分形理论及其应用

董连科　编著

FENXING
LILUN
JIQI
YINGYONG

FENXING
LILUN
JIQI
YINGYONG

辽宁科学技术出版社

分形理论及其应用

董连科　编著

辽宁科学技术出版社

分形理论及其应用

Fenxing Lilun Jiqi YingYong

董连科　编著

辽宁科学技术出版社出版（沈阳市和平区北一马路108号）

辽宁省新华书店发行　朝阳新华印刷厂分厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：$7^{3}/_{8}$　字数：175,000

1991年3月第1版　1991年3月第1次印刷

责任编辑：宋纯智　责任校对：周　文

封面设计：曹太文

印数：1-1616

ISBN 7-5381-1066-6/O·54　定价：4.50元

内容简介

本书介绍了近年来发展起来的作为应用数学的分形理论及其应用。主要讲述分形概念是如何引进的，分形生成的特征，分形的局部与整体性质，高维分形与多重分形以及处理分形的几种数学方法。突出了分形中的测度观转变的特点，量纲分析方法是处理量纲数转变给人们带来困难的行之有效的方法。同时，介绍了一些应用。分形理论有可能发展成为处理复杂系统的一种数学工具。

本书可供非数学专业的高年级大学生、研究生以及高等学校教师和科学技术工作者学习分形理论或从事研究工作参考。

序　言

物理学是数学的主要应用学科领域之一。经典物理学与经典力学是欧氏几何以及建立在欧氏几何基础上的微积分学的应用领域；A·爱因斯坦的广义相对论认为，由于引力场的作用使时空弯曲。由平直的欧氏时空观到弯曲的非欧时空观的转变，构成了物理学的第一次革命。

整数与分数维集合的几何测度理论，早在本世纪初已由纯数学家们发展起来。伴随电子计算机的广泛应用，物理学家们在随机耗散系统与非线性耗散系统的相空间几何的研究中发现它们往往具有分数维结构。B. B. Mandelbrot在总结了自然界中的非规整几何图形之后，于1975年第一次提出分形这个概念[1]。分形的英文单词是Fractal，它来自拉丁语的Fractus，表示被弄碎的意思。分形中唯一的未定义名词是“规整”。作为一个集合，分形被定义为它的豪斯道夫维数大于它的拓扑维数。散见于不同文献中的“非规整集合”、“S-集合”，“具有精细结构集合”，“分数维集合”、“豪斯道夫测度集合”以及“奇异吸引子”等，均指的是分形。在我国，有人将Fractal译成碎片[5]。自1975年Mandelbrot第一次提出分形这个概念以后，在不同学科领域中分形被广泛地应用起来，到了1982年Mandelbrot出版了他的专著“The Fractal Geometry of Nature”[1]，表明分形理论已初步形成。正是由于他对科学作出了卓越的贡献，他获得了1985年的Barnard奖章。

从数学的观点看，在分形中产生了从欧氏测度到豪斯道夫测度的转变，即产生了测度观的转变；在物理上表现为量纲数的转

变，这是分形理论的主要特征。在人们还没有从已经习惯了的欧氏测度观念中解放出来之前，量纲分析方法是克服因测度观转变给人们带来困难的一种行之有效的方法。

为了突出分形理论中测度观转变的特征，我们在第一与第二两章中，讲述了豪斯道夫测度的引进与性质，这对于非数学专业的科学工作者学习分形理论具有重要的意义。第三章讲述规整集与分形集的结构特征，以便为研究分形集的拓扑性质作准备。第四章介绍了几个经典分形的例子，目的在于说明分形集的构造原则和特征，升维与降维生成是经典分形集生成的两种形式，所有的分形均具有自身的结构层次和存在的结构层次。第五章用量纲分析方法证明了分形中的常用定量关系式的正确形式。在第六和第七两章中，分别讲述了分形结构的局部性质（即多重分形）和高维分形。为了实验研究的需要，在第八章中介绍了几种常用的测定分形维数的实验方法。第九章介绍了分形生长的几种模型。为了说明分形生成的随机性，在第十章中介绍了无规行走与分形。第十一章介绍了目前常用的几种处理分形的数学方法，这些方法对于处理事物发展中的任一暂态的结构形态具有重要的作用；而第十二章的目的，在于介绍处理分形动力学过程的几种方法，在分形动力学的解析数学理论没有给出之前，尽管这些方法还具有一定的局限性，但对于研究分形结构与动态性能还是具有重要的作用。第十三章中介绍了分形在材料力学行为中的应用，特别是分形在断裂行为中的应用，紧紧地与裂纹稳态扩展过程联系在一起。最后，我们以结束语的形式，对分形理论自身的发展以及对其它学科领域产生的重要影响方面，提出了一些猜想，希望能对分形的完备数学理论的形成和分形动力学解析理论的诞生，起到一点催化作用。

