概率论导引

GAI LU LUN DAO YIN

A·H·柯尔莫戈洛夫　等著
周概容　　肖慧敏　译

概 率 论 导 引

A.H.柯尔莫戈洛夫　等著
周概容　肖慧敏　译

教育科学出版社

(京)新登字第111号

概 率 论 导 引

A.H.柯尔莫戈洛夫 等著
周概容 肖慧敏 译
责任编辑 金宏瑛

教育科学出版社出版(北京·北太平庄·北三环中路46号)
新华书店经销 北京朝阳展望印刷厂印装
开本:787×1092毫米 1/32 印张:6.125 字数:132,000
1992年11月第1版 1992年11月第1次印刷
印数:00,001—2,000册

ISBN 7-5041-0759-X/G·721 定价:2.60元

内 容 提 要

概率论是研究偶然现象规律性的数学学科．它在自然科学、社会科学、工程技术、军事和工农业生产等领域内都有广泛应用．

本书以通俗的形式，通过简单例子引进了概率论的基本概念和方法．书中通过许多有趣的实例，使读者获得一些现代自然科学问题的初步知识，并且用排列组合的初等方法解决许多非初等问题．这些问题有引人入胜的提法和意想不到的答案．

本书使用的主要工具是排列组合．

本书的作者，A.H.柯尔莫戈洛夫(1903—1987)，是世界著名数学家、现代概率论的奠基人，生前是苏联科学院院士、莫斯科大学教授；另两名作者是A.B.普罗霍罗夫(苏联科学院院士)和И.Г.茹尔宾科．

本书的对象是中等学校和高等学校的师生，以及一切对概率论感兴趣的读者．

前　言

本书是为希望了解初等概率论基本概念的读者，以及希望获得对概率论各种可能应用的知识的读者编写的．概率论在近几十年来得到蓬勃发展．概率方法之所以在科学和技术的各个不同领域得到如此广泛的应用，是因为运用概率方法解决了许多长时间未解决的自然科学课题．本书不准备包罗概率论的一切可能的应用，当然这在比较初等的水平上也是无法做到的．但是，介绍概率方法一些有趣的实际应用的例子仍然是本书的主要目的之一．作为这样的例子，书中将要相当详细地研究布朗运动的基本规律，研究生灭过程，并讨论许多其他实际问题．虽然有关结果只不过是这些领域的导引，然而这些内容可以使读者获得现代自然科学有关课题的初步印象．

第一章是概率论的组合基础．这一章的全部思想和例证在以后各章将得到发挥．

第二章涉及概率的基本概念与试验的关系问题．在这一章讨论概率的古典定义的起源，给出概率的统计定义，讲述概率的公理化定义．

第三章和第五章基于古典概率模型给出概率论基本概念的定义以及基本规律的证明．在这几章里为建立离散概率模型作必要的准备．这些在第五章和第七章研究具体的自然科学问题时要用到．

第四章研究质点在直线上以及平面上的对称随机游动的简单模型,并用简单的组合方法解决某些难题.这些问题具有引人入胜的提法和意想不到的答案.例如,质点回返原来位置的问题;到达某个水平的问题;质点在某些边界上的停留时间问题.

第六章主要是在非对称场合研究上面提到的问题.这里解决古典的破产问题.这一章最后一节介绍最简单的数理统计推断问题.

第七章研究群体的无限增长或群体的退化问题.

本书是以讨论班和有关课程所积累的资料为基础写成的.近年来作者曾多次在莫斯科大学和莫斯科大学物理-数学附中课堂上或讨论班上讲授过有关内容.

第一、三和五章的内容接近A.H.柯尔莫戈洛夫,Б.В.格涅坚科,И.Г.茹尔宾科文章的内容,这篇文章发表在1968年的《中学数学杂志》上.

全书配有大量的例题和习题.根据它们的难度不同,有的完全解出,其余的则只给出答案.

本书的对象是对数学及其应用有兴趣的中学高年级学生,在自己的专业中对于概率论的应用感兴趣的各类高等院校的学生.

