平面三角

〔法〕 C·布尔勒著

上海科学技术出版社

〔法〕G．达尔布主编

·初等数学教程·

平　面　三　角

〔法〕C．布尔勒　著

吴文潞　译

上海科学技术出版社

LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE
C. Bourlet
Librairie Armand Colin 1898
〔法〕G. 达尔布主编 初等数学教程
平 面 三 角
〔法〕C. 布尔勒 著
吴 文 潞 译
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 安徽新华印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 4.5 字数 223,000
1965 年 5 月第 1 版 1979 年 8 月第 3 次印刷
印数 16,800—109,800

书号: 13119·778 定价: 0.96 元

内 容 提 要

本书是法国数学家 G. Darboux 主编的初等数学教程之一的中译本。著者沿用三角线旧名，系统地阐述了平面三角各部分的内容，讲解深入浅出，颇具逻辑的严谨性。

本书可供师范院校师生、中学教师或高中学生参考。

中 译 本 序

第一次世界大战后，美国数学会曾派出一个以 M. Bocher 为首的考察团到法国，目的是了解为什么当时法国数学如此发达。该考察团在巴黎和法国外省都进行了详尽的调查，回国后在 Bulletin of American Mathematical Society 上发表了一个报告. 结论是：法国数学的发展，得力于它的中等数学教育.

诚然，法国中学教师一般都是高等师范学校 (Ecole Normale Supérieure) 毕业的. 该校历史悠久，入学考试很严格. 毕业后还需经过很严格的教师合格考试 (Agrégation) 才能成为合格教师 (Agrégé). 中学教师也同大学教师一样称教授 (Professeur).

中学教授讲课一般不用教科书，教了几年后，各教授都要写一套教科书，所以这类教科书很多，对中学生的自学提供了很大的方便. 数学在中学课程中占很大的份量. 特别数学班 (Classe de Mathématiques Spéciale) 则是中学最高的班次，也可以说是准备投考大学或高等学校的预备班. 教特别数学班的教师一般是最有经验的教师. 特别数学班教科书也最多. 其中 G. Darboux 院士主编的一套尤被推崇.

中学，特别是它的后期，是人们求知欲最强烈的时期，也是精力最充沛的时期. 在这个时期 (年龄大约在 17～20 岁左右)，使学生有大量吸收新知识和迅速扩大思维能力的机会，一旦到象高等师范学校这样一个处于当代自然科学最前线的地方，可濡目染，就能很容易地发现有价值的新课题和解决这种新课题应走的道路. 法国数学家一般在 22～23 岁时就能完成有开创性的博士论文. 这就说明了为什么法国数学的发展得力于中学数学教育.

1963年上海科学技术出版社为了发展祖国数学，为了提供中学教师和中学生以良好的数学参考读物，曾组译出版了 G. Darboux 院士主编的那套书的三部四本．问世以后，颇受读者欢迎，最近，中学教育受到了很大的重视，需要该套书的人很多，但书店早已脱销，读者每致向隅．上海科学技术出版社决定重印，因纸版已被毁，不得已决定重排．原套还有 J. Tannery 所著 "Leçons d'Arithmétique théorique et pratique"一书，丰富翔实，很多内容为同套其他各书所引用，此次也已请朱德祥同志译出，可望在稍后出版．

主编者 G. Darboux 院士晚年任法兰西学院终身书记，早年毕业于高等师范学校，是微分几何学家，在分析各方面也有很多重要贡献．J. Tannery 院士长期任高等师范学校校长，曾指导了许多年青数学家的开创性工作，例如 J. Hadamard, E. Borel 和 E. Cartan 三院士，都是在他指导下开始工作的．他撰写的这本算术书，事实上是数论初步．对数的概念从自然数到实数的拓广，特别是实数概念的建立和极限概念的引进，叙述明确，立论严谨，构成这套教科书其它各书的骨胳，也是现代分析的基础．德国曾有该书译本并稍加增补．

J. Hadamard 院士主要致力于把柯西在分析上的局部理论推论到全局．在复域里，体现在他的"戴劳级数所定义的函数的解析延拓"方面的成就，这个成就导致了解析数理的建立．在实域里，体现在常微分方程定性理论，线性偏微分方程定解问题理论，变分学和泛函分析等方面的成就．在这套教科书中，J. Hadamard 撰写了"几何"平面和空间各一册，Bourlet 教授写了"代数"和"平面三角"，Bourlet 曾在偏微分方程理论和泛函分析方面做出了重要贡献．

