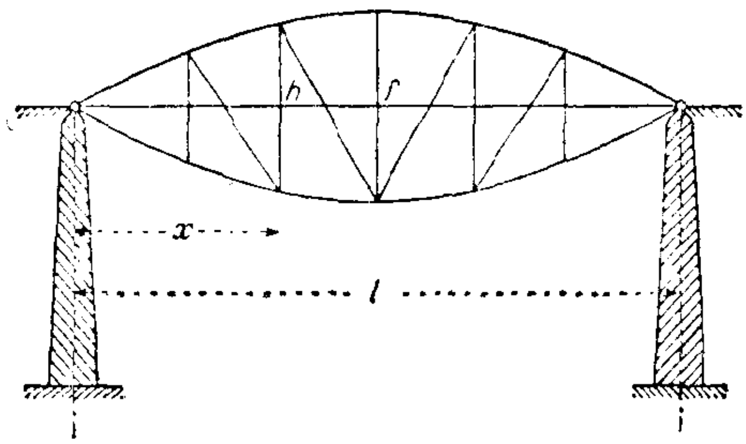

图 14

其中 l 是桥的跨度而 f 是矢高．問图 14 中的桥的杆件长是多少？

答：$x=0,\ h=0;$ $x=\frac{l}{6},\ h=\frac{5f}{9}\left(1+\frac{8f^2}{9l^2}\right);$

$x=\frac{2l}{6},\ h=\frac{8f}{9}\left(1+\frac{2f^2}{9l^2}\right);$ $x=\frac{l}{2},\ h=f.$

27. 問怎样的三次抛物綫通过四点 $(-2,3)$，$(-1,2)$，$(0,-1)$，$(1,1)$？

解：由拉格朗日內插公式得

$$y=3\frac{(x+1)(x+0)(x-1)}{(-2+1)(-2+0)(-2-1)}+2\frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)}+\cdots$$

$$=\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{3}x-1.$$

28. 在 xy 平面上有两个半徑都等于 r 的圓，它們的中心在同一个垂綫上．这两个圓叠加起来是什么曲綫？

解：$y=b_1\pm\sqrt{r^2-x^2}+b_2\pm\sqrt{r^2-x^2}$．如果取同号，就得橢圓