



《中国工程物理研究院科技丛书》第005号

映象与混沌

陈式刚 编著

国防工业出版社

0322

14

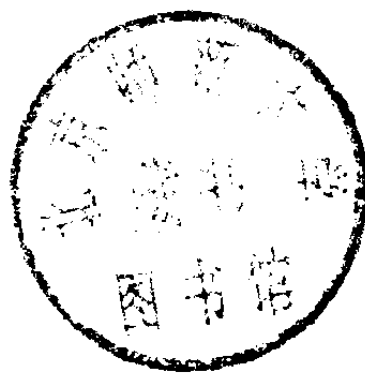
1736071

《中国工程物理研究院科技丛书》第005号

映象与混沌

陈式刚 编著

JY11/07/08



国防工业出版社



B1029371

(京)新登字106号

内 容 简 介

本书是介绍混沌理论的专著。混沌是确定论系统的一种普遍现象，由非线性演化方程描述的系统大部分都会出现混沌。混沌现象的发现，改变了人们对现实世界的原有看法。

全书共二十二章，着重于从物理角度研究问题。从由简单物理模型得到的典型映象的研究，来阐述混沌运动的特性与基本规律。所得的规律对于混沌运动具有普适性。

本书对物理学家所必须了解的定理给出了易于理解的详尽的证明，并着重于深入地阐明混沌运动的基本规律。

本书还概述了作者及其合作者在混沌运动基本规律方面的研究成果。

本书可供理论物理专业的大学生和研究生作参考书，也可供从事非线性科学研究的科研人员参考。

映 象 与 混 沌

陈式刚 编著

*

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店经售

河北涿中印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印张11 287千字

1992年6月第1版 1995年6月第2次印刷 印数1501—4500册

ISBN 7-118-00945-8/O·75 定价：15.00元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

《中国工程物理研究院科技丛书》出版说明

中国工程物理研究院建院三十年来，坚持理论研究、科学实验和工程设计密切结合的科研方向，完成了国家下达的各项国防科研任务。通过完成任务，在许多专业学科领域里，不论在基础理论方面，还是在实验测试技术和工程应用技术方面，都有重要发展和创新，积累了丰富的知识和经验，造就了一大批优秀科技人材。

为了扩大科技交流与合作，促进我院事业的继承与发展，系统地总结我院三十年来在各个专业领域里集体积累起来的经验，吸收国内外最新科技成果，形成一套系列科技丛书，无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科研工作的成果，内容涉及本院过去开设过的二十几个主要学科。现在和今后开设的新学科，也将编著出书，续入本丛书中。

这套丛书将在今后几年里陆续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍，经编委会审定后，也纳入本丛书系列。

谨以此套丛书献给三十年来为我国国防现代化而献身的人们！

《中国工程物理研究院科技丛书》编审委员会

1989年1月25日

《中国工程物理研究院科技丛书》

首届编审委员会

主 任 俞大光

副主任 章冠人

委 员 (以姓氏笔画为序)

丁厚本	于洞庭	水鸿寿	方乃相	王铁铮
刘庆兆	汤绍源	华欣生	吴宏志	杨成龙
张永昌	张寿齐	金行星	周正朝	罗诚鉴
赵维晋	姚景华	姚礼屏	贺仁辅	高天祐
徐锡申	徐清之	董海山	谢铭勋	曾启铭
赖祖武				

本丛书编辑部

负 责 人 吴衍斌

本册编辑 吴衍斌

《中国工程物理研究院科技丛书》

已 出 版 书 目

- | | | | | |
|-----|--------------|-----------|---------|----------|
| 001 | 高能炸药及相关物性能 | 董海山主编 | 科学出版社 | 1989年10月 |
| 002 | 光学高速摄影测试技术 | 谭显祥 周芬芬编著 | 科学出版社 | 1990年2月 |
| 003 | 凝聚炸药起爆动力学 | 章冠人等编著 | 国防工业出版社 | 1991年11月 |
| 004 | 线性代数方程组的迭代解法 | 胡家赣编著 | 科学出版社 | 1991年12月 |
| 005 | 映象与混沌 | 陈式刚编著 | 国防工业出版社 | 1992年6月 |

