线性规划
与商业企业管理

线性规划与商业企业管理

杨 源 厚 编

中国财政经济出版社

线性规划与商业企业管理

杨源厚　编

*

中国财政经济出版社 出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

四川省金堂新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　12.5印张　257,000字

1987年4月第1版　1987年4月成都第1次印刷

印数：1—4,500

统一书号：4166·666　定价：1.80元

编写说明

社会主义商业处于社会再生产的中介地位，是工业同农业、生产同消费、城市同农村进行经济联系的桥梁和纽带。要实现我国的工业、农业、国防和科学技术现代化，必须实现商业现代化。实现商业现代化（包括技术设备现代化和管理科学化等）又需要借助现代技术手段（如电子计算机），运用数学方法，进行数据的处理和模拟，从而推动管理现代化。因此，学习和运用现代数学成就，已成为我们商业工作者的一项迫切任务。

线性规划是运筹学的一个重要分支。它运用数学方法，研究如何合理安排人力、物力和财力，以取得最大的经济效益。线性规划研究的内容归纳起来，主要是两类问题：一是求最小值的问题。如十个县共有三亿斤粮食，需要调运二十个城镇，怎样调拨才能使总运费最省？二是求最大值的问题。如某大型服装店（前店后厂）有布匹600种，可加工800种不同款式的服装，如何安排加工才能使总产值最大？这里存在不同的调拨数量、加工数量、产值、运价等大量的组合问题。这些问题仅凭经验和一般算法找出其中最好的组合来，是十分困难的，有时几乎是不可能的。然而，线性规划却能够帮助我们从这些复杂的数量关系中，把其中的最优方

案求出来。我们商业工作者在四化建设中，应当学会和掌握这种科学方法，应用它去从事经营、从事管理，以取得更大的经济效益。

线性规划的理论证明涉及较深的数学基础，为了普及与推广经济数学知识，这本书侧重从分析具体事例入手，力求将基本计算方法和步骤介绍清楚，做到通俗易懂，便于自学。对于数学理论的阐述和证明，则基本上没有涉及。这样做，并不影响我们掌握和应用这门学科。正如我们不懂得电子计算器的制造原理、但并不影响我们使用一样。

本书的编写，得到了湖南省人民政府原财贸办公室党组织的关怀和支持；在编写过程中，学习和参考了中国科学院数学研究所运筹学研究室、清华大学、湖南师范学院数学系编写的有关《运筹学》、《线性规划》等专著，并引用了其中的一些研究成果；还得到了李致中、王毓基和胡富昌同志的帮助。在这里，一并表示感谢。

由于编者的水平有限，书中的疏漏、不妥之处一定不少，诚恳希望商业部门的同志和广大读者批评指正。

编　者

一九八五年五月于长沙

目　录

第一章　概　述

第一节　运筹学的研究对象和发展概况

线性规划是运筹学的一个分支。要掌握线性规划，首先必须对运筹学有所了解。

运筹学是近四十年来发展起来的一门新兴学科。它应用现代数学的成就，特别是应用概率论、数理统计和计算数学方面的成就，研究如何最合理地安排人力、物力和财力，把规划、计划和各项实施建立在科学的基础上，从而能在生产管理、工程技术、军事作战、科学实验、经济分析以及社会科学中得到广泛的应用。

毛泽东同志说过："科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。"①那么，运筹学研究的特殊矛盾是什么呢？我们知道，人类从事生产斗争和科学实验，有两方面的内容：一方面，如何发现和创造更多的物质财富，寻找更好的利用方式。例如，研究和发现新的能源，勘探新的矿床，改进生产工具和工艺流程等等，以促进社会生产力的发展。另一方面，如何使已经生

① 《矛盾论》，见《毛泽东选集》（一卷本）第297页，人民出版社1966年3月第一版。

产出来的设备和物质资源得到最充分的利用，也是不可忽视的问题。例如，目前，商业企业的粮库、油库和商品仓库，随着工农业生产的发展，商品流通的扩大，显得十分不足。解决的办法，除了根据国家计划，分期分批地予以新建和扩建外，主要应该研究如何最经济、最合理地利用现有的“三库”，发挥更大的效用。运筹学的研究对象是后者而不是前者。用一句通俗的话说，它是在“运用”和“筹划”方面下功夫，研究如何精打细算、巧安排，最充分地利用人力、物力和财力，最圆满地完成任务，以取得最大的经济效益。

