

数学题解

(上册)

孙海正 王得福 于永泉

人民教育出版社

中学生课外读物

数 学 题 解

(上 册)

孙海正 王得福 于永泉

吉林人民出版社

封面设计：王劲涛

中学生课外读物
数 学 题 解
(上、下册)

孙海正 王得福 于永泉 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 16%印张

1980年3月第1版 1980年3月第1次印刷

印数：1—402,480册

书号：7091·1085 定价：1.30元

前 言

为了提高中学生的数学水平，我们编写了这本《数学题解》。

本书由例题和练习题两部分组成。所选的例题力求具有典型性。在例题的编排上，注意由浅入深和便于显示各种类型题的解法的规律性。在一种(或几种)类型题的解法之后，我们写了小结，这些小结是我们对解法的规律性的认识，可供参考。这些小结是从某一角度归纳出来的，可能有某些片面性。书中安排了一些练习题，其目的是通过这些题目的练习，进一步体会例题所揭示的解题规律。

在编写本书时，我们也考虑到中学数学课外活动的需要，力求使每个单元都可以作为一次专题讲座的内容，其中某些部分就是取材于我们给学生作的专题讲座。

由于编者水平所限，书中一定会有缺点、错误，希望批评指正。

编 者

一九七九年一月于吉林师大附中

目 录

第一部分：代数部分

一、代数式	1
1. 因式分解问题	1
A. 提取公因式法	1
B. 配平方法	4
C. 排列成一个字母的二次三项式	6
D. 利用剩余定理	7
E. 待定系数法	8
练习题一	10
2. 代数式求值问题	11
A. 直接代入求值	11
B. 变形后求值	14
练习题二	18
3. 等式证明问题	19
A. 证明恒等式	19
B. 证明条件等式	22
练习题三	27
二、代数方程与方程组	28
1. 一元方程的解法	28
A. 含有参数的方程的解法	28
B. 换元法	31

练习题四	35
2. 一元二次方程理论方面的问题	36
练习题五	39
3. 方程组的解法	40
A. 因式分解法	40
B. 换元法	42
C. 消元法	45
练习题六	48
三、不等式	50
1. 不等式的解法	50
A. 一次不等式	50
B. 二次不等式	51
C. 分式不等式	53
D. 含有绝对值符号的不等式	55
E. 无理不等式	58
练习题七	60
2. 不等式的证明	61
A. 绝对不等式的证明	61
B. 带有一定条件的不等式的证明	68
C. 不等式的应用问题	71
练习题八	73
四、指数与对数	74
1. 指数计算问题	74
A. 利用指数定义计算	74
B. 利用指数法则进行计算	75
C. 利用有理式恒等变形的各种手段计算	76

练习题九	78
2. 求对数问题	79
A. 利用对数定义化为指数问题	79
B. 利用换底公式进行计算	80
C. 利用解方程组进行计算	81
3. 对数式计算问题	82
练习题十	83
4. 指数与对数的证明问题	84
练习题十一	88
5. 指数方程、对数方程及不等式的解法	89
A. 两边化为同底数的幂	89
B. 两边化为同底数的对数	90
C. 用取对数的方法解指数方程	92
D. 换元法	93
6. 应用问题	97
练习题十二	98
五、函数	99
1. 求函数的解析表达式、定义域和值域问题	99
2. 函数的图象问题	104
练习题十三	105
3. 求函数的极值问题	106
A. 归结为求二次函数的极值	106
B. 利用求函数的值域求极值	108
C. 利用不等式求函数的极值	111
D. 研究函数图象的升降情况确定函数的极值	113
练习题十四	115

六、数列	116
1. 求数列的通项公式	116
A. 类推法	116
B. 利用(已知的)等差数列或等比数列的通项公式	117
C. 利用等差数列或等比数列求和公式	118
D. 待定系数法	119
2. 关于等差数列问题	120
A. 求项数问题	120
B. 求和问题	121
C. 插入等差中项问题	124
D. 确定数列问题	124
E. 证明问题	126
F. 应用问题	127
练习题十五	128
3. 等比数列问题	129
A. 确定数列问题	129
B. 求和问题	131
C. 插入等比中项问题	133
D. 证明问题	134
E. 应用问题	135
4. 等差数列、等比数列的混合问题	135
练习题十六	137
5. 无穷递缩等比数列问题	138
6. 求数列的极限	141
练习题十七	144
七、数的问题	145

