数学奥林匹克竞赛丛书

余红兵 严镇军

构造法解题

中国科学技术大学出版社

数学奥林匹克竞赛丛书

构造法解题

余红兵　严镇军

中国科学技术大学出版社

1992·合肥

[皖]新登字 08 号

构 造 法 解 题

余红兵　严镇军

*

中国科学技术大学出版社出版
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
上海市印刷三厂排版
黄山市印刷总厂印刷
安徽省新华书店发行

*

开本 787×1092/32　印张 4.625　字数 102 千
1992 年 3 月第 1 版　1992 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—8000 册
ISBN7—312—00318—4/G・42

前　　言

这本小册子，通过初等数学，特别是数学竞赛中的问题，介绍解题中的一些构造性思想和方法.

构造法解题，归结起来，大致可以分为两个方面．一方面，它是一种辅助手段，通过构造适当的辅助量（如图形、模型、函数等）转换命题，以帮助解题．在前三节中，我们撷取一些读者较为熟悉的内容来体现构造法的这种特点．另一方面，构造性方法提供了证明存在性命题的一种有效手段，本书的第 4 节至第 7 节侧重介绍这种解题思想及常用技巧，第 8 节则是这些内容的补充.

书中有些问题的解法属于单墫先生，对他允许我们引用这些内容深致谢意.

余红兵

1990年夏

目　　次

1 初等几何中的例子

论证几何命题的过程，可以说是反复运用“构造”——这一辅助手段的过程.当我们试图证明一个几何命题：若A（已知条件），则B(结论). 即

$$A\Rightarrow B$$

时，首先就应当作一个与问题有关的图，并将图中的点、线等标以适当的字母(记号)，这便构造了一个所证命题的辅助模型，然后再对这个模型进行思索和论证.

由于许多几何问题的已知条件与结论之间的关系非常隐蔽，仅从上述模型不容易找到证题的思路. 一般来说，用综合法证明 $A\Rightarrow B$ 时，要经过许多中间的步骤，也就是说，要经过如下的程序：

$A\Rightarrow$中间结论$C\Rightarrow$中间结论 $D\Rightarrow\cdots\Rightarrow B$.

为了得到这些中间结论，我们经常动用辅助手段，即添加辅助线，构造出能揭示已知条件和结论之间关系的辅助图形，从而找到论证的途径.

我们来看勾股定理的下述证法，这是古希腊几何大师欧几里德作出的，请读者注意论证中所构造的辅助图形.

例 1 （勾股定理） 证明：任意直角三角形的斜边(弦)长的平方等于两直角边(勾、股)长的平方和.

证明 首先，我们作出一个(辅助模型)直角三角形ABC（图 1），这样，需要证明的便是：

$$AB^2=AC^2+BC^2. \qquad (1)$$

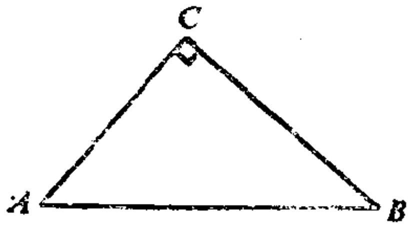

图 1

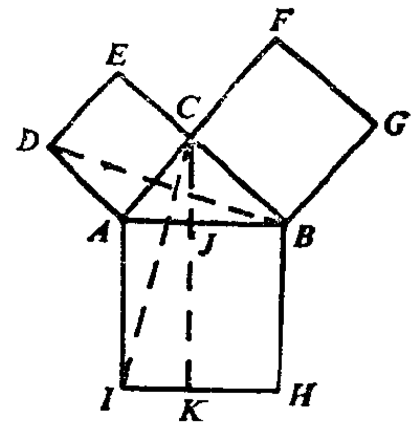

图 2

再分别以AB、BC、AC为一边向外侧构作(辅助图形)正方形$ABHI$, $BCFG$, $ACDE$(图2)，显然，(1)式等价于(转换命题！)：

$$(ABHI)=(ACDE)+(BCFG). \qquad (2)$$

这里$(ABHI)$表示正方形$ABHI$的面积，其余类似.

为了证明(2)，我们作$CJ\perp AB$，并延长交HI于K，连结BD, CI. 由这样构作的辅助图形，结论几乎垂手可得：显然

$$\triangle ABD\cong\triangle AIC,$$

所以 $(ACDE)=2(\triangle ABD)=2(\triangle AIC)=(AIKJ)$.