这套书的特点，推理严谨，观点清新．力求给人以"规矩"，而不过分追求技巧．若引进一新的概念，则其定义必求是最新的，这样就使中学生阅读之后便于将来接受大学中的新知识．若叙述一方法，则力求尽其用，力求用简明的方法，解决一系列问题．许多

附录都是必要的补充，目的还是使中学生便于将来顺利地接受大学教程．随着课文附加一些有意义的习题．这些习题的选择和部署是经过一番精心考虑的．特别是“几何”，俄译本曾将所有平面部分的习题全部给出解答，朱德祥同志又把这些解答全部译为中文．

这样一套教科书，既能为中学生提供学习大学数学课程的坚实基础，又能培养中学生的思考能力和计算能力．

鉴于现代数学在物理学、化学、地学和生物学等学科中已逐渐变为不可缺少的工具，中学数学教育的提高，将对我国整个自然科学的发展起着作用．

为了迅速提高中学数学教育水平，除在中学师资的培养上，采取一系列有力的措施外，也应在丰富和提高中学教材和参考读物上深下功夫．这套书中译本的出版，对提供中学参考教材方面是颇有意义的．

吴 新 谋

1979年3月于中国科学院数学研究所

目　录

第一编　基本公式

第二编　对数表，三角方程

第三编 三角形的解法

附 录

绪　论

有向线段　投影

1. 定义　所谓**矢量**或**有向线段**，指的是在它上面已定义一个方向的一段直线. 确定有向线段的方向，应当把限制它的两点作出区别. 这两点中的一点叫作**始点**，另一点叫作**终点**. 于是有向线段的**方向**，就是一个动点通过线段由始点到终点的移动方向.

读出一个矢量，应先读始点，再读终点；为了避免混淆，我们把表示矢量的两个字母写在括弧内. 例如矢量(AB)，就是指始点为A，终点为B的矢量.

由上面的定义，可以得到确定一个矢量的三个要素：

1° **作用线**，就是载它的那条无限长的直线；

2° **长度**，就是从始点到终点的(几何)距离；

3° **方向**，就是一个动点在它上面由始点移向终点的方向.

两个矢量叫作**等价**，如果它们的作用线平行或重合，长度相等，并且方向也相同.

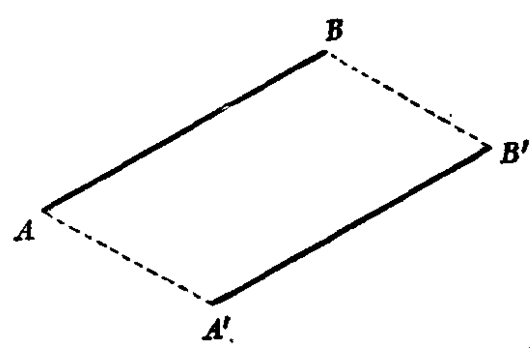

图 1

由此可见，如果作用线不同的两个矢量(AB)，$(A'B')$等价(图1)，那末，图形$ABB'A'$是一个平行四边形，因为它的对边分别平行并且相等.

写两个矢量等价时，习惯上用等号. 例如，等式

$$(AB)=(A'B'),$$

表示矢量(AB)等价于矢量$(A'B')$.

2. 合矢 设有矢量(AA'), (BB'), (CC'), (DD'). 所谓这些矢量的**合矢**或**几何和**，是用如下方式所作的有向线段. 取空间的任意一点O(图2)为始点，作矢量(Oa)等价于(AA'); 以a为新的始点，作矢量(ab)等价于(BB'). 同样，作矢量(bc)等价于(CC'); 最后作矢量(cd)等价于(DD'). 那末，始点是第一矢量的始点O, 终点是最后矢量的终点d的矢量(Od)(或等价于(Od)的任何矢量)，就是所设各矢量的合矢或几何和.