1. 整数	145
练习题十八	153
2. 有理数	154
练习题十九	158
3. 实数	159
练习题二十	166
4. 复数	167
练习题二十一	179
八、排列、组合	179
练习题二十二	190
九、数学归纳法	191
练习题二十三	200
十、二项式定理	201
练习题二十四	207

第二部分：三角函数

十一、三角函数	209
1. 三角函数的概念	209
A. 求三角函数的定义域和值域	209
B. 求三角函数的值	212
练习题二十五	215
2. 同角三角函数间的关系和诱导公式	216
A. 化简问题	216
B. 求值问题	219
C. 证明恒等式问题	222

D. 证明不等式问题	225
E. 综合问题	227
练习题二十六	228
3. 和、差、倍、半角公式	231
A. 求值问题	231
B. 证明问题	244
C. 三角不等式的证明问题	273
D. 求极值问题	279
E. 消去法问题	286
练习题二十七	292
十二、解三角形	298
1. 求边长和求角问题	298
2. 等式证明问题	303
3. 确定三角形形状问题	307
4. 半角定理和三角形面积公式	308
练习题二十八	315
十三、解三角方程与三角不等式	318
练习题二十九	331

第三部分：几何部分

十四、平面几何	333
1. 四点共圆问题	333
练习题三十	338
2. 三点共线问题	339
练习题三十一	346

3. 三线共点问题	347
练习题三十二	354
4. 定值问题	354
练习题三十三	358
5. 最大值与最小值问题	358
练习题三十四	362
6. 列方程解几何计算题	363
练习题三十五	368
7. 几何问题的三角解法	369
练习题三十六	376
8. 阴影面积问题	377
练习题三十七	381
9. 间接证法	383
练习题三十八	387
十五、立体几何	388
1. 证明问题	388
练习题三十九	404
2. 计算问题	406
练习题四十	427

第四部分：解析几何

十六、轨迹问题	429
1. 无参数问题	429
练习题四十一	434

2. 有参数问题	435
练习题四十二	449
3. 极坐标问题	450
练习题四十三	453
4. 参数方程问题	453
练习题四十四	460
十七、求已知曲线方程问题	460
1. 直线方程	460
练习题四十五	471
2. 圆的方程	472
练习题四十六	478
3. 抛物线、椭圆、双曲线的方程	479
练习题四十七	482
十八、求点的坐标和几何量问题	483
1. 求点的坐标	483
练习题四十八	493
2. 几何量的计算问题	494
练习题四十九	507
十九、证明问题	508
1. 几何量之间的关系问题	508
练习题五十	529
2. 曲线间的关系问题	530
练习题五十一	547
附: 练习题答案	549

第一部分：代数部分

一、代数式

1. 因式分解问题

A. 提取公因式法

1. 分解因式： $2(a^2 + b^2)(a + b)^2 - (a^2 - b^2)^2$.

[解]
$$\begin{aligned} & 2(a^2 + b^2)(a + b)^2 - (a^2 - b^2)^2 \\ &= 2(a^2 + b^2)(a + b)^2 - (a + b)^2(a - b)^2 \\ &= (a + b)^2[2(a^2 + b^2) - (a - b)^2] \\ &= (a + b)^2(2a^2 + 2b^2 - a^2 + 2ab - b^2) \\ &= (a + b)^2(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= (a + b)^2(a + b)^2 \\ &= (a + b)^4. \end{aligned}$$

2. 分解因式： $(x - 2y)x^3 - (y - 2x)y^3$.

[解]
$$\begin{aligned} & (x - 2y)x^3 - (y - 2x)y^3 \\ &= x^4 - 2x^3y - y^4 + 2xy^3 \\ &= (x^4 - y^4) - 2xy(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - 2xy(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2xy) \end{aligned}$$

$$= (x+y)(x-y)(x-y)^2$$

$$= (x+y)(x-y)^3.$$

3. 分解因式: $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$.

$$[\text{解}] \quad xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$$

$$= xy(x-y) + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2$$

$$= xy(x-y) - z(x^2 - y^2) + z^2(x-y)$$

$$= xy(x-y) - z(x+y)(x-y) + z^2(x-y)$$

$$= (x-y)[z^2 - (x+y)z + xy]$$

$$= (x-y)(z-x)(z-y).$$

4. 分解因式: $3x^3 + 7x^2 - 4$.

$$[\text{解}] \quad 3x^3 + 7x^2 - 4$$

$$= 3x^3 + 3x^2 + 4x^2 - 4$$

$$= 3x^2(x+1) + 4(x+1)(x-1)$$

$$= (x+1)(3x^2 + 4x - 4)$$

$$= (x+1)(x+2)(3x-2).$$

5. 分解因式: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

$$[\text{解}] \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc$$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab]$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

