

数学思维教育学

张乃达编著

出版社

数学思维教育学

王明君 著



数学思维教育学

张乃达 / 著

江苏教育出版社

数学思维教育学

张乃达 著

责任编辑 王建军

出版发行：江苏教育出版社
(南京中央路165号，邮政编码：210009)

经 销：江苏省新华书店

印 刷：镇江前进印刷厂

开本850×1168毫米 1/32 印张10.25字数247,000

1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷

印数1——3,610册

ISBN 7—5343—1032—6

G·907

定价：3.90元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

绪 论

数学思维教育学的研究对象和方法

数学思维教育学的研究对象

数学思维教育学是一门新的学科。它把数学教学条件下的思维活动当作自己的研究对象。数学思维教育学，希望通过对数学教学条件下思维活动的特点、过程、规律的研究，为正确确定数学教学的目的、内容、原则、方法，组织数学教学活动提供理论基础和根据。对数学思维教育学可以有两种理解：即把它看成是从思维的角度展开的数学教育学，也可以把它看成数学思维的教育学。由于数学不仅是指数学知识，而且是指数学的（思维）活动，数学教学就是指数学思维活动的教学。因此，这两种理解实质上是一致的。

思维活动的研究，是教学研究的基础。钱学森教授指出：“教育工作的最终机理在于人脑的思维过程”、“教育科学中最难的问题，也是最核心的问题是教育科学的基础理论，即人的知识和应用知识的智力是怎样获得的，有什么规律。解决了这个核心问题，教育科学的其他学问和教育工作的其他部门都有了基础，有了依据。没有这个基础理论，其他也都难说准。”（〔35〕，448页）

数学教学与思维的关系就更为密切了。

现代认知学派的创始人皮亚杰及其支持者的研究发现，数学思维结构与数学科学的结构十分相似。实验研究表明，儿童学习数学的过程，就是从一种思维结构过渡到另一种思维结构的过程。于

是,寻找数学结构和思维结构的相似点,就成了国外数学教育家特别是法国数学教学改革运动中持激进态度一派的工作的奠基石。

近年来,数学教育界对数学教育的实质的认识也有了发展.苏联数学教育家A.A.斯托利亚尔认为:数学这个术语本身,就表示一种思维活动(数学活动),而数学教学从根本上来说,就是数学活动(即数学思维活动)的教学。“在教学的每一步,不估计学生思维活动的水平,思维的发展、概念的形成和掌握教材的质量,就不可能进行有效的教学。”(〔59〕,9页)在本书中,我们将进一步论述:所谓数学教学,实质上就是学生在教师指导下,通过数学思维活动,学习数学家思维活动的成果,并发展数学思维,使学生的数学思维结构向数学家的思维结构转化的过程。这一切都说明,对数学思维的研究,是数学教学研究的核心;数学思维的发展规律,对数学教学的实践活动具有根本性的指导意义。

因此,可以认为,数学思维教育学是数学教育学的基础和核心,是数学教育学的基础理论;数学教学论、数学学习论、数学课程论等则是数学教育学的应用科学,是建立在数学思维教育学的基础之上的。

数学思维教育学是综合性的学科。哲学、心理学、逻辑学、思维科学、教育学和数学为它提供了基础。

由于数学教学中的思维活动是一种特定条件下的思维活动,它当然要受到一般思维活动规律的制约。因此,数学思维教育学要从哲学、心理学、逻辑学及思维科学等将思维当作研究对象的学科寻找支撑点。

众所周知,哲学是从思维主体和客体两者之间的关系,即存在与意识的关系来研究思维的;逻辑学主要讨论思维的正确构造的规律和思维形式,而不涉及客体的内容;心理学主要研究人的思维正常发生和发展的条件和原因,以及各种心理现象对思维的影响;思维科学研究思维的规律和方法,而不考虑思维的主体与内容。

以上这些学科的研究成果对于数学思维教育学的研究都具有指导意义。但显然的是，以上任何一门学科都不能取代数学思维教育学的研究。数学思维教育学还具有它的特点和独特的内容。

因为数学思维教育学研究的是数学教学中的思维活动，因此，它必须考虑到思维内容和对象的数学特征，考虑到数学学科的特点。由于数学思维是以数学知识为客体的思维活动，因此，数学思维将表现出数学学科的特点，这样，数学科学、数学史、数学方法论等又为数学思维教育学提供了大量的素材。

其次，数学教学条件下的思维活动并不等同于一般的数学思维活动。它不仅要研究成熟的数学思维过程（即数学家的思维过程），还要研究学生在各个发展阶段的数学思维的特点和发展规律，研究数学家、数学教师和学生思维活动的相互影响，因此，数学思维教育学必须吸取教育学和心理学的研究成果。