目 录

第一章 混沌运动及其普遍性	1
1.1 什么是混沌	1
1.2 Lorenz模型	3
1.3 混沌的普遍性	5
1.4 说明混沌普遍性的一些实例	6
第二章 耗散系统中的混沌与奇怪吸引子	13
2.1 吸引子	13
2.2 分形	15
2.3 公理 A 系吸引子	16
2.4 混沌吸引子与奇怪吸引子	18
2.5 Ляпунов 指数与维数	19
2.6 Lorenz 吸引子	21
第三章 一维单峰映象的基本性质	24
3.1 一维映象对耗散系统混沌研究的重要性	24
3.2 单峰映象的周期轨道	25
3.3 单峰映象的混沌运动	31
3.4 混沌运动的随机性质	33
3.5 非线性电路中的分岔与混沌	35
第四章 普适周期轨道序列	36
4.1 符号动力学与 MSS 序列	36
4.2 MSS 定理的证明	39
4.3 周期轨道的数目	43
4.4 内部相似性	45
4.5 Sarkovskii 定理	48
第五章 稳定周期轨道的唯一性	50
第六章 通向混沌的倍周期分岔道路	56
6.1 Feigenbaum 重正化群方程	56

6.2	不动点的邻域性质	59
6.3	Feigenbaum方程的求解	61
6.4	功率谱的标度律	63
6.5	标度性的完全理论	67
6.6	Feigenbaum重正化群方程的推广	69
第七章 倍周期分岔—混沌转变临界点邻域的混沌和噪声影响		
7.1	临界点 邻域的混沌的性质	75
7.2	临界点 邻域的混沌运动的功率谱	76
7.3	临界点 邻域混沌带的Ляпунов指数	79
7.4	噪声的影响	81
第八章 阵发性——通向混沌的切分岔道路		
8.1	阵发混沌	86
8.2	层流区的长度	88
8.3	关联函数、功率谱与Ляпунов指数	90
8.4	噪声的影响	92
8.5	阵发混沌的重正化群方程描述	95
第九章 混沌运动		
9.1	遍历性与分布函数	101
9.2	拓扑熵、测度熵与Ляпунов指数	103
9.3	Ляпунов指数与维数的实验测量	106
9.4	单峰映象的混沌运动	109
9.5	Frobenius-Perron算符的性质与关联函数	112
9.6	混沌的统计描述	115
9.7	拓扑共轭变换与混沌	119
第十章 分岔图的骨架与混沌吸引子的突变		
10.1	分岔图的骨架	123
10.2	危机、混沌吸引子的突变与瞬变混沌	126
第十一章 不同类型的一维映象		
11.1	连分数序列的位移映象——Gauss映象	131
11.2	线段映象	133
11.3	反对称立方映象	134

VII

11.4	多临界点映象	137
11.5	圆映象	141
第十二章	圆映象的基本性质	144
12.1	弱耦合情况的若干数学定理	144
12.2	(ω, k) 平面上的相结构	147
12.3	周期轨道的符号表示	149
12.4	Farey序列的符号动力学	151
12.5	Farey序列与MSS序列的 $*$ 积及二元树	153
12.6	新生轨道与拓扑度定理	156
12.7	转数区间与拓扑混沌边界	159
第十三章	由准周期向混沌的过渡	162
13.1	标度行为的数值研究	162
13.2	重正化群分析	167
13.3	任意转数情况下的重正化	172
13.4	临界线及其邻域的度量性质	175
第十四章	分形的维数	180
14.1	分形的无穷多维数	180
14.2	分形的度量及奇异性	186
14.3	几个动力系统的例子	190
第十五章	高维映象	196
15.1	Hénon映象	196
15.2	二维映象中的倍周期分岔序列	201
15.3	环面映象	205
第十六章	Hamilton系统	211
16.1	Hamilton系统	211
16.2	近可积系统	218
16.3	二自由度系统的正则映象	221
第十七章	KAM定理	227
17.1	KAM定理	227
17.2	无理转数与Moser定理	230
第十八章	有理转数与非线性映象的完全描述	237
18.1	有理转数与非线性映象的完全描述	237