同理 $(BCFG)=(BJKH)$.

又有 $(AIKJ)+(BJKH)=(ABHI)$,

故(2)式成立.

勾股定理有许多基于构造的证法，图3及图4提供了两

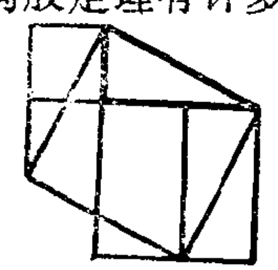

图 3

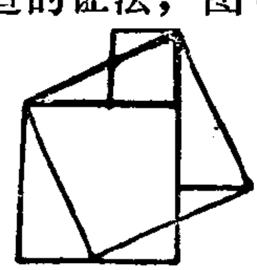

图 4

个这方面的例子，请读者自己完成论证.

三角形和圆是欧氏几何中最基本的图形，它们以及它们的组合图形具有十分丰富的性质．在论证中，构造适当的三角形或圆则可期望利用这些性质，因此是一种常能奏效的辅助手段.

例 2 设 P 是三角形 ABC 中任意一点，证明：

$$AB+AC>PB+PC.$$

证明 如图5所示，延长 BP 交 AC 边于 D 点，我们构造出了对论证很有帮助的三角形 ABD 及 CDP，由此易得（中间结论）：

$$AB+AD>BD=BP+PD, \tag{1}$$

及

$$PD+DC>PC, \tag{2}$$

将（1）与（2）相加，得出（注意 $AD+DC=AC$）：

$$AB+AC>BP+PC.$$

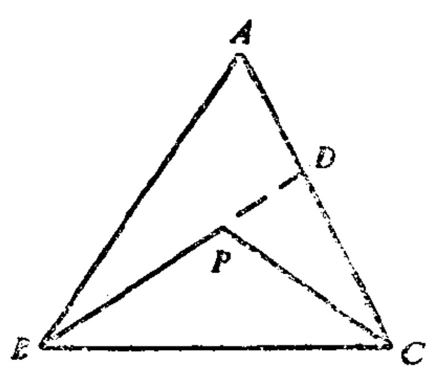

图 5

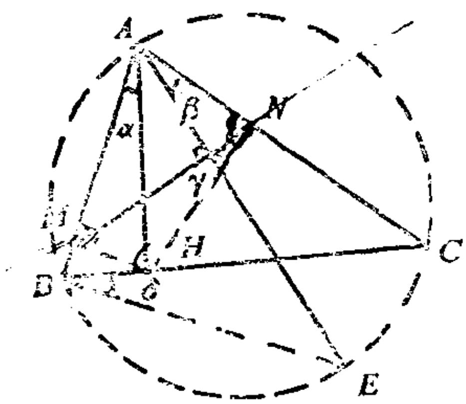

图 6

例 3 如图6，设 AH 是锐角三角形 ABC 的高，以 AH 为直径的圆分别交 AB，AC 于 M，N（M，N 与 A 不同），过 A 作直线 $L_A\perp MN$；类似地作直线 L_B，L_C，证明：L_A，L_B，L_C 三线共点.

证明 作三角形 ABC 的外接圆，设 L_A 与此圆相交于 E 点，连结 BE，则

$$\beta=\delta,$$

连结 HM, HN，因 A, M, H, N 四点共圆，故 $\alpha=\gamma$. 又显然 $\beta=\gamma$，所以

$$\alpha=\beta,$$

从而
$$\alpha=\delta,$$

故
$$\angle ABE=\delta+\angle ABC=\alpha+\angle ABC=90^{\circ}.$$

由此可见，AE 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，即 L_A 通过圆心.

同理可证，L_B, L_C 都过圆心，所以 L_A, L_B, L_C 三线共点.

下面的例子是著名的欧拉定理，请注意论证中辅助圆及辅助三角形的作用.

例 4 （欧拉定理） 设三角形 ABC 的外心为 O，内心为 I （图 7），R 及 r 分别是外接圆和内切圆半径，设 $OI=d$.

证明：$d^2=R^2-2Rr$.