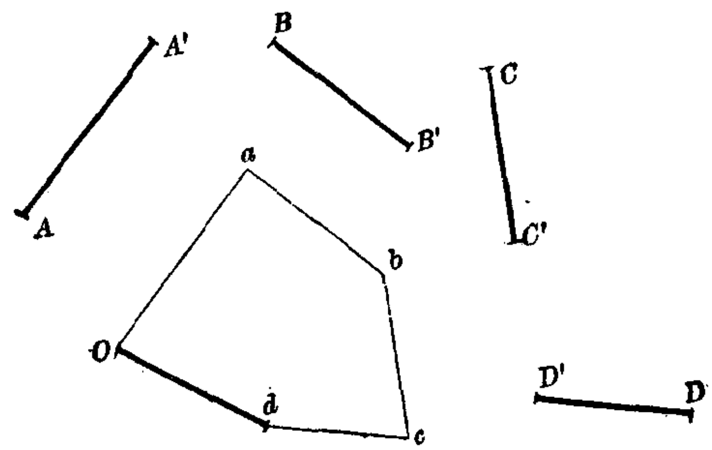

图 2

这里要注意，点O是任意的. 按照定义，合矢可以有任意的始点. 换句话说，有无穷多条彼此都是等价的有向线段可作为我们的合矢.

表示一个矢量是另外各个矢量的合矢，通常用加号. 例如写成

$$(Od)=(AA')+(BB')+(CC')+(DD').$$

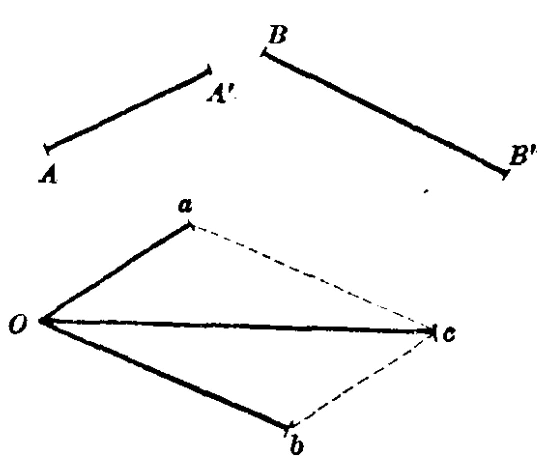

图 3

注意 在只有两个矢量的情况下，它们的合矢，还可以用下面的方法作出：设有两个矢量(AA'), (BB'); 取空间的一点O为始点(图3)，作两条有向线段

(Oa), (Ob)分别等价于所设的两个矢量. 那末, 在(Oa)与(Ob)上所作的平行四边形 $Oacb$ 的对角线(Oc), 就是所求的合矢. 事实上,

$$(ac)=(Ob)=(BB').$$

这就证明了(Oc)恰好是按照前面所说的作法, 接连作了有向线段(Oa)与(ac)分别等价于(AA')与(BB')以后所得出的有向线段.

我们还可以看到,两个矢量的合矢,与求和时所取这二矢量的次序无关. 因为在图 3 中根据定义,同时有

$$(Oc)=(Oa)+(ac)=(AA')+(BB')$$

与

$$(Oc)=(Ob)+(bc)=(BB')+(AA').$$

容易推知,对于任何几何和,可以变换各加项的次序而不影响其和. 为此,只要证明可以变换两个相邻项的次序就够了●.

我们在这里不再详细说明这一推广, 也不再讲到以后用不到的关于几何和的一些普通性质,这些性质是与代数和一致的.

3. 载在一条轴上的有向线段 定义 所谓轴是一条无限长的直线, 在它上面选定了一个方向, 叫作轴的**正方向**; 相反的方向就说是**负方向**.

在代数里已定义过载在一条轴上的一条有向线段的代数量, 我们在这里重新提一下这个定义和这种有向线段的基本性质●.

设已知载在一条轴上的有向线段,就是说,已知了以这轴为作用线的一条有向线段. 所谓这条有向线段的**代数量**, 指的是一个(代数的)数, 它以有向线段的长为绝对值, 并带有(+)号或(−)号; 这个符号取决于有向线段的方向是轴的正方向或负方向.

● 这个证明, 不适用于所要求和的两个矢量有互相平行的作用线; 这时四点 O, a, b, c 将在同一直线上. 这种特殊情况的讨论, 可参看《初等数学教程——代数》(C. 布尔勒著, 朱广才译, 上海科学技术出版社出版, 以下简称《代数》. ——译者注) 中绪论第 1~3 节.