作者　A.H.柯尔莫戈洛夫
И.Г.茹尔宾科
A.B.普罗霍洛夫

目　录

第一章　概率概念的组合定义法

§1. 排　　列

两个字母A和B的顺序有两种不同排法：

AB　　BA

三个字母A、B和C排成一列，共有六种不同排法：

ABC	ACB
BAC	BCA
CAB	CBA

四个字母A、B、C和D排成一列，总共有24种不同排法：

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

把十个不同字母排成一列，总共有多少不同排法呢？逐个列举一切可能的排法是困难的.我们希望有一种回答上述问题的一般规则.换句话说，建立一个公式，以便可以立即求出n个不同字母一切可能排法的总数.人们通常用$n!$(即n后面缀以惊叹号"!")来表示各种排法总数.这里，$n!$读作"n的阶

乘”.现在来求这个阶乘数.由上面列举的二、三和四个字母一切可能的排法，可见

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24.$$

对于给定的任一自然数n，把n个不同字母排成一列的每一种排法叫做一个**排列**.当然，可以用数字或任意元素代替字母进行排列.四个元素的排列数等于$4! = 24$.一般，n个元素的排列数等于$n!$.其次，令

$$1! = 1$$

(一个元素无须与其它元素“排列”.由一个元素只能构成唯一一列，而该元素是它的首项).这样，有

$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ 2! &= 1\cdot 2 = 2, \\ 3! &= 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \\ 4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24. \end{aligned}$$

由此可见，n个不同元素的一切可能的排列数等于前n个自然数之积：

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n. \tag{1}$$

我们证明这一命题.

事实上，假设有n个不同元素.那么其中任何一个元素都可以排在第一位，这样有n种不同情形.对于其中的每一种情形，其余$n-1$个元素总共可以用$(n-1)!$不同方法进行排列.由此可见，n个元素总共有

$$n! = (n-1)!\,n \tag{2}$$

种不同排列.由(2)依次得

$$\begin{aligned} 2! &= 1!\cdot 2 = 1\cdot 2 \\ 3! &= 2!\cdot 3 = 1\cdot 2\cdot 3 \end{aligned}$$

$$4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$5! = 4! \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

熟悉数学归纳法的读者已经注意到，利用数学归纳法进行严格的推导，即可由(2)式导出(1)式.

现在已经很容易算出十个字母的排列数。

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

§2. 概　　率

把C、C、E、E、I、N、S等七个字母分别写在七张同样的卡片上，并且将卡片放入同一匣中．现在从匣中随意一张一张地将卡片取出，并将其按取到的顺序排成一列．假设排列结果恰好拼成一个英文单词：SCIENCE(科学).

要问：在多大程度上应认为这样的结果是奇怪的，甚至怀疑是一种魔术？为便于说明问题，我们给七个字母编号：

1	2	3	4	5	6	7
C	C	E	E	I	N	S

可以用

$$7! = 5040$$

种不同方法把它们进行排列．在这5040种排列中，SCIENCE一词出现在如下四个排列中：

7	1	5	3	6	2	4		7	2	5	3	6	1	4
S	C	I	E	N	C	E		S	C	I	E	N	C	E
7	1	5	4	6	2	3		7	2	5	4	6	1	3
S	C	I	E	N	C	E		S	C	I	E	N	C	E

这时，说明在各种可能情形的总数(5040)中，有4种情形有利于我们所关心的事件(取出的卡片恰好排成SCIENCE一词).在类似的问题中，有利于某事件的情形的个数与各种情形的总数之比称做该事件的**概率**.在上面的例子中，SCIENCE一词出现的概率为

$$p=\frac{4}{5040}=\frac{1}{1260}\approx 0.00079.$$

这个概率显然很小，而我们所考察的事件"恰好构成英文单词SCIENCE"出现的可能性确实很小.我们在下面将会看到，这里算出的概率有如下实际含义：如果多次重复本节一开始所描绘的抽卡片试验，则我们所关心的事件(恰好构成SCIENCE)在1260次试验中大约出现一次.

假如对四个字母D，D，E，E作类似的计算，那么就会发现，四个字母随意排列恰好构成英文单词DEED(行动)的概率等于

$$\frac{4}{4!}=\frac{1}{6}.$$

其余五个字母列

DDEE DEDE EDED EDDE EEDD

中的每个字母列出现的概率也都是1/6.

如果将这四个字母多次重复进行随意排列，则上面的六种字母列中的每一种出现的次数大致各占总数的1/6.

§3. 等可能情形

首先以掷色子为例来说明问题.色子(又称骰子)是一种游戏用具，为一小正方体，其各面分别刻有1，2，3，4，

5，6个点.两枚色子同时掷,两枚色子掷出的点数之和可能等于从2到12的11个数中的任何一个.读者也许会认为,这里总共有11种情形,因此每种情形出现的概率是1/11.然而并非如此.例如，多次重复掷两枚色子的试验就会发现,两枚色子掷出的点数之和等于7远比等于12的机会多.这是显而易见的，因为只有在两枚色子都掷出6个点的唯一一种情形下，其和才等于12，即

$$6+6=12;$$

然而却有六种情形使两枚色子掷出的点数之和等于7，即

$$1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1=7.$$

这里在两个数的和式中,第一项表示第一枚色子掷出的点数,而第二项表示第二枚色子掷出的点数.因此 $1+6$ 和 $6+1$（$2+5$ 和 $5+2$ 以及 $3+4$ 和 $4+3$）分别表示点数之和为7的两种不同情形.