6. 分解因式: $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

$$\begin{aligned}
 & \text{〔解〕 } x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \\
 &= x^4 - x^3 - 7x^2 + 7x - 6x + 6 \\
 &= x^3(x-1) - 7x(x-1) - 6(x-1) \\
 &= (x-1)(x^3 - 7x - 6) \\
 &= (x-1)(x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6) \\
 &= (x-1)[x^2(x+1) - x(x+1) - 6(x+1)] \\
 &= (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6) \\
 &= (x-1)(x+1)(x+2)(x-3).
 \end{aligned}$$

小结: 分解因式时, 如有公因式应首先提取公因式. 有的公因式很容易发现, 有的则需要适当变形后才能发现. 常用的变形方法有: (1)适当分组(分组时如有括号或去掉全部括号, 或去掉部分括号后, 再加括号分组). (2)适当分裂某一项或某几项. (3)适当加项, 注意正负相消保持恒等. (4)如果在一个式子里含有同次幂的字母, 则将含有某一字母的同次幂的项分为一组, 其余的项作为另一组. 这样的分组方法对齐次式常常是有效的, 看以下两题.

7. 分解因式:

$$x^3 + (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x + abc.$$

$$\begin{aligned}
 & \text{〔解〕 } x^3 + (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x + abc \\
 &= x^3 + ax^2 + bx^2 + cx^2 + bcx + cax + abx + abc \\
 &= (ax^2 + cax + abx + abc) + (x^3 + bx^2 + cx^2 + bcx) \\
 &= a(x^2 + cx + bx + bc) + x(x^2 + bx + cx + bc)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+a)(x^2+cx+bx+bc) \\
 &= (x+a)[(x^2+cx)+(bx+bc)] \\
 &= (x+a)[x(x+c)+b(x+c)] \\
 &= (x+a)(x+b)(x+c).
 \end{aligned}$$

8. 分解因式:

$$(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 + c^2x^2 + c^2y^2.$$

$$\begin{aligned}
 \text{〔解〕} \quad &(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 + c^2x^2 + c^2y^2 \\
 &= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\
 &\quad + c^2x^2 + c^2y^2 \\
 &= a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + c^2y^2 \\
 &= (a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2) + (a^2y^2 + b^2y^2 + c^2y^2) \\
 &= x^2(a^2 + b^2 + c^2) + y^2(a^2 + b^2 + c^2) \\
 &= (x^2 + y^2)(a^2 + b^2 + c^2).
 \end{aligned}$$

B. 配平方法

9. 分解因式: $x^4 + 4$.

$$\begin{aligned}
 \text{〔解〕} \quad &x^4 + 4 \\
 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
 &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).
 \end{aligned}$$

10. 分解因式:

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

$$\begin{aligned}
 \text{〔解〕} \quad &2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\
 &= 4a^2b^2 - 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) \\
&= (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\
&= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\
&= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \\
&= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b-a+c).
\end{aligned}$$

11. 分解因式: $(x+1)^4 + (x^2-1)^2 + (x-1)^4$.

$$\begin{aligned}
\text{〔解〕} \quad &(x+1)^4 + (x^2-1)^2 + (x-1)^4 \\
&= (x+1)^4 + (x+1)^2(x-1)^2 + (x-1)^4 \\
&= (x+1)^4 + 2(x+1)^2(x-1)^2 + (x-1)^4 - (x^2-1)^2 \\
&= [(x+1)^2 + (x-1)^2]^2 - (x^2-1)^2 \\
&= [(x+1)^2 + (x-1)^2 + (x^2-1)][(x+1)^2 \\
&\quad + (x-1)^2 - (x^2-1)] \\
&= (x^2+2x+1+x^2-2x+1+x^2-1)(x^2+2x \\
&\quad + 1+x^2-2x+1-x^2+1) \\
&= (3x^2+1)(x^2+3).
\end{aligned}$$

12. 分解因式: $x^2 - 2ax - b^2 + 2ab$.

$$\begin{aligned}
\text{〔解〕} \quad &x^2 - 2ax - b^2 + 2ab \\
&= x^2 - 2ax + a^2 - a^2 - b^2 + 2ab \\
&= (x^2 - 2ax + a^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\
&= (x-a)^2 - (a-b)^2 \\
&= (x-a+a-b)(x-a-a+b) \\
&= (x-b)(x-2a+b).
\end{aligned}$$

小结: 应用配平方作因式分解, 其基本思想是引入加减