18.2	共振重叠判据	243
18.3	太阳系中的混沌运动	248
第十九章	到整体混沌的转变	251
19.1	贵重KAM曲线与临界点的确定	251
19.2	临界KAM曲线标度性的数值分析	254
19.3	临界KAM曲线的重正化群分析	258
19.4	Cantor环面及Hamilton系统中的输运	262
第二十章	保守系的倍周期分岔及向混沌的过渡	270
20.1	保面积映象中的倍周期分岔	270
20.2	倍周期分岔的重正化群分析	276
20.3	通向混沌的倍周期分岔道路	279
20.4	作用空间的扩散	281
第二十一章	高维正则映象	285
21.1	高维正则挠映象	285
21.2	四维保体积映象的倍周期分岔	293
21.3	Arnold扩散	299
第二十二章	量子混沌	305
22.1	能级分布与量子混沌	306
22.2	量子映象分析	315
22.3	微波场中氢原子的混沌运动	323
参考文献		333
后记		342

第一章 混沌运动及其普遍性

1.1 什么是混沌

经典力学中的运动，不论耗散系统或保守系统的运动，都可以用相空间中的轨道来表示。如果运动方程不含随机项，它描述一种确定性的运动。混沌运动是确定性系统中局限于有限相空间的高度不稳定的运动。所谓轨道高度不稳定，是指近邻的轨道随时间的发展会指数地分离。由于这种不稳定性，系统的长时间行为会显示出某种混乱性。对时间的或相空间的粗粒平均将呈现典型的随机行为。

为了说明上述有关混沌的基本概念，讨论一个最简单的例子：描述昆虫数目世代变化的 Logistic 方程^[1]

$$x_{n+1} = ax_n(b - x_n) \quad (1.1.1)$$

其中 x_n 为 n 代虫口数， b 为以单位虫口食量计算的食品总量。式 (1.1.1) 表示： $n+1$ 代的虫口数 x_{n+1} 正比于 n 代的虫口数 x_n 和供养 x_n 后剩余的食品量 $(b - x_n)$ 。式 (1.1.1) 是个二次映象，经适当的变换后，可以写成标准形式

$$x_{n+1} = f(x_n) \equiv 1 - ax_n^2 \quad (1.1.2)$$

式中 a 是与式 (1.1.1) 中不同的常数。当 $0 \leq a \leq 2$ 时， $f(x)$ 是 $(1, -1)$ 区间至其自身的映象。迭代式 (1.1.2) 有很丰富的现象，它是以后要详细研究的对象。这里只讨论 $a = 2$ 的情况

$$x_{n+1} = 1 - 2x_n^2 \quad (1.1.3)$$

它被称作 Ulam-von Neumann 映象，其所描述的混沌行为可以解析地求得。

引入变换

$$x = \cos t \quad (1.1.4)$$

它把迭代式 (1.1.3) 变为

$$\cos t_{n+1} = -\cos 2t_n \quad (1.1.5)$$

式 (1.1.5) 的解为

$$t_{n+1} = (2k + 1)\pi \pm 2t_n \quad (1.1.6)$$

式中 k 为任意整数, 最后结果与 k 取何值无关。据式 (1.1.6), t_n 可通过

$$t_n = (2k_n + 1)\pi \pm 2^n t_0 \quad (1.1.7)$$

表为 n 的函数, k_n 为与 n 有关的整数。由式 (1.1.4) 与式 (1.1.7) 求得

$$x_n = -\cos(2^n \arccos x_0) \quad (1.1.8)$$

可知, 如果 $\arccos x_0 / 2\pi$ 为无理数, 则

$$\theta_n \equiv 2^n \arccos x_0 \pmod{2\pi} \quad (1.1.9)$$

是一个典型的伪随机数。而对任意的 x_0 , $\frac{\arccos x_0}{2\pi}$ 为无理数的测度为 1。所以式 (1.1.8) 描述一种伪随机运动。虽然它是一种确定性的运动, 但其轨迹的分布呈现随机的性质。