为计算相应的概率，必须考虑36种不同情形，其中每一种情形决定于第一枚色子和第二枚色子掷出的点数：

(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)

自然认为这36种情形是等可能的.经验表明,假如色子的形状是一个正立方体,而且由均匀的材料制成,掷的方法适当(例如，掷前把两枚色子放在玻璃杯中反复摇动)，那么在多次重复掷的过程中，这36种情形出现的机会大致相同.

对于两枚色子掷的点数之和，有(请读者自己验证)

点数之和m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
点数之和为m的不同情形数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
点数之和为m出现的概率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

我们现在给出更确切的定义：有利于某事件的情形数与一切**等可能情形**的总数之比，叫做该事件的**概率**.究竟什么样的情形可认为是等可能的，不是数学问题.例如，假设色子形状方正、材料均匀、掷的方式得当，那么各种点数出现的条件都相同；两枚色子36种点数的组合显然也是等可能的.

把试验的一切可能的结局划分为两两不相容的等可能情形*，是十分微妙的.这里给出的概率的定义称做**古典型的**.往往需要用概率的另外一个定义——统计定义，来代替古典型定义.但是在最初学习概率论时，首先应确认古典型定义.从纯数学的观点上看，这里并不存在任何“不严格性”.关于这一点在第二章将作较详细说明.

§4. 布朗运动和平面上的游动问题

绝不是只有在游戏中、掷色子和玩牌时才需要计算概率.诸如气体运动学、溶解在液体中的物质的扩散理论，以及悬浮在液体中的物质微粒不规则运动(即布朗运动)理论都是以概率论为基础的.

* 我们称两种情形为互不相容的，如果它们不可能同时出现.——译者注.

概率论可以解释，为什么个别分子的运动是毫无秩序的、不规则的，而大量分子总体运动却表现出明显的、简单的规律性.

个别分子的不规则运动和大量分子总体的有规律性的运动，二者之间关系的试验研究的可能性，随着布朗运动的发现而出现了.植物学家布朗(Brown)1827 年发现了一种奇怪的现象，这种现象后来被称做**布朗运动**.布朗在显微镜下观察悬浮在水中的花粉时，发现悬浮在水中的花粉微粒处在连续不断的不规则运动中.甚至在尽力排除可能引起这种运动的外来影响(例如排除由于水温分布不均匀而产生的水平的运动……等)的情况下，这种不规则运动仍不能停止.很快就发现这种运动是悬浮在液体中的任何充分小的微粒的共同性质.这种运动的强度只依赖于液体的温度、粘度和微粒的大小(温度越高、粘度越小、微粒越小，运动的强度也就越高).每一分子沿各自的轨道运动，而且开始十分接近的分子很快就会散开(当然有时也会偶尔再次相遇).

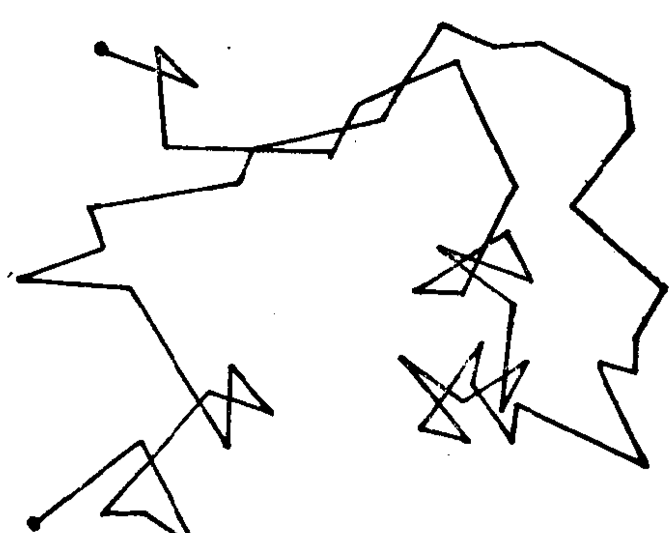

图1 藤黄微粒在水中的游动

图 1 中的点(根据佩林[Perrin]的著名试验)标出 悬浮在水中的微粒每隔30秒的位置，并把这些点按时间顺序依次连接. 实际上微粒的游动轨道还要紊乱得多.

图 2 是三个微粒游动轨道的示意图. 这三个微粒 的 初始位置十分接近，然而它们的轨道却完全不同.