王克钢博士生仔细地阅读了本书的全文，对文字、公式和有关数据都作了认真的核对，并提出了许多宝贵的意见。在此，对于他所付出的辛勤劳动表示感谢。

本书重点论述分形的数学特点，侧重了说明分形与应用间的“接口”应如何设计。由于分形中测度观的转变，必须导致量纲数的转变。因此，对于本书的内容选择与处理，可能存在不妥之，希望读者提出批评指正。

董连科

1990年7月于沈阳

目　录

序言

第一章　问题的提出

§1.1　欧氏空间与非欧空间

为了后文的需要，在这一节我们从数学上讲述欧氏空间与非欧空间，以便给出必要的数学结构和二者的差别。

设X是非空集合，在X内引进代数结构之后，得到一个代数系统，只当引进度量结构后，这个代数系统才形成一个空间。

1．代数结构。

从数学的观点看，于集合X内引进代数结构这是起码的要求。于X内引进两种代数运算，分别叫做加法运算与实数域R上的数量乘法运算。

所谓X内的加法运算，是指$(\forall)x_i\in X$，$i=1,2$，恒有$x_1\oplus x_2\in X$；且满足

1）交换律：$x_1\oplus x_2=x_2\oplus x_1$；

2）结合律：$x_1\oplus(x_2\oplus x_3)=(x_1\oplus x_2)\oplus x_3$；

3）存在一个零元素θ，使得

$$x\oplus\theta=x,\ (\forall)x\in X.$$

4）存在一个元素x的逆元素$(-x)$，使得

$$x\oplus(-x)=\theta,\ (\forall)x\in X.$$

实数域R上的数量乘法运算是：$(\forall)x\in X$和$(\forall)\lambda\in R$，恒有$\lambda\cdot x\in X$，要求

1）$1 \cdot x = x$，$(\forall)x \in X$；

2）结合律：

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,\ (\forall)\alpha,\ \beta \in R,\ (\forall)x \in X$$

3）分配律：

$$\alpha \cdot (x_1 \oplus x_2) = \alpha \cdot x_1 \oplus \alpha \cdot x_2\ ;$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x_1 = \alpha \cdot x_1 \oplus \beta \cdot x_1$$

式中，$(\forall)\alpha$，$\beta \in R$，$(\forall)x_1$，$x_2 \in X$.

在上述定义中，我们用符号$\oplus$和$\cdot$分别表示X内元素之间的加法运算和实数域R上的数量乘法运算，条件$(x_1 \oplus x_2) \in X$和$\lambda \cdot x \in X$分别要求加法和数量乘法运算是封闭的。

X是一个抽象集合，例如它可以是n维矢量的集合

$$A = \{a \mid a = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n),\ (\forall)a_j \in R\}$$

也可以是$n \times n$方阵的集合

$$B = \{b \mid b = (b_{ij})_{n \times n},\ (\forall)b_{ij} \in R\}$$

则于A和B内的加法和数量乘法运算，由线性代数可知二者是不同的。

我们将引进上述代数运算的集合X叫做代数系统。在线性代数中，将X叫做线性空间，它的元素叫做点。

由线性代数可知，若集合X中线性无关元素的最多个数是n的话，便说X是n维的，记作R^n。R^n中的一组线性无关元素e^j（$j = 1$，2，…，n）叫做R^n的一组基底，如果$(\forall)x \in R^n$，恒有

$$x = x_1 \cdot e^1 \oplus x_2 \cdot e^2 \oplus \cdots \oplus x_n \cdot e^n = x_i \cdot e^i$$

成立。实数$x_i \in R$（$i = 1$，2，…，n）不全为零。我们称实数x_i（$i = 1$，2，…，n）为元素$x \in R^n$关于基底e^j（$j = 1$，2，…，n）的坐标，常记作$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$。由此可以看出，$R^n$中的点唯一地对应着一个有序的实数组$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$。

R^n仅仅是一个代数系统，只当于R^n中引进度量结构，即两

个元素间的“距离”之后，才可能处理几何问题。

设$P_1(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$P_2(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in R^n$，我们用

$$d(P_1,P_2)=\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2\right]^{1/2} \qquad (1.1-1)$$

定义R^n内二点P_1与P_2间的距离。不难证明d满足下列性质：

1）非负性：

$d(P_1, P_2)\geqslant 0$，$(\forall)P_i\in R^n(i=1, 2)$

2）自反性：

$d(P_1, P_2)=0$，必有$P_1=P_2$

3）对称性

$d(P_1, P_2)=d(P_2, P_1)$，$(\forall)P_i\in R^n(i=1, 2)$

4）三角不等式：$(\forall)P_i\in R^n(i=1, 2, 3)$，有

$d(P_1, P_3)\leqslant d(P_1, P_2)+d(P_2, P_3)$

通常称满足上述性质的d为欧氏度量结构。

我们称引进上述度量结构d的线性空间R^n为欧氏空间，记作$E^n=(R^n, d)$。并且，称（1.1—1）式的度量d为欧氏度量，n叫做欧氏空间的维数。

由（1.1—1）给定的度量d叫做欧氏度量，则于E^n中可以讨论几何问题，通常叫做欧氏几何。由微积分的知识改写（1.1—1）式为

$$(ds)^2=\delta_{ij}dx^i dx^j \qquad (1.1-2)$$

式中的δ_{ij}叫做克罗诺克尔δ

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当i=j\\ 0, & 当i\neq j\end{cases} \qquad (1.1-3)$$