迭代式 (1.1.9) 产生的点集分布应对变换 $\theta \rightarrow 2\theta \pmod{2\pi}$ 保持不变, 这样的概率分布是 $(0, 2\pi)$ 区间上的均匀分布

$$P(\theta) = 1/2\pi \quad (1.1.10)$$

x_n 的分布函数 $P(x)$ 可以根据

$$P(x)dx = P(\theta)d\theta \quad (1.1.11)$$

求得, 即

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{d\theta}{dx} = 1/\pi \sqrt{1-x^2} \quad (1.1.12)$$

式中因子 2 来自反函数 $\theta = \arccos(-x)$ 的双值性。式 (1.1.3) 多次迭代所得的序列 x_n 具有式 (1.1.12) 的分布。

通常采用 ЛЯПУНОВ 指数描述轨道稳定性, 对于一维映象, 它的定义是

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dx_n}{dx} \right| \quad (1.1.13)$$

如果 $\lambda < 0$ ，相邻轨道以正比于 $e^{\lambda n}$ 的方式指数地靠拢，所给定的轨道是稳定的。如果 $\lambda > 0$ ，相邻轨道指数地分离，所给定的轨道是不稳定的。将式 (1.1.8) 代入式 (1.1.13)，立即可以求得 Ulam-von Neumann 映象式 (1.1.3) 的 Ляпунов 指数

$$\lambda = \ln 2 \quad (1.1.14)$$

它说明 Ulam-von Neumann 映象的轨道是不稳定的，是一种混沌运动。

1.2 Lorenz模型

根据日常生活的经验，大气运动是极不稳定的运动。在历史上最早揭示混沌运动的模型，是在 1963 年由气象学家 Lorenz 提出的描述热对流不稳定性的模型，现在通称为 Lorenz 模型⁽²⁾。

考虑处于均匀重力场中并且底部温度高于顶部温度的流层中的对流问题。它由 Navier-Stokes 方程与热传导方程描述。采用流函数 ψ 及温度（对线性分布的）偏离 θ 为变量，无量纲形式的方程组为

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta + u \partial_x \zeta + u_y \partial_y \zeta &= \partial_x^2 \zeta + \partial_y^2 \zeta - \frac{Ra}{Pr} \partial_x \theta \\ \partial_x^2 \psi + \partial_y^2 \psi &= \zeta \\ u_x &= \partial_y \psi, \quad u_y = -\partial_x \psi \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\partial_t \theta + u_x \partial_x \theta + u_y \partial_y \theta = \frac{1}{Pr} (\partial_x^2 \theta + \partial_y^2 \theta)$$

式中 ζ 为涡度， u 为速度， Pr 为 Prandtl 数， Ra 为 Rayleigh 数。现寻求满足光滑边条件

$$\begin{aligned} \psi(x, y=0) &= \psi(x, y=1) = \theta(x, y=0) \\ &= \theta(x, y=1) = \zeta(x, y=0) = \zeta(x, y=1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

的解。把流函数 ψ 与温度偏离 θ 作 Fourier 展开，并只取如下三个模

$$\begin{aligned}\psi(x, y, t) &= \frac{k^2 + \pi^2}{\pi k Pr} X(t) \sin(kx) \sin(\pi y) \\ \theta(x, y, t) &= \frac{Ra_c}{\pi Ra} [\sqrt{2} Y(t) \cos(kx) \sin(\pi y) \\ &\quad - Z(t) \sin(2\pi y)]\end{aligned}\quad (1.2.3)$$

式中 k 为 x 方向的波矢, Ra_c 为临界 Rayleigh 数。把式 (1.2.3) 代入式 (1.2.1), 由 $\sin(kx)\sin(\pi y)$ 、 $\cos(kx)\sin(\pi y)$ 与 $\sin 2\pi y$ 的系数, 可得 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 与 $Z(t)$ 应满足的方程

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -PrX + PrY \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}\quad (1.2.4)$$

这就是著名的 Lorenz 方程。其中 $r = Ra/Ra_c$, X 称为速度模, Y 称为温度模, Z 称为温度梯度模。在单模激光的研究中, 得到了与式 (1.2.4) 完全相同的方程, 因此它被人们广泛地研究。在热对流问题中, 通常取 $b = 8/3$ 。

让 $\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0$, 可以求得式 (1.2.4) 的三个定态解 O 、 C 、 C' 。它们在相空间的位置分别为

$$\begin{aligned}O &(0, 0, 0) \\ C &(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ C' &(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)\end{aligned}\quad (1.2.5)$$