● 第 3, 4, 5 节只是《代数》中第 7 节与第 23 节的重复叙述 (这里讲的"代数量", 就是《代数》中的"代数尺度". ——译者注).

为了表示一条有向线段的代数量，我们在表示这条有向线段的两个字母上面划一条横线．例如，$\overline{AB}$ 表示有向线段(AB)的代数量．

注意 由上面的定义可以推知，载在同轴上的两个长度相等而方向相反的有向线段，它们的量值是两个绝对值相等符号不同的(代数的)数．例如，$\overline{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 就是这样的两个数．因而有

$$\overline{AB}+\overline{BA}=0.$$

4．定理 载在同轴上各有向线段的合矢的代数量，等于这些有向线段的代数量的和．

在证明时，我们可以假定各有向线段的首尾相连，因为它们的合矢是需要这样来作出的．

1° 先考虑两条有向线段(AB)与(BC)的情况．它们的合矢是(AC)●．

如果两条有向线段的方向相同，那末它们的量值就同号．因而和 $\overline{AB}+\overline{BC}$ 的绝对值等于这二线段的绝对值的和；而这和的符号是两个加项的共同符号．另一方面，点 B 既在 A 与 C 之间，那末就有

$$AC=AB+BC.$$

这已说明了合矢(AC)的代数量的绝对值，等于和 $\overline{AB}+\overline{BC}$ 的绝对值，并且由于合矢与原来的两条同向线段的方向相同，因此它的量值 $\overline{AC}$ 与 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 的符号相同，即与 $\overline{AB}+\overline{BC}$ 的符号相同．因此有

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}.$$

这里，等式的两边有相同的绝对值与符号．

如果两条有向线段的方向相反，由于合矢并不因改变两条有向线段的次序而改变，以及两个数的和也与这两个数的次序无关，我们便总可以假定(AB)是两条有向线段中较长的一条．这两条有向线段的代数量不同号，而且因为 $AB>BC$，所以和 $\overline{AB}+\overline{BC}$

● 在这个证明里，有意不作图示，留待读者自己作出．

的绝对值便是 $AB-BC$，而符号与 $\overline{AB}$ 的符号相同．另一方面，点 C 落在 A，B 之间，故有

$$AC=AB-BC.$$

这就证明了 $\overline{AC}$ 的绝对值也等于 $AB-BC$．而且合矢 (AC) 既与 (AB) 同向，$\overline{AC}$ 也就与 $\overline{AB}$ 同号．因此仍有

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}.$$

在两条有向线段相等而方向相反的特殊情况，它们的合矢是零；而它们的代数量有相等的绝对值和相反的符号，因而和也是零．

2° 定理在两条有向线段的情况下的真实性，容易推广到若干条有向线段的情况．

设有四条有向线段 S_1，S_2，S_3，S_4，它们的代数量分别是 s_1，s_2，s_3，s_4．命 R_1 为 S_1 与 S_2 的合矢，r_1 为它的量值；R_2 为 R_1 与 S_3 的合矢，r_2 为它的量值；R 为 R_2 与 S_4 的合矢，r 为它的量值．那末，R 是所设四条有向线段的合矢．按照上面 1° 的证明，我们有以下各个等式：

$$r_1=s_1+s_2,\quad r_2=r_1+s_3,\quad r=r_2+s_4.$$

这里 r 的求得是先作 s_1 与 s_2 的和，在它的结果 r_1 上加上 s_3；再在所得的结果 r_2 上加上 s_4．因之，根据和的定义有

$$r=s_1+s_2+s_3+s_4.$$

这就证明了本节的定理．

5．定理(夏耳，Chasles) 设 A，B，C，D，E 是位于一轴上的多个点，那末，这些点所确定的各有向线段的代数量之间有关系式

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA}=0. \qquad (1)$$

这个定理是上节定理的一个直接结果；因为有向线段 (AE) 是各有向线段 (AB)，(BC)，(CD)，(DE) 的合矢，所以有

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}.$$

在这个等式的两边都加上 $\overline{EA}$，并注意到 $\overline{AE}+\overline{EA}=0$，即得

出等式(1).