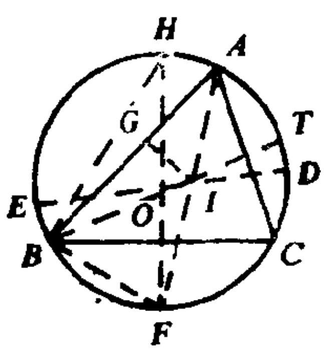

图 7

证明 求证的结论等价于

$$(R+d)(R-d)=2Rr.$$

我们先在图中构造出长为 $R+d$ 及 $R-d$ 的线段.

画出三角形 ABC 的外接圆，把 OI 两端延长交外接圆于 D, E,则

$$EI=R+d,\qquad DI=R-d.$$

于是，问题转化成证明

$$EI\cdot ID=2Rr. \tag{1}$$

连结 AI 并延长交外接圆 O 于 F，由相交弦定理，(1)式等价于

$$AI \cdot IF = 2Rr. \qquad (2)$$

作 $IG \perp AB$(G为垂足)，则 $IG = r$，且

$$AI = \frac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

由(2)式可见，为完成定理的证明，现在就转化为证明

$$IF = 2R\sin\frac{A}{2}. \qquad (3)$$

作直径 FH，连BF, BH,便构造了一个直角三角形FBH，且 $\angle H = \angle BAF = \dfrac{\angle A}{2}$，故

$$BF = HF\sin\frac{A}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}. \qquad (4)$$

比较(3)、(4)可见，剩下的事情是证明

$$BF = IF,$$

而这几乎是显然的，请读者自己考虑.

从上面的例子可以看出，实现几何命题论证的关键在于动用辅助手段，即逐步添加辅助线，以构造出揭示已知与未知关系的图形，限于本书的目的，我们不打算去讨论构作辅助线的各种办法，下面只简要介绍一下引用“参数”来探求辅助线的作法，这种“待定尝试”的想法在第5节中还将提到.例如，为了证明关于线段的等式

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{e}{f}, \qquad (1)$$

这里a, b, c, d, e, f 都是已知图形中的线段长，可以引入待定线段 x，使得

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{x}, \qquad (2)$$

这较(1)要简单. 我们设法找出这样的线段 x (例如，利用或制造相似关系)，并证明

$$\frac{c}{d}=\frac{x}{f}, \tag{3}$$

最后将(2)、(3)相乘即得求证等式(1).

例 5 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 M. 证明

$$\frac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}=\frac{AM}{CM}.$$

证 如图8，令

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{x}.$$

利用相似形不难找到未知线段 x，这只要作 ME 交 AB 于 E，使 $\angle AME=\angle ABC$. 则 $\triangle ABC\sim\triangle AME$，从而

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{ME}, \tag{1}$$

即 ME 就是要找的未知线段 x. 连结 CE，由 $\angle AME=\angle ABC$，知 B, C, M, E 四点共圆，从而

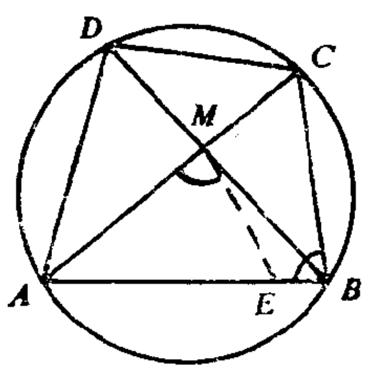

图 8

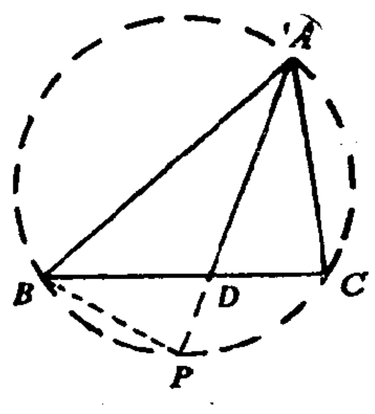

图 9

$$\angle ACE=\angle ABD=\angle ACD.$$

又 $\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-\angle AME=\angle CME.$

所以$\triangle ADC \backsim \triangle EMC$，于是

$$\frac{AD}{CD}=\frac{EM}{CM}. \tag{2}$$

(1)、(2)两式相乘即得欲证等式.