O 在 $r < 1$ 时是稳定的, C 与 C' 在 $1 < r < r_T \equiv Pr(Pr + b + 3)/(Pr - b - 1)$ 时是稳定的。在 $r > r_T$ 时式 (1.2.4) 无稳定的定态解, 这时会出现周期轨道或混沌轨道。

为了定性地考察 $r > r_T$ 时的运动情况, 作为一级近似, 忽略式 (1.2.4) 中的耗散项 $-PrX$ 、 $-Y$ 与 $-bZ$ 及源项 rX 。式 (1.2.4) 成为

$$\dot{X} = PrY, \quad \dot{Y} = -XZ, \quad \dot{Z} = XY \quad (1.2.6)$$

它是一个保守系统, 有两个守恒量^[8]

$$\begin{aligned}X^2/(2Pr) + Y^2/2 + (Z-1)^2/2 &= \text{常数} \\ Y^2/2 + Z^2/2 &= \text{常数}\end{aligned}\quad (1.2.7)$$

它们分别是相空间中的球面与柱面。视常数值的不同,球面与柱面可相交于一条闭曲线或两条闭曲线。这些闭曲线就是式(1.2.6)的轨道。考虑耗散项与源项将使球面与柱面发生呼吸运动,使其在某些时间内相交于两条闭曲线,而在另一些时间内相交于一条闭曲线。当球面与柱面相交于两条闭曲线时,系统在正 X 方向的轨道或负 X 方向的轨道上运动。当球面与柱面相交于一条闭曲线时,系统可由正 X 运动到负 X 方向或反之。因此当呼吸运动与轨道运动合拍时,呈现周期运动,当两者不合拍时,呈现混沌运动。

Lorenz 详细地研究了 $b = 8/3$ 、 $Pr = 10$ 、 $r = 28$ ($> r_T = 24.74$) 情况下的混沌图像,证实了上述分析。为了更简洁地描述混沌,他研究了第 $n+1$ 个 Z 的极大值 $(Z_{\max})_{n+1}$ 与第 n 个 Z 的极大值 $(Z_{\max})_n$ 之间的关系,得到了如图 1-1 所示的光滑的曲线。现在,把

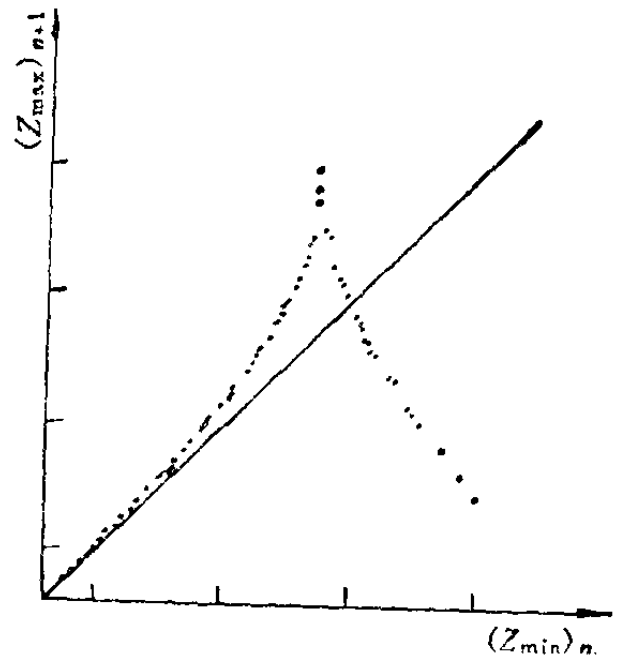


图1-1 Lorenz映象 (引自〔2〕)

图 1-1 所示的 $(Z_{\max})_n \rightarrow (Z_{\max})_{n+1}$ 映象称为 Lorenz 映象。利用这种办法,可以把高维的相空间中的运动约化为一维映象。由图 1-1 可见, Lorenz 映象的斜率处处大于 1, 因此据式(1.1.13)算得的 Ляпунов 指数必定大于零, 它所描述的运动必然是一种混沌运动。