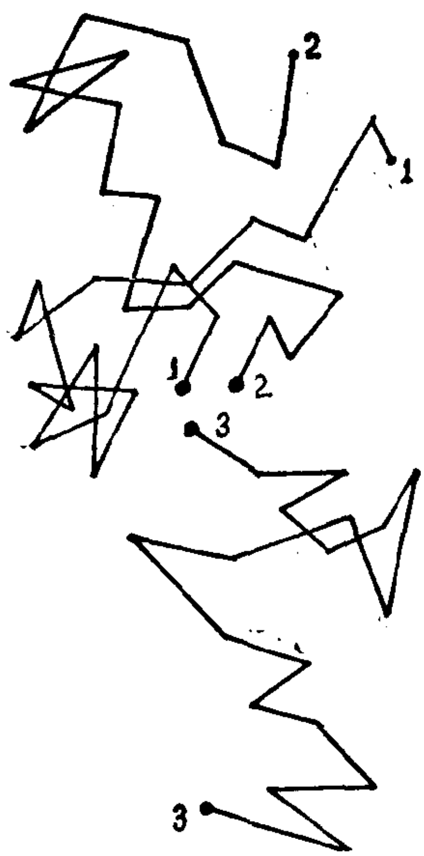

图2　三个微粒的游动轨道

假如向附在小玻璃片上的薄薄的一层水 上 滴 上 一滴墨水，那么就会观测到大量微粒的布朗运动. 用肉眼观察无法看到个别微粒的轨道. 墨迹将呈圆形逐渐向外扩散，而且越接近中心墨迹越深，越靠近边缘墨迹越浅.

图 3 是大量微粒扩散情况的示意图：这些微粒从接近于初始点(标有记号“+”处)的小区域出发作布朗运动，经一段时间后各占据图上墨点所标的位置。

以t表示作布朗运动的大量微粒自初始点出发后所 度 过的时间，d表示以初始点为中心且含一半数量微粒的圆 的 直径(图 3). 观察结果表明，直经d近似地与时间t的平方根成正比，即

$$d = k\sqrt{t}\,. \tag{1}$$

这种规律性可以用概率论的工具从理论上证明. 这一事 实 的证明已超出本书的范围. 但是由于直径d的增长并不是与时间

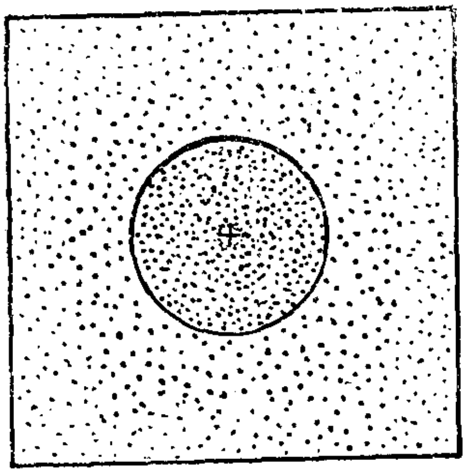

图 3　大量微粒自零点出发经一段时间后的位置

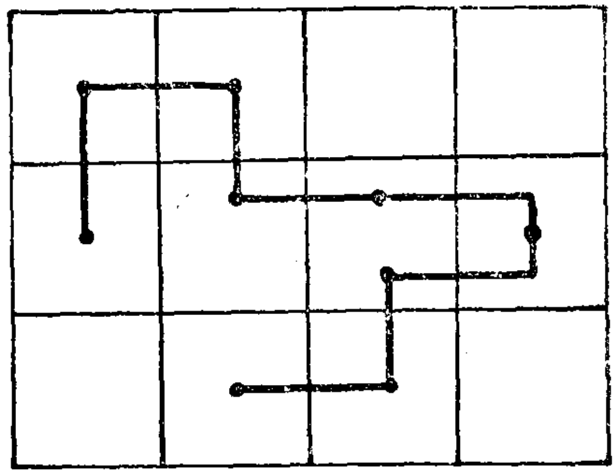

图 4　质点在二维格点上的游动

t成正比(就象微粒自初始点出发后运动的速度和方向保持不变的情形那样)，而是要慢得多，因此我们是容易理解上述事实的．

由质点在画有方格的平面上的游动这种简化模型，就可以观察到微粒作布朗运动的基本特点．无论是研究更为复杂的现象，还是重大的科学研究，都要借助于这种简化模型．

现在假设，被观察的质点从它最初所处的方格出发，向相邻的四个方格之一移动．例如经过八步，它的移动路线(轨道)有图 4 所示的形状．

质点从初始格(图5，a)出发后，经过一步可以进入四个相邻格之一，进入每格的途径只有一条(图5，b)．经过两步：1)可以返回初始格，共有四种不同途径(第一步从初始格进到四个相邻格之一，第二步由所到格返回初始格)；2)进入与初始格对顶的四个格之一，显然对于每个对顶格都有两条途径；3)进入较远的四个格之一，每种情形有唯一直线途径(图5，c)．这