作为一种教学活动，数学教学还必须接受教育学特别是教学论的指导，并用自己的研究成果对这些理论作出检验，为发展、丰富教学理论作出贡献。

数学思维教育学的研究方法

到目前为止，数学思维教育学仍然是一门经验的科学。

由于脑科学和思维科学本身仍然处于草创阶段，因此，以它们为基础来建立数学思维教育学的想法是不现实的。

另外，尽管心理学对思维过程展开了研究，但是，心理学对思维的论述，以及对支配思维的“机制”的解释方面，还无统一的认识。在教育心理学中还缺少公认的概念作为指导把中学的数学教学与发展学生思维（尤其是数学教学与发展学生的数学思维）的任务组织和进行得十分有效的基础。对数学思维的微观研究还会遇到很多困难。

钱学森教授认为：目前对思维及教育的研究，要走宏观化的道路。“如同化学家远在原子物理、基本粒子物理微观地搞清原子

和原子核结构以前，就宏观地研究分子结构及其性质那样”，教育科学，“应该从古中外教育经验中总结出教育科学的基础理论——教育过程的客观基本规律。”〔73〕

同样地，数学思维教育学也将从宏观上着手开展自己的研究。具体地说，数学思维教育学将采用下面几种研究方法：

（1）历史的方法。数学思维教育学将重视从数学史、从数学家的发现道路中吸取材料，展开研究；

（2）实践的方法。把数学思维教育学建立在数学教学实践的基础上，从数学教学的实践中挖掘研究课题，从优秀教师的教学经验中总结出一般的理论和方法；

（3）理论的方法。从哲学、心理学、思维科学、教育学等学科中吸取有用的理论观点，来分析数学教学中的问题，引申出一般的结论；

（4）实验的方法。数学思维教育学将通过教学实验、个案分析、跟踪调查等方法，来检验并发展已有的研究成果。

目 录

绪 论

数学思维教育学的研究对象和方法	1
上 编 数学思维结构论	1
第一章 引 论	1
1.1 思维与数学思维	1
1.1.1 思维概述	1
1.1.2 数学思维	4
1.2 数学思维结构	7
第二章 数学思维方法	12
2.1 数学思维的基本方法	12
— 2.1.1 分析与综合	12
— 2.1.2 抽象、概括与具体化	19
2.2 作为理论科学的数学思维方法	29
2.2.1 演绎证明	29
2.2.2 系统化	32
2.3 作为经验科学的数学思维方法	33
2.3.1 观察与实验	33
2.3.2 归 纳	39
2.3.3 类 比	42
2.3.4 联想与猜想	47
2.3.5 一般化和特殊化	51
2.4 数学思维中的探索方法	55
2.4.1 综合法与分析法	55
2.4.2 探索性演绎法	62
第三章 数学思维形式	66
3.1 逻辑思维与直觉思维	66

3.1.1	逻辑思维	66
3.1.2	直觉思维	71
3.1.3	数学思维中的逻辑与直觉	86
3.2	聚合式思维与发散式思维	102
3.2.1	聚合式思维	103
3.2.2	发散式思维	106
3.2.3	数学思维中的聚合与发散	110
3.3	再生性思维与创造性思维	114
3.3.1	再生性思维	114
3.3.2	创造性思维	115
3.3.3	数学思维中的创造与再生	122
第四章	数学思维过程	128
4.1	思维过程的一般分析	128
4.1.1	理性认识过程的分析	128
4.1.2	数学思维过程的分析	129
4.2	数学思维的微观过程	132
4.2.1	微观过程分析	132
4.2.2	提出问题的思维环节	138
4.2.3	解决问题的思维环节	142
4.2.4	思维过程的监控	148
第五章	数学思维的材料和结果	154
5.1	数学思维的材料	154
5.2	数学知识系统	158
5.2.1	相对封闭的知识系统	158
5.2.2	数学语言	160
5.3	数学思维能力	167
5.3.1	数学思维能力的构成要素	167
5.3.2	数学思维能力结构	181
5.3.3	数学思维的外部条件系统	191

