微分方程

罗亚平
陈　仲　编

南京大学出版社

微　分　方　程

罗亚平　陈　仲　编

南京大学出版社

1987・南　京

内 容 简 介

本书是南京大学物理类各专业的微分方程教材。内容包括初等积分法、解的一般理论、高阶线性微分方程、幂级数解、边值问题、微分方程组以及一阶偏微分方程等。

本书除介绍基本理论和方法外，注重解题技能的训练，选编了较多的典型例题，重点突出，深入浅出。本书可作为高等学校非数学专业的微分方程教材，也可供科技工作者和青年参考或自学。

微 分 方 程

罗亚平 陈 仲 编

南京大学出版社出版
（南京大学校内）
江苏省新华书店发行 国营丹徒县印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 9.4375 字数 212千
1987年7月第1版 1987年7月第1次印刷
印数 1—6000

ISBN 7-305-00040-X/O·5
统一书号：13336·036 定价：2.50元

责任编辑 秦 涛

前　言

本书是南京大学物理类各专业的微分方程教材，全书分6章，包括初等积分法、存在唯一性定理、高阶线性方程、级数解法、边值问题、微分方程组和一阶偏微分方程等，这些内容是微分方程这门学科的最基本的理论和方法。本书在叙述基本理论的同时，注重解题技能的训练，选编了较多典型的例题和一定数量的习题，并附有习题答案。

本书是编者于1982年编的《微分方程讲义》经过多次试用，广泛征求意见，修改和补充而成的。编者分工合作，第1，6章由罗亚平编写，第2，3，4，5章由陈仲编写。在编写中，力求内容准确，陈述简练，重点突出。

叶彦谦教授对编者热忱关怀，仔细地审阅了本书初稿，并提出许多宝贵的修改和补充意见。谨此深表感谢。

许绍溥、胡宣达、朱德明等老师分别在南京大学计算机系，物理系和信息物理系等试用过本书初稿，并提出许多宝贵意见；何崇佑教授，南京大学数学系主任郑维行教授，副主任朱乃谦等对编者的热情关心；南京大学数学系微方程教研室的同志们积极支持，谨此一并致谢。

本书可供高等院校非数学专业作微分方程的教材，每周3学时教一学期，打＊号的内容和部分应用的例子可供选用，或留给学生课外阅读。本书也可供工程技术人员参考。

限于编者水平，缺点和错误难免，恳请不吝赐教。

陈　仲　罗亚平

1986年5月

目　录

初等积分法 1

§1.1 基本概念

在许多实际问题中，常常需要研究某种运动过程的变化规律，找出反映这些变化规律的函数关系。这些规律用数学来描述就得到一些方程。有时要直接找出联系各个变量的关系式往往不容易，而较容易建立这些变量和它们的导数间的方程式，我们称这种方程为微分方程。从微分方程中解出未知函数，也就找到了反映变化规律的函数关系。自然科学中的许多规律，用微分方程的语言来表达是最为自然的，因此，微分方程在各个学科特别是应用科学部门都有广泛的应用。下面先看几个简单的例子。

例1　求曲线方程，使其上各点的切线斜率等于该点横坐标的平方，且通过坐标原点。

解　设所求曲线方程是 $y=y(x)$，那么根据所给的条件应有下列关系

$$\begin{cases} y'(x)=x^2 & (1.1) \\ y\Big|_{x=0}=0 & (1.2) \end{cases}$$

这里，$y\Big|_{x=0}=0$ 表示 $x=0$ 时，对应的 $y=0$，它反映曲线过点(0,0)。

这个问题可通过直接积分一次解出．对方程(1.1)积分，得到满足它的函数的一般形式

$$y=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C \tag{1.3}$$

式中 C 是任意常数．当 C 取不同值时，就得到不同的函数，它们都满足方程(1.1)，这说明满足(1.1)的曲线有无穷多条．但问题所要求的只是通过原点的那条曲线，把条件(1.2)代入式(1.3)，便确定了 $C=0$，于是求得了一条过原点的曲线