1.3 混沌的普遍性

在自然界中,混沌现象是很普遍的。几乎可以说,自然界存在的绝大部分运动都是混沌运动,规则运动相对地只在局部的范围和较短的时间内存在^{〔4〕}。保守系统可以分为可积的与不可积的,不可积性意味着混沌运动。如果以方程的结构与参数为轴构

造一个空间，那么这个空间中绝大部分方程都是不可积的，都具有混沌运动。这从数学角度说明了混沌的普遍性。完全不可积系统的运动将遍历整个等能面，微观保守系统的不可积性导致了宏观系统的不可逆性。正是不可积的普遍性，使所有宏观现象都是不可逆的，所有宏观系统都属于耗散系统。

根据日常的观察与经验，我们周围的世界是不断发展变化的，具有各种各样的耗散结构。开放系统的最简单的耗散结构是由极限环描述的周期运动。两个或两个以上周期运动的耦合会产生混沌运动。因此，对于具有耗散结构的系统，当非线性进一步增强时，一般都会出现混沌运动。下面，将从不同领域中挑选一些实例，其中有属于耗散系统的与保守系统的，以说明混沌运动的普遍性，同时为以后的理论研究提供现实背景^[5]。

1.4 说明混沌普遍性的一些实例

1.4.1 小行星带与流星

太阳系的天文学中存在两个长期没有解决的难题，即小行星带的 Kirkwood 间隙与地球上流星的起源问题。小行星带位于火星与木星之间。观察发现，其周期与木星周期之比为简单有理数的小行星的数目很少，这就是 Kirkwood 间隙。通过对保守系统混沌的研究，现在已经明白，Kirkwood 间隙是与地球上流星起源联系在一起的^[6]。原来木星对与它有简单有理数周期比的小行星有强的扰动作用。长期的扰动使小行星作混沌运动，其轨道能与地球轨道相交。从而使 Kirkwood 间隙中丢失的小行星成为地球上的流星。有关太阳系中混沌现象的详细情况，将在 18.3 节讨论。

1.4.2 地磁场的反向运动

古地磁资料表明，地球的磁场不断地改换极性，而且每种极性维持的时间间隔是无规则的。这可能是由地球内部物质与电荷的经向与纬向的两种运动的耦合产生的。经向运动会产生纬向磁场，纬向运动会产生经向磁场。两个方向的运动及两个方向磁场

的相互作用会产生混沌运动。可用下面简单的方程组来模拟这种相互作用^[7]

$$I d\omega_i/dt = T - M i_i i_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.4.1)$$

$$L di_i/dt = -R i_i + M \omega_j i_j$$

式中 ω_i 为角速度, i 为电流, I 为转动惯量, L 为自感, M 为互感, T 为转矩。在同一式中, 下标 $i \neq j$ 。计算表明, 上式确实有混沌行为的解。

1.4.3 Josephson结中的噪声

在微波作用下的 Josephson 结中观察到了相当于温度为 5×10^4 K 的宽带噪声, 它不能用热噪声或相振荡的放大来解释^[8]。现在被普遍承认的解释是混沌说。设结的相位差为 φ , 则结上的电压 U 由下式给出

$$d\varphi/dt = 2eU/\hbar \quad (1.4.2)$$

结的电路方程为

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} + I_c \sin \varphi = I_{rf} \cos \omega t \quad (1.4.3)$$

式中 C 为结电容, R 为正常态电阻, I_c 为临界超流, I_{rf} 为射频频电流, ω 为射频频率。上式可化为 φ 的二阶微分方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \sin \varphi = \frac{2e}{\hbar C} I_{rf} \cos \omega t \quad (1.4.4)$$

式中 $\tau = RC$, $\omega_0 = (2eI_c/\hbar C)^{1/2}$ 。这个方程与强迫阻尼摆的方程完全相同、它具有宽带功率谱的混沌运动。

1.4.4 Белусов-Жаботинский反应中的混沌现象

Белусов-Жаботинский 反应是用四价—三价铈离子偶联催化的柠檬酸被溴酸钾氧化的反应^[9]。这是一个很复杂的反应。Field-Körös-Noyes 提出一个 20 个变量的模型, 其一种简化是九种中间样品的九步反应^[124]