注意 这个极为重要的定理,经常应用在三点的情况. 设 O, A, B 是位于一轴上的三点,那末有

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BO}=0,$$

由此得出

$$\overline{AB}=-\overline{BO}-\overline{OA}.$$

注意到 $-\overline{BO}=\overline{OB}$, 即得

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}. \tag{2}$$

这是夏耳关系式常用的形式.

6. 投影 **定义** 已知一条轴 $x'x$ 与不平行于这轴的一个平面 P,所谓空间一点 A 在轴 $x'x$ 上平行于平面 P 的投影, 指的是通过 A 而平行于 P 的平面与轴的交点 a(图 4). 平面 P 叫作投影上的准平面.

直线 Aa 叫作点 A 的投射线.

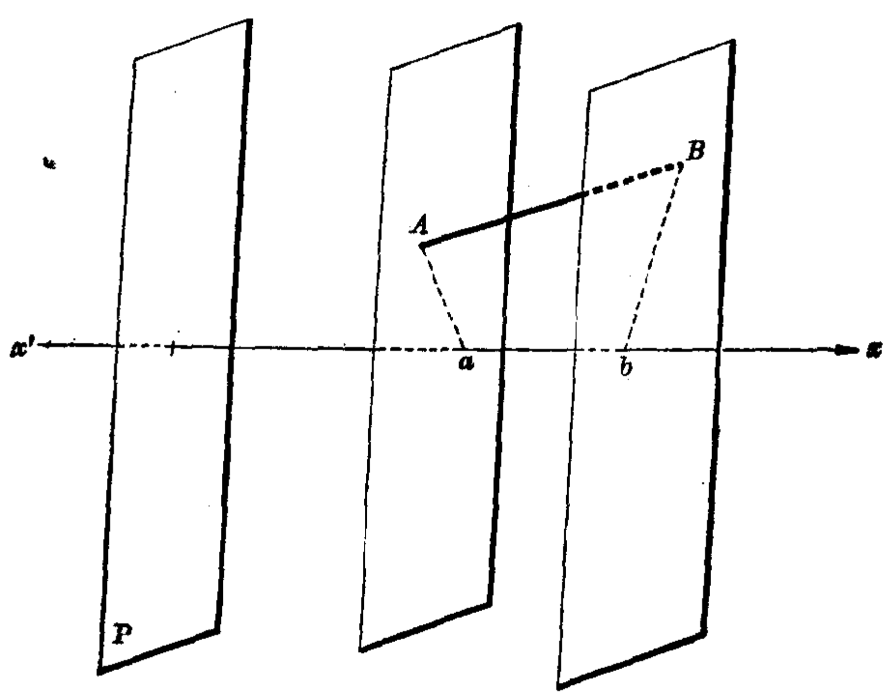

图 4

当准平面 P 垂直于投影轴 $x'x$ 的特殊情况时, 我们说投影是直角的. 这时一切投射线都垂直于轴, 因为它们都位于垂直于这

轴的平面内．于是可以说，一点在一条轴上的直角投影，是由这点向轴所作的垂线的垂足．

所谓**一个矢量在一条轴上的投影**，指的是载在轴上的一条有向线段，它的始点与终点分别是原矢量的始点与终点的投影．

例如，设有矢量(AB)，A与B在$x'x$轴上的投影分别是a与b(图4)．那末，有向线段(ab)就是有向线段(AB)的投影．我们写成

$$(ab)=\text{proj}(AB).$$

注意 如果所要投影的所有点都与投影轴在同一平面内，那末上面的定义可演变为另一形式．这时各点A, B, C, …的投射线(图5)Aa, Bb, Cc, …都只是各投射面与图面的交线．这些交线都将彼此平行，因为它们可以看作是各平行平面交同一平面的交线．于是在这种情况，我们可以说：一点A的投影a，是自A按照某一固定方向所作的平行线与轴$x'x$的交点．在直角投影的情况下，这个固定方向是轴的垂直方向．