5.4 数学观念系统·····	195
5.4.1 概 述·····	195
5.4.2 数学观念与数学思维活动·····	197
5.4.3 数学观念的形成与发展·····	200
下 编 数学思维教学论·····	203
第六章 数学思维与数学教学·····	203
6.1 数学思维的发展·····	203
6.1.1 数学思维发展的动力·····	203
6.1.2 中学生数学思维的发展·····	206
6.2 数学教学过程·····	218
6.2.1 数学教学过程·····	218
6.2.2 数学教学能力·····	223
6.2.3 数学学习机制·····	226
第七章 数学教学原则和教学方法·····	234
7.1 数学教学原则·····	234
7.1.1 结构性原则·····	234
7.1.2 过程性原则·····	238
7.1.3 适应性原则·····	244
7.1.4 实践性原则·····	246
7.2 数学教学方法·····	250
7.2.1 数学教学方式·····	250
7.2.2 教学原则与教学方法的改革·····	255
第八章 数学教学宏观过程的组织与分析·····	261
8.1 教学科目与思维训练·····	261
8.1.1 教学科目的基本结构·····	261
8.1.2 突出学科的基本结构·····	265
8.2 教学阶段与思维发展·····	271
8.2.1 入门教学阶段的思维训练·····	272
8.2.2 后继教学阶段的思维训练·····	275

8.2.3 复习教学阶段的思维训练·····	276
第九章 数学教学过程的微观分析与组织·····	279
9.1 数学教学应该以解题为中心·····	279
9.1.1 对解题教学的认识·····	279
9.1.2 微观教学过程的组织与分析·····	282
9.2 微观教学过程·····	290
9.2.1 数学基本理论的教学·····	290
9.2.2 数学概念的教学·····	296
9.2.3 习题教学·····	301
参考文献·····	310
后 记 ·····	315

上编 数学思维结构论

第一章 引 论

1.1 思维与数学思维

1.1.1 思维概述

1. 思维

思维是大脑对客观事物间接的、概括的反映。

思维既是认识活动,又是认识结果。

从动态上看,思维是在主体和客体的相互作用中,在人脑中所进行的高级精神活动,是“社会约定的,与语言紧密关连而不可割裂的寻找和发现从本质上说属于新东西的过程。”(转引自〔58〕)

从静态上看,思维又是主体在反映客体的过程中精神运动的产物,是在人脑中进行的高级认识活动的结果——精神产品。这些产品包括概念或思想的形成,以及由概念所构成的科学知识。

所以,思维的本质是在人脑中进行的高级精神活动,是人这一主体对客观现实(客体),以及对主体自身活动的能动反映或理性认识。它成为人们认识事物的本质,事物间相互联系及其规律的必备手段。

2. 思维的性质

思维具有问题性、间接性、概括性和语言性等特性。

(1) 思维的问题性

思维的问题性又被称为目的性或探究性。我们认为这是思维

第一位的特性。

由于思维是寻找和发现从本质上说属于新东西的过程，因此思维总是由问题引起的。例如，这些问题可以是为了要认识某个新事物，或者是要了解某些事物之间的联系，或者是要完成某件还没有把握的任务。总之，思维是围绕着某个新问题展开的。没有问题，就没有思维，至少没有积极的专注的思维。

问题在思维中起着如下的作用：

第一，问题对思维具有激励作用，因此问题是探索活动的动力；

第二，问题对思维具有定向作用，因此问题是探索活动中的路标和灯塔。

正由于问题性是思维的本质的属性，因此，思维的过程就表现为解决问题的过程。思维活动也就成为一种积极的探索性的理性认识活动。

（2）思维的间接性

思维是对客观事物间接的认识。这就说明了思维与感觉、知觉不同，它是通过其他中间事物为媒介及事物间的彼此联系去反映客观事物的。思维的这种认识功能无限地增强了人的感觉器官认识世界的功能。列宁在谈到这方面的关系时指出：“表象不能把握整个运动，例如它不能把握每秒钟 30 万千米的运动，而思维则能够把握而且应当把握。”〔2〕，246 页）。例如，小学生可以通过思维（比较）了解到光在一秒钟内走过的路程相当于全速奔驰的小汽车（100 千米/小时）毫不停息地奔驰 125 个日日夜夜的路程，从而把握光速之快。

思维之所以有间接性，关键在于知识与经验的作用。思维的间接性是随着主体知识经验的丰富而发展起来的。因此，知识和经验对思维能力具有重要的影响。

（3）思维的概括性

思维是对客观事物的概括的认识，这说明思维与反映个别事物的个别属性的感觉不同，是把反映一类事物的本质和事物之间的规律性联系作为自己的任务的。

思维的概括性，表现为人脑对客观事物的概括认识过程，这是建立在抽象的基础上的。概括的认识是以大量已知事实为依据，在已有的知识和经验的基础上，舍去某类事物的个别特点，抽出其共性的东西而形成的。没有抽象-概括的活动，也就不可能产生概括性的认识，也就没有思维。因此，抽象-概括是一种基本的思维方法。