例 6 如图 9，设AD是$\triangle ABC$的角平分线，证明

$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD.$$

证 引进待定线段 x, y，满足

$$\begin{cases} AB\cdot AC=AD\cdot x, & (1)\\ BD\cdot CD=AD\cdot y, & (2)\\ x-y=AD. & (3)\end{cases}$$

显然，从这三个式子消去 x, y，即得欲证等式.

由(3)式，可将 AD 延长至(待定)点 P，令 $AP=x$，$PD=y$，则 $x-y=AD$. 这时(2)式成为

$$BD\cdot CD=AD\cdot PD,$$

即 P, A, B, C 四点共圆. 由此得到证明本题的辅助线的作法：延长 AD 使与$\triangle ABC$的外接圆相交于点 P，连结BP. 由$\triangle ABP \backsim \triangle ADC$，即证得(1)式. 请读者用综合法来表述我们的论证.

完善图形是几何论证中非常有用的辅助手段，特别是常把半个图形完善成整个图形（例如将等腰直角三角形完善成正方形；把半圆完善为圆；等等），便于利用对称性，以找到证题的途径.

例 7 在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle A=90^\circ$，D 是 AC 的中点，$AE\perp BD$（E 为垂足），AE 的延长线交 BC 于 F 点，证明：$\angle ADB=\angle FDC$.

证 等腰直角三角形是正方形的一半，我们把它完善成正方形.

将三角形ABC沿BC边翻转（反射！）得到正方形$ABA'C$，如图10．在这样的辅助图形上，欲证结论几乎是显然的．

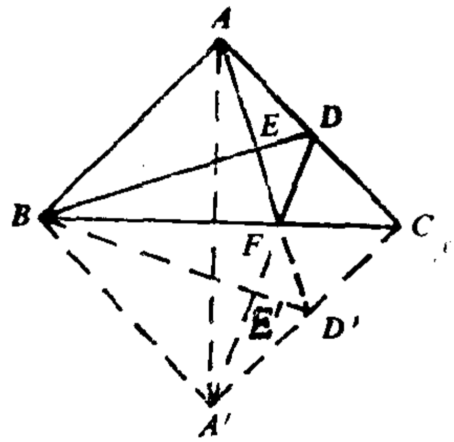

图 10

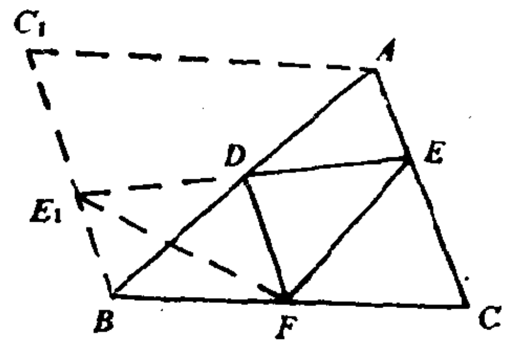

图 11

由于D是AC中点，故$\angle ADB=\angle CDA'=\angle CDF$．

例 8 如图11，在三角形ABC中，D是AB的中点，点E，F分别在AC，BC上，证明

$$(\triangle DEF)\leqslant(\triangle ADE)+(\triangle BDF).$$

证 我们先将三角形ABC完善成平行四边形．作$AC_1//BC$，使$AC_1=BC$，得到平行四边形AC_1BC．

在BC_1上取E_1点，使$BE_1=AE$，易于证明

$$\triangle ADE\cong\triangle BDE_1,$$

故$\angle ADE=\angle BDE_1$．从而E，D，E_1三点共线，所以

$$\begin{aligned}(\triangle DEF)&=(\triangle DE_1F)\leqslant(BFDE_1)\\&=(\triangle BDE_1)+(\triangle BDF)\\&=(\triangle ADE)+(\triangle BDF).\end{aligned}$$