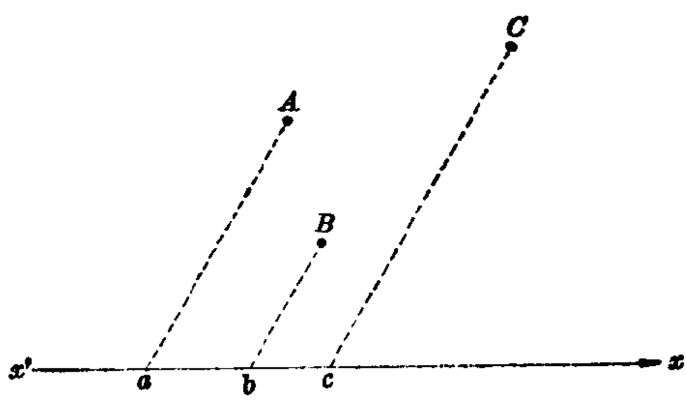

图 5

7．定理 二等价矢量在同轴上的投影也是等价的．

设有两个等价矢量(AB)，$(A'B')$，以及它们在轴$x'x$上的投影(ab)，$(a'b')$(图6)．我们自A引$x'x$的平行线交投影面B于β；同样，自A'引$x'x$的平行线交投影面B'于β'．那末，图形$A\beta ba$与$A'\beta'b'a'$显然都是平行四边形．有向线段$(A\beta)$与$(A'\beta')$就分别等价于(ab)与$(a'b')$．因此为了证明这个定理，只要证明

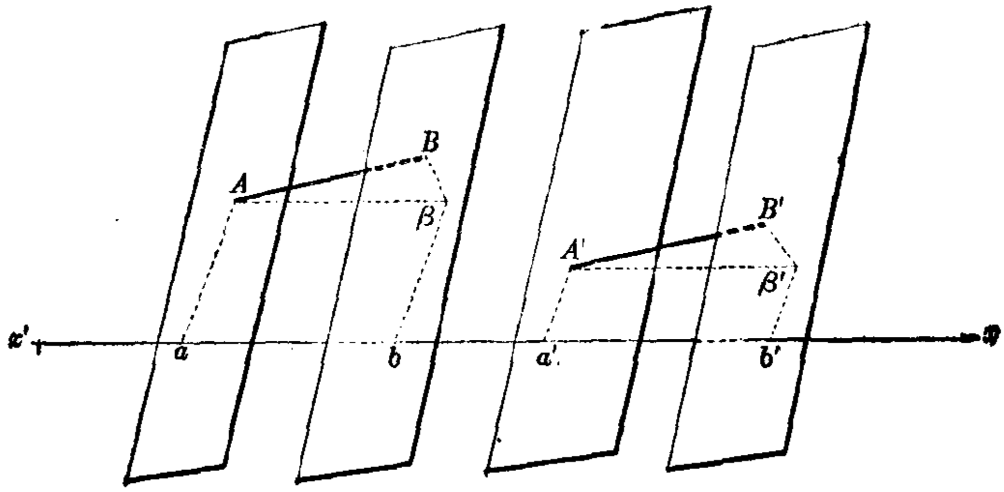

图 6

$$(A\beta)=(A'\beta').$$

1° 这两条平行的有向线段长度相同. 事实上，两个三角形 $AB\beta$, $A'B'\beta'$ 的对应边分别平行，因而是相似的. 又因为 $AB=A'B'$,所以它们全等. 因此

$$A\beta=A'\beta'.$$

2° 这两条线段的方向相同. 事实上,两个全等三角形的对应角 $BA\beta$ 与 $B'A'\beta'$ 相等，并且夹这两个角的边分别平行. 但根据假定，(AB)与$(A'B')$同方向，因此$(A\beta)$与$(A'\beta')$的方向也应相同,否则两个角将不是相等而是相补.

8. 定理 多条有向线段的合矢在一条轴上的投影的代数量,等于这些有向线段在这轴上投影的代数量的代数和.

为了证明这个定理，我们总可以假定原来的各条有向线段都是首尾相连的;这是根据上节定理“等价矢量在同轴上的投影也等价”. 这样就便于作出合矢.

设已知矢量(AB), (BC), (CD), (DE), 它们的合矢是 AE (图 7)，各点 A, B, C, D, E 在轴 $x'x$ 上的投影是 a, b, c, d, e. 根据定义有

$$(ab)=\mathrm{proj}(AB),\ (bc)=\mathrm{proj}(BC),$$
$$(cd)=\mathrm{proj}(CD),\ (de)=\mathrm{proj}(DE),$$
$$(ae)=\mathrm{proj}(AE).$$