$$y=\frac{x^3}{3} \tag{1.4}$$

式(1.3)表达了满足方程(1.1)的所有曲线，它们可看成由曲线(1.4)沿y轴平移后得到的一族曲线（见图1.1）．

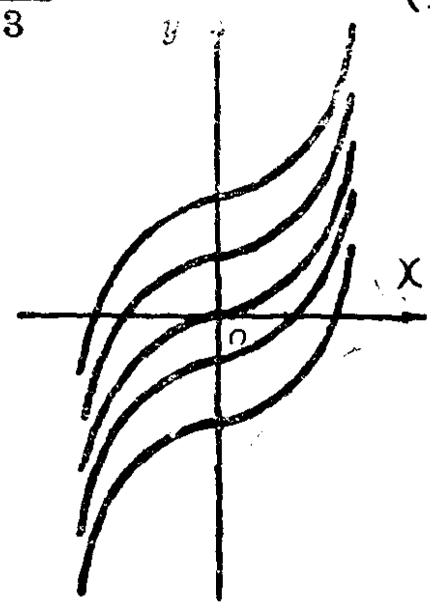

图 1.1

例2　以初速度 v_0 铅直向上抛一质量为 m 的物体，设物体运动只受重力影响，求任意时刻 t 物体的高度 $h(t)$．

解　考虑物体离地面不很高，重力加速度 g 可看作常数．据牛顿第二定律 $F=ma$ 来建立物体运动的微分方程．加速度 $a=\frac{d^2h}{dt^2}$，物体只受重力作用，所以$F=-mg$，这里加负号是因为重力的方向总是铅直向下的，和坐标轴正方向相反．因此得到方程

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=-mg \qquad 即 \qquad \frac{d^2h}{dt^2}=-g \tag{1.5}$$

初始时刻满足的条件为：当 $t=0$ 时，

$$h\Big|_{t=0}=h(0)=0 \qquad \text{（初始高度）}$$

$$\frac{dh}{dt}\Big|_{t=0}=v\Big|_{t=0}=v(0)=v_0 \qquad \text{（初始速度）} \tag{1.6}$$

这个问题可通过直接积分两次解出。积分一次得

$$v(t)=\frac{dh}{dt}=-gt+C_1 \tag{1.7}$$

再积分一次，得到

$$h(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{1.8}$$

式中 C_1 和 C_2 是任意常数.式(1.8)是满足方程(1.5)的函数的最一般形式。为了从中确定满足初始条件的函数，只要利用式(1.6)确定出任意常数 C_1,C_2。

由 $\frac{dh}{dt}\Big|_{t=0}=v_0$ 代入式(1.7)可得 $C_1=v_0$；再由 $h\Big|_{t=0}=0$ 代入(1.8)，得 $C_2=0$。故得时刻 t 物体的高度为

$$h(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1.9}$$

从以上例子可大体看出用微分方程解题的轮廓：先是建立微分方程，然后求满足微分方程的函数.由于建立微分方程要牵涉到较多的物理规律和专业知识，因此只能讲一些最基本的方法，我们主要讲求解微分方程的方法。下面介绍一些基本概念。

1.微分方程　阶　凡包含自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的等式叫做微分方程。若微分方程中的未知函数只依赖于一个自变量，则称为常微分方程，如

方程(1.1),(1.5)都是常微分方程。若未知函数为多元函数，并在方程中含有未知函数的偏导数，这种方程叫做偏微分方程。例如在"数学物理方程"课程中将要重点研究的著名的古典方程

$$\text{波动方程：}\quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

$$\text{热传导方程：}\quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.11}$$

$$\text{泊松方程：}\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-4\pi\rho \tag{1.12}$$

等等，就是偏微分方程。一般说来，偏微分方程是在连续介质物理学——牵涉到电磁场、流体、弥散及波动——的问题中产生出来的。

注意，微分方程中可以不含自变量和未知函数，例如方程(1.5),(1.10),(1.11)等，但必须含有未知函数的导数或偏导数。

微分方程中出现的各阶导数的最高阶数叫做微分方程的**阶**。如方程(1.1)是一阶常微分方程，(1.5)是二阶常微分方程，而(1.10),(1.11),(1.12)则是二阶偏微分方程。

如果微分方程对未知函数和所有出现的未知函数的各阶导数的总体而言是一次的，就称为**线性微分方程**；否则称为**非线性微分方程**。

2.解　积分曲线　满足微分方程的函数称为**解**。所谓解一个微分方程，就是要找出满足它的未知函数，即要找出这样的函数，将它及其各阶导数代入微分方程后得到一个对自变量而言的恒等式。例如，例2中式(1.8)和式(1.9)都是(1.5)的解，而函数$u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{(x-b)^2}{4a^2t}\right)$是方程(1.11)的

解。

常微分方程的解有两种明显不同的形式。一种解包含任意常数，另一种解不包含任意常数。我们将含有独立的任意常数①的个数与方程的阶数相等的解称为常微分方程的通解（或一般解）。通解中，按给定的特定条件确定出全部任意常数为特定值或指定全部任意常数为特定值，所得到的不含任意常数的解，称为特解。如式(1.8)是方程(1.5)的通解，而式(1.9)则是方程(1.5)的一个特解。通解表示某种运动过程的一般规律，特解则表示某一具体运动过程的规律。至于偏微分方程的通解，至今还没有明确的定义，在以后有关问题中再讲。