例 9 如图12，设$ABCD$为半圆，AC与BD相交于E，$EF\perp AD$（F为垂足），证明

$$AC\cdot BD+AB\cdot CD=AD(BF+FC).$$

证 将半圆完善成整个圆，作 $CC_1 \perp AD$ 交圆于另一点 C_1；连结 AC_1，FC_1，DC_1. 则

$$CF=C_1F,\ AC=AC_1,\ CD=C_1D.$$

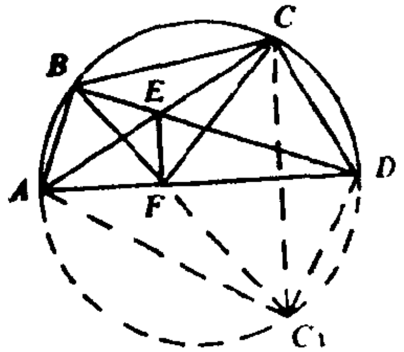

图 12

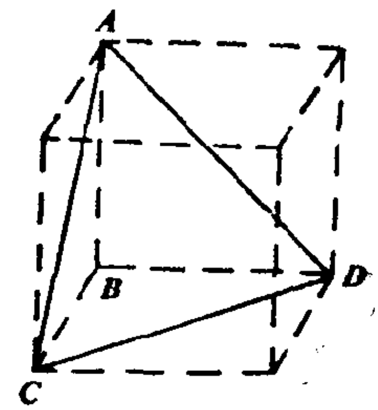

图 13

由 B, E, F, A 四点共圆及 C, E, F, D 四点共圆，有

$$\angle BFA=\angle BEA=\angle CED=\angle CFD=\angle C_1FD,$$

故 B, F, C 三点共线. 且

$$BF+FC=BC_1.$$

由托莱密定理，得

$$AB\cdot C_1D+AC_1\cdot BD=AD\cdot BC_1,$$

即
$$AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD(BF+FC).$$

完善图形这种构造性思想，也可用来帮助解决某些立体几何问题，我们特别提一下把四面体完善成平行六面体的两种方法，参看图13及图14(图中 $A-BCD$ 是给定的四面体).

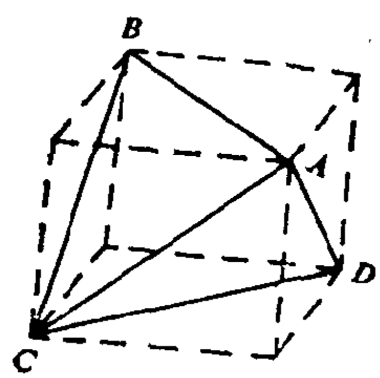

图 14

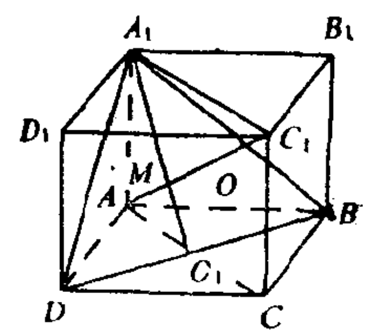

图 15

例 10 如图15，已知四面体 $A_1\text{-}ABD$ 中，棱 AA_1，AB 及 AD 互相垂直，且它们的长度分别为 a，b，c.

1)求证：顶点 A，$\triangle A_1BD$ 的重心 M 及此四面体的外接球的球心 O 共线.

2)求外接球的半径.

证 1) 如图，将四面体 $A_1\text{-}ABD$ 完善为直平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$. 于是，四面体的外接球，也是直平行六面体的外接球，且外接球球心 O 位于直平行六面体的对角线 AC_1 上.

设 AC, BD 相交于 O_1，则 AO_1 是$\triangle ABD$ 的边 BD 上的中线. 设AO_1 与AC_1 相交于 M (AO_1，AC_1 都在矩形 ACC_1A_1 所在平面上). 易知

$$\triangle A_1C_1M \sim \triangle AO_1M,$$

故
$$\frac{A_1M}{MO_1}=\frac{AC_1}{AO_1}=2\,.$$

所以，M 即是$\triangle ABD$ 的重心. 这就证得A, M, O 三点共线.

2)由前面的讨论可知，外接球的直径等于直平行六面体的对角线AC_1 之长，即等于$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

几何中的同一法是一种间接方法，应用起来大致有三个步骤，而论证的出发点则是构造一个辅助图形.

1)要证明已知图形具有“某种性质”，可以先作出具有“某种性质”的图形.

2)证明所作出的图形符合已知条件.

3)证明所作出的图形与已知图形重合.

下面看两个例子.

例 11 如图16，在四边形$ABCD$中，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle ABC$的面积之比是3:4:1，点M，N分别在AC，CD上，满足$AM:AC=CN:CD$，且B，M，N三点共线，证明：M，N分别平分AC，CD.