由于概括性在思维过程中的重要地位以及抽象概括能力在现实中的作用和重要性，概括性就成为思维研究的一个重要方面，概括水平也成为衡量思维水平的重要标志。

(4) 思维的语言性

思维与语言具有密切的关系。首先，一方面，语言离不开思维。任何语言都是由词汇和语法规则构成的符号系统，而词汇和语法规则是思维的成果，因为词的意义不是别的，正是概括的思维式概念。而语言中的语言结构则是人们思维逻辑的表现；另一方面，思维的进行往往也离不开语言。这是因为，大脑中的第二信号系统的活动，是思维活动的物质基础。而第二信号系统的出现，与语言的使用有着密切的关系。

其次，思维活动总是借助于符号而实现的，正是符号的概括性，使思维能够对现实进行间接的概括的反映。

第三，语言是思维的“物质外壳”，思维的内容是观念的东西，它必须借助于可感知的物质形态才能表达出来。虽然人们也可以用其他的方法，如手势、面部表情等等来表达自己的思想，但最方便、最完善的表达内心世界的物质形态还是语言。正是由于语言与思维具有上述密切的关系，因此正确地使用、选择、创造与思维活动相适应的语言-符号系统，对提高思维的效率和发展思维水平都具有极其重大的意义。

1.1.2 数学思维

1. 数学思维

一般认为,数学思维就是数学活动中的思维。苏联数学教育学家奥加涅相对数学思维作了较为详细的阐述,他说:

所谓“数学思维”,应该这样理解:其一,是指一种形式,这种形式表现为人们认识具体的数学科学,或是应用数学于其他科学、技术和国民经济等的过程中的辩证思维;其二,应认识到它的一种特性,这种特性是由数学学科本身的特点,及数学用以认识现实世界现象的方法所决定的。同样,也受到所采用的一般思维方式的制约。(〔58〕,144页)

我们认为,在数学思维的定义中,应该注意如下几点:

- 1° 体现数学思维的特点;
- 2° 说明数学思维的本质;
- 3° 点明数学思维的目的。

据此,我们给出数学思维的定义:

所谓数学思维,就是以数学问题为载体,通过发现问题、解决问题的形式,达到对现实世界的空间形式和数量关系的本质的一般性的认识的思维过程。

下面我们将对这个定义作进一步的阐述。

2. 数学问题(I)

数学问题是数学思维教育学中最重要也是最基本的概念。

数学问题是由解题主体与数学题系统组成的集合。它反映了解题者的现有心理水平与客观需要的矛盾。因而,数学问题是推动数学思维发展的动力。

这一结论在宏观上表现为:数学问题是数学科学发展的动力。正如希尔伯特在其《数学问题》的讲演中指出的:“只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力。而问题缺乏则预示

着独立发展的衰亡或终止。”〔67〕数学史证明,问题对数学科学的发展方向、数学观点、方法、思想的形式都具有决定性的影响。离开了问题,数学就不能发展,就会丧失生机而成为僵死的教条。事实上,数学科学正是从现实世界(包括从现有的数学理论体系本身)提出的无数问题中获取力量,得以前进的。新的数学思想、方法、技巧正是在解决问题的过程中发生、成长、发展并得到验证的。由于典型的数学问题的推动,导致新的数学学科、理论、方法产生的例证,在数学史中俯拾皆是。众所周知的事实是,希尔伯特的23个问题,对本世纪的数学发展起过并仍然起着极其重要的影响。并指示着现代数学发展的方向。

数学问题对数学思维活动的决定性影响,在微观上表现得更为突出。

首先,问题是思维的动力,并为思维指出了方向。解决问题则成为思维的目的。其次,数学思维的过程就是不断地提出问题,解决问题的过程。由于解决问题的过程最后总可以归结为提出问题的过程。因此,可以认为,数学思维过程就是提出问题的过程。从本质上来说,数学思维能力就是提出数学问题的能力。提出问题(猜想)是探索活动中的关键环节,新的数学问题(猜想)的出现,既表现于数学思维的进展,同时又为更深入的数学思维活动提供了动力和规划了方向。

因此,可以说,“问题是数学的心脏”。

数学知识是数学问题的结果,数学知识体系则是数学问题的体系。

数学方法、观点、思想是在解决数学问题中形成的具有一般性的观念系统。数学能力,则是在数学思维过程中,在观念系统建构的过程中形成的心理特征。

数学知识和数学能力(其核心部分是数学思维能力)都是数学思维活动即提出数学问题和解决数学问题活动的产物,数学知识