常微分方程的解以隐函数形式给出时，叫做常微分方程的积分，而通解以隐函数形式给出时叫做通积分。为了简单起见，有时我们将不把解与积分两个名词严格分开。常微分方程特解的几何图形是一条平面曲线，叫做积分曲线。通解在几何上则表示一族曲线，叫做积分曲线族。

3. 初值问题　在例1和例2中，用于确定特解的条件(1.2)，(1.6)，叫做初始条件。初始条件在具体问题中表达一定的具体意义。例1中的条件(1.2)表示曲线过原点，例2中的初始条件(1.6)给出了物体的初始位置和初始速度。

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(x;y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

它的通解中包含 n 个独立的任意常数 $C_1,\cdots,C_n$，其形式为 $y=\psi(x,C_1,\cdots,C_n)$，而通积分的形式是 $\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$。要确定这 n 个常数需要给出 n 个初始值，它们是

---

①独立的任意常数，粗略地说是指这些常数不能互相合并和取代。

$$y\Big|_{x=x_0}=y(x_0)=y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0}=y'(x_0)=y_0',$$

$$\cdots,\quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{1.13}$$

x_0是自变量的初始值，$y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$分别是相应的未知函数及其到$(n-1)$阶导数的初始值．式(1.13)称为$n$阶常微分方程的初值条件．求微分方程满足初值条件的解的问题，称为初值问题或柯西(Cauchy)问题．

本章下面几节先来讨论已解出导数的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

也可写成对称形式

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

由于$M(x,y)$，$N(x,y)$形式的不同，有各种不同的解法．

§1.2 可分离变量的一阶方程

形如

$$f_1(x)dx=f_2(y)dy \tag{1.14}$$

的方程称为已分离变量的方程．式中$f_1(x)$，$f_2(y)$连续，不同时为零．方程(1.14)中变量x与y的地位是平等的．根据一阶微分形式的不变性，对(1.14)两边积分，得到

$$\int f_1(x)dx=\int f_2(y)dy+C \tag{1.15}$$

我们来证明式(1.15)就是方程(1.14)的通积分．事实上，取定C值后，不妨假设$f_2(y)\neq 0$，则应用隐函数存在定理，

由式(1.15)可以确定 $y=Y(x)$，因此有

$$\int f_1(x)dx=\int f_2(Y(x))dY(x)+C$$

两边对 x 求导，得到

$$f_1(x)=f_2\Big(Y(x)\Big)\frac{dY(x)}{dx}$$

即

$$f_1(x)dx=f_2(Y(x))dY(x)$$

这表示由式(1.15)所确定的任一函数 $y=Y(x)$ 满足方程(1.14)，是方程(1.14)的解。又式(1.15)含有一个任意常数 C，因此式(1.15)是方程(1.14)的通积分。

注意，式(1.15)中的积分都只表示一个原函数，积分常数C已单独写出。

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{1.16}$$

或

$$\phi_1(x)\psi_1(y)dx+\phi_2(x)\psi_2(y)dy=0 \tag{1.17}$$

的方程称为**可分离变量的方程**. 只要经过简单的代数运算就可化成(1.14)的形状求解.

若 $\psi_1(y)\cdot\phi_2(x)\neq 0$，将方程(1.17)两边同时乘以 $[\psi_1(y)\phi_2(x)]^{-1}$，便得变量已分离的方程

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dx+\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy=0$$

积分，便得方程(1.17)的通积分

$$\int\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dx+\int\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy=C \tag{1.18}$$

另外，若 $\psi_1(y)\cdot\phi_2(x)=0$，则由 $\psi_1(y)=0$ 解出的每

一根 $y=y_0$（常数）都满足方程(1.17)，故 $y=y_0$ 是(1.17)的一个解（称为常数解），它们是在除以 $\psi_1(y)$ 时丢失的。同样，由 $\phi_2(x)=0$ 解出的每一个根 $x=x_0$（常数）也是方程(1.17)的一个常数解。这两种解有时可包含在通积分中，但有时不论 C 取何值通积分中都不能包含这两种解，所以在结论中除写出通积分外，必须写上通积分不能包含的这种常数解。