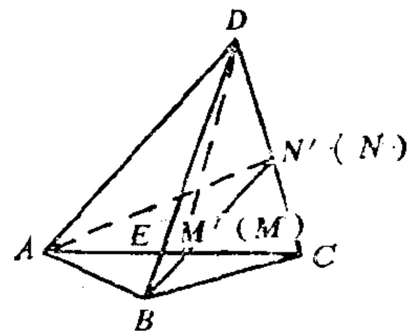

图 16

证 从求证的结论来看，MN应是三角形ACD的中位线(因而$MN//AD$)。这样，我们先过B点作AD的平行线，设此线与AC，CD分别交于M'，N'. 下面来证明M'，N'分别平分AC，CD.

连结AN'，DM'，设$(\triangle ABC)=1$，则由已知条件易知$(\triangle ADC)=6$. 从而

$$(\triangle ADN')=(\triangle ADB)=3=\frac{1}{2}(\triangle ADC),$$

即
$$\frac{DN'}{DC}=\frac{(\triangle ADN')}{(\triangle ADC)}=\frac{1}{2}.$$

所以，N'是CD的中点，故M'是AC的中点（此时，$\frac{AM'}{AC}=\frac{CN'}{CD}=\frac{1}{2}$）.

再来证明线段BMN与线段$BM'N'$重合，假设相反，则有两种可能：

1) M在AM'上，由于B，M，N共线，故N在$N'D$上，于是

$$\frac{AM}{AC}<\frac{1}{2},\quad \frac{CN}{CD}>\frac{1}{2},$$

这与题设$AM:AC=CN:CD$矛盾.

2) M在$M'C$上，此时N在CN'上，于是

$$\frac{AM}{AC}>\frac{1}{2},\quad \frac{CN}{CD}<\frac{1}{2},$$

亦得矛盾.

所以，线段BMN与线段$BM'N'$重合，即M,N分别是AC，CD的中点，证毕.

下面的例子是著名的莫勒定理，人们已发现了许多种证法，这里介绍的是基于同一法的证明.

例 12 （莫勒定理） 将任意三角形的各内角三等分，则每两个角的相邻三等分线的交点构成一个等边三角形.

如图17，设$\triangle ABC$各内角的相邻三等分线分别相交于X，Y，Z，证明：$\triangle XYZ$是正三角形.

证 令 $\angle A=3\alpha$，$\angle B=3\beta$，$\angle C=3\gamma$，则

$$\alpha+\beta+\gamma=60^\circ.$$

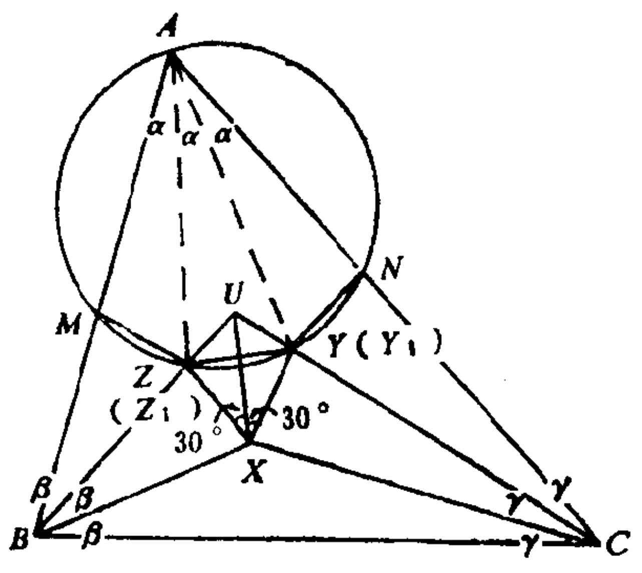

图 17

如图17，设BZ与CY相交于U，连结XU，由题设知，X是$\triangle BUC$的内心，故XU平分$\angle BUC$. 我们在直线BU及CU上分别取点Z_1及Y_1，使$\angle UXZ_1=\angle UXY_1=30^\circ$. 易知$\triangle UXZ_1\cong\triangle UXY_1$，故$XZ_1=XY_1$，所以$\triangle XYZ_1$是正三角形. 于是，若能证明$Y_1$、$Z_1$分别与$Y$、$Z$重合，则命题得证.