A·爱因斯坦的广义相对论是黎曼几何的应用，黎曼空间是非欧空间的一种。在非欧空间中，（1.1—2）式变成

$$(ds)^2=g_{ij}dx^i dx^j \qquad (1.1-4)$$

式中，g_{ij}叫做度规张量，因讨论的问题不同，它们可以是时空坐标的函数，也可以是时空坐标与序参数的函数。平行性公理最终决定了非欧空间的联络。

§1.2 规整几何的测量问题

从几何学的观点看，欧氏几何是以规整几何图形为其研究对象。在分形中，唯一的未定义名词是“规整”。所谓规整几何图形是指，直线与直线段；平面与平面上的正方形、矩形、梯形、菱形、三角形以及正多边形；三维空间中的长方体、正六面体与正四面体等。另一类就是由曲线或曲面所围成的几何图形；平面上的圆与椭圆；空间中的球、椭球、圆柱、圆台与圆锥等。所谓几何测量系指长度（边长、周长与对角线等）、面积与体积的测量。在欧氏几何测量中，问题归结成以下两类：

（1）长度$=l$，面积$=l^2$，体积$=l^3$；

（2）长度（半径）$=r$，面积$=\pi r^2$，体积$=\frac{4\pi}{3}r^3$.

其余一些几何图形是指能够用上述两类图形进行测量的几何图形。

总结欧氏几何的测量可以看出：类（1）的基础是长度l的测量，平面图形以正方形为基础，空间图形以正六体为基础；类（2）依然是以两点间的距离r为基础，平面图形以圆为标准，空间图形以球为标准。于是，在欧氏几何中关于规整几何图形的测量，可用如下的公式加以描述：

长度$=l$，面积$A=al^2$，体积$V=bl^3$　　　　（1.2—1）

式中，a与b是常数，叫做形状因子。

由规整几何图形的测量公式（1.2—1）式，可以看出：

（1）给定一个集合（如线段、正方形与正六面体等），总有一个相应的几何量（如长度、面积与体积）与之对应，后文将会看出，所谓测度便是这些几何量的推广。

（2）（1.2—1）式告诉人们这些几何量的计算规则。易于看出，长度l，面积A与体积V的量纲分别是长度单位的1、2与3次方。1、2与3恰好与这些几何图形存在空间的欧氏维数相等。并且，均为整数。

就是说，公式（1.2—1）给人们以两点启示：第一是以两点间的直线距离（这是欧氏几何的特征）为标准；第二点是它们的量纲数分别等于几何图形存在空间的维数。

当几何图形的周界曲线或曲面可用解析函数给出时，几何量的计算可用微积分给出。

§1.3 微积分学的基本思想

在上一节，我们总结了欧氏几何中规整几何图形的长度、面积与体积计算公式的特点，并且指出当几何图形的周界曲线或曲面可用解析函数给出时，可用微积分给出这些几何量的计算。

首先，我们以计算曲线的弧长为例来说明长度的计算。众所周知，弧长的微分为

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=[1+(y')^2]\,dx \qquad (1.3—1)$$

则曲线$\{(x,\ f(x))\,|\,y=f(x),\ x\in[a,\ b]\}$的弧长为

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad (1.3—2)$$

由（1.3—1）式与（1.3—2）式可以看出，弧长的微分公式是以欧氏几何为基础的，公式（1.3—1）式来自欧氏几何中的商高定理，并且长度的量纲仍然是长度单位的一次方。

对于由$y=f(x)(x\in[a, b])$所规定的曲边梯形的面积，其计算公式为

$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad (1.3-3)$$

它的积分和是

$$A\doteq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad (1.3-4)$$

该式标明，是以小矩形的面积$A_i=f(x_i)\Delta x_i$为标准进行迭加的。显然地，面积的量纲是长度单位的二次方。

二重积分的积分和为

$$V\doteq \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x_i\Delta x_j \qquad (1.3-5)$$

而二重积分为

$$V=\iint_D f(x, y)dxdy \qquad (1.3-6)$$

由（1.3—5）式可以看出，在计算曲顶柱体的体积时，是以直六面体为标准的。体积V的量纲是长度单位的三次方。

综上看出，微积分学是以欧氏几何为基础的，它所给出的几何量的量纲是长度单位的整数次幂，即分别是长度单位的1、2与3次幂。另一方面，微积分学作为计算几何图形的几何量，确实扩大了可计算的图形类型。

§1.4 非规整几何的测量

在欧氏几何的基础上，关于规整几何图形的几何量测量以及微积分的构造，都是标准的几何图形——平面上的矩形或正方