例1　解方程

$$\frac{dy}{dx}=2xy$$

解　当 $y\neq 0$ 时，两边乘 $\frac{dx}{y}$，得到变量分离的方程

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx$$

积分得

$$\ln|y|=x^2+C_1$$

即

$$|y|=e^{x^2+C_1}=e^{C_1}e^{x^2}=Ce^{x^2}$$

式中 $C=e^{C_1}>0$。去掉绝对值，得通解为

$$\begin{aligned} y&=\pm Ce^{x^2} \quad （C>0\text{ 是任意常数}）\\ &=Ce^{x^2} \quad （C\neq 0\text{ 是任意常数}）\end{aligned}$$

还有 $y=0$ 是常数解。但当通解中取 $C=0$ 就包含了它，故所求通解为

$$y=Ce^{x^2}$$

注1　这种分析较烦，常采用简单化的写法：“积分，得 $\ln|y|=x^2+\ln|C|$，故得通解为 $y=Ce^{x^2}$（解 $y=0$ 包含在其中）。”还需指出，在去掉符号ln的解式中，若出现平方

根，则要注意根号内是否有绝对值。例如方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$的解应是$y=C\sqrt{|x|}$，而不能写成 $y=C\sqrt{x}$ 或 $y=\sqrt{Cx}$。

例2 解方程

$$y'=\sqrt{1-y^2}$$

解 分离变量，当$1-y^2\neq 0$时有

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx$$

积分，得

$$\arcsin y=x+C$$

即通解为

$$y=\sin(x+C)$$

另外还有由 $1-y^2=0$ 得到的常数解

$$y=\pm 1$$

例3 解

$$\begin{cases} x(1-y^2)dx-y(1+x^2)dy=0 \\ y\Big|_{x=0}=2 \end{cases}$$

解 当 $1-y^2\neq 0$ 时，两端乘以 $1/[(1-y^2)(1+x^2)]$，得

$$\frac{2x}{1+x^2}dx-\frac{2y}{1-y^2}dy=0$$

积分，得

$$\ln(1+x^2)+\ln|1-y^2|=\ln|C|$$

故通积分为

$$(1+x^2)(1-y^2)=C$$

由所给初值条件$y|_{x=0}=2$，可定出$C=-3$，因此，所求的特解（积分）为

$$(1+x^2)(1-y^2)=-3$$

例4 已知镭在任何时刻的衰变速度与该时刻所存镭的质量M成正比。又已知$t=0$时，存镭M_0克，求在任何时刻t的存镭量。

解 设在t时的存镭量为$M(t)$，则衰变速度为$-\frac{dM}{dt}$，由已知规律得方程和初始条件为

$$\begin{cases} -\dfrac{dM}{dt}=kM \\ M\Big|_{t=0}=M_0 \end{cases}$$

式中$k>0$为比例常数。分离变量得

$$\frac{dM}{M}=-kdt$$

两边积分得

$$\ln|M|=-kt+\ln|C|$$

即

$$M=Ce^{-kt}$$

由初始条件可确定$C=M_0$，故得时刻t时镭的余存量为

$$M=M_0e^{-kt}$$

正常数k值表示反应进行的速率，可由实验求得。k值大，衰变过程快，k值小，衰变过程慢。放射性元素的衰变率常用半衰期表示，这是一定量的元素衰减到一半所需的时间，故半衰期T满足

$$\frac{M_0}{2}=M_0e^{-kT}$$

即

$$kT=\ln 2$$

如果从实验获得k或者T，就可用上式求出另一个值。

可利用自然界中的某些放射性元素（其半衰期已知）来确定几千年前直至几十亿年前出现事件的时期，这在地质学及考古学中都已广泛应用。在地质学中，利用岩石中铀（半衰期为45亿年）与其衰变后的生成物铅的含量之比来确定岩石的生成时期。在考古学中，可利用有机性古物（如木头、木炭、植物纤维、肉、皮、骨、角）中放射性碳（半衰期为5600年）的含量来测定它们的年龄。例如一块木头从活树上砍下来后，不再吸收新的放射性碳，而体内原有的放射性碳则继续进行衰变，如果测得这块木头的放射性碳只有活树的一半，那末它大致是从5600年前的活树上砍下的。在具体测定时有技术上的困难，但一般只要年代不太久(小于5万年)，这种方法能测得相当准确。

注2　有些方程要作简单的函数代换才化为可分离变量方程.如对方程 $y'=f(x+by+c)$，可作代换 $z=ax+by+c$。

例5　求解方程

$$\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$$

解　作代换 $z=x+y$，$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$，代入方程，得到

$$\frac{dz}{dx}=z^2+1$$

这是可分离变量的方程，分离变量，得

$$\frac{dz}{1+z^2}=dx$$

积分，得

$$\operatorname{tg}^{-1}z=x+C \qquad 即 \qquad z=\operatorname{tg}(x+C)$$