运筹学和其他科学一样，是随着生产的发展而逐步发展起来的。很早以前，人们就在应用“运算”和“筹划”的方法。我国古代有“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”的说法，并有很多有趣的故事。相传战国时期，齐国的国王有一次提出要同他的臣子田忌赛马。田忌答应以后，双方约定：①各自出三匹马；②从上、中、下三个等级各出一匹；③每匹马都得参加比赛，但只能参加一次；④每次比赛各出一匹马，一共比三次；⑤每次比赛后负者要付给胜者千金。当时的情况是：就三种相同等级的马来说，齐王的马都比田忌的好，看来田忌要输掉三千金了。然而，田忌的谋士孙膑给田忌出了个主意：①每次比赛先让齐王说出他要出哪一匹马；②以自己的下马对齐王的上马（负）；③以自己的中马对齐王的下马（胜）；④以自己的上马对齐王的中马（胜）。比赛结果，田忌反以“二胜一负”取得了胜利，赢得了千金。田忌为什么能取得胜利呢？可以说，是应用了最简单的运筹学的思想。

到了19世纪80年代，为了选择适用的工具，有人曾用统计的方法，调查研究了工人用的铁锹究竟以多大为好。很显然，如果铁锹太小，工效必然不高；但铁锹太大，每一锹铲的东西虽然很多，但工人容易疲劳，效果也不好。同时，用同一规格的铁锹干不同的活也不合理：铲重物（如矿石）时劳动过于繁重，铲轻物（如煤粉）时又过于轻松，都不能使工人的劳动能力充分发挥出来。当时提出的问题是：铁锹应该多大？根据不同的劳动对象，应该制造几种大小不同规格的铁锹，才能使工人的劳动效率最高？这时，应该说运筹学的思想已开始生根了。

后来，随着生产的迅速发展，生产规模越来越大，各部门之间的联系越来越紧密，因此，在生产、流通的组织和计划方面，如果仍然凭借一些朴素的想法，简单的技巧，经验的估算，就再不能解决问题了，而必须有一些科学的、系统的方法来为它们服务。在这种情况下，运筹学就逐步发展起来。1939年，苏联数学家康特洛维奇发表的《生产组织与计划中的数学方法》一书，可以说是运筹学的一个重要分支——线性规划的硕果。1951年，美国数学家毛尔思和金贝尔合写了《运筹学方法》一书，总结了第二次世界大战期间的部分经验和方法。在以后的年代里，运筹学有了较快的发展。

资本主义生产和经营的目的，是为了取得高额利润。资本家发现运筹学可以帮助他们赚钱。象美国的洛克菲勒、杜邦等大垄断企业，都雇用了许多数学工作者专门研究运筹学，为他们策划如何进一步剥削工人，以榨取更多的剩余价值。同时，研究如何排挤和吞并其他资本家，以巩固自己的

垄断地位。此外，一些国家的国防部也设立了运筹学研究机构，专门研究如何打仗。

运筹学作为一门现代数学科学，既可以用于资本主义，也可以用于社会主义。在社会主义国家，由于有马克思列宁主义的经济理论作为运用数学方法的基础，由于生产资料的公有制和国民经济有计划按比例发展规律的作用，所以运筹学能够更好地为社会主义经济建设服务。我国研究和应用运筹学虽然比较晚，但随着我国社会主义建设事业的发展，运筹学的理论和方法却得到了较快的发展。我们不仅吸收了外国的研究成果，而且研究了许多制订规划、解决实际问题的好方法。其中最突出的是图上作业法。利用这个方法解决物资的运输、汽车和船舶的调度、仓库和工厂建设地点的选择、电力系统的配置等等，都取得了显著的效果。运筹学在我国运用的前景非常广阔，并将取得更大的经济效益。

第二节　什么是线性规划

运筹学包括以下几个主要分支：对策论、决策论、存储论、排队论、质量控制论、信息论和规划论等。其中规划论包括线性规划这一重要内容。

线性规划是运筹学中起源较早、理论上较成熟的一个分支，也是应用于经济活动取得显著成效的一个数学方法。我们前面提到的苏联数学家康特洛维奇，早在1934年就研究过铁路运输问题，1939年又研究了胶合板托拉斯委托的生产组织问题，并写了《生产组织与计划中的数学方法》一书，奠

定了这门学科的理论基础。后来，美国数学家希奇柯克在1941年也提出了这类问题的不同解法。在以后的几年中，又陆续建立了“单纯形方法”和“解乘数法”的数学理论。现在，线性规划已广泛应用到工业、农业、商业、交通运输业等各个领域，并取得了十分显著的成效。

线性规划研究的内容虽然十分广泛，但总括起来，着重研究两方面的问题：一是在任务已定的情况下，研究如何合理安排，用最少的人力、物力和财力去完成这些任务；二是在人力和物力资源条件已定的情况下，研究怎样合理筹划，去完成更多的任务。

例如，某二级批发站所属若干个不同地点的仓库，需要把若干吨柴油分别运到若干个不同地点的零售点。应该如何组织运输？当然可以提出许多方案，但究竟哪一个方案最合理，所花的运费最省或吨公里数最少？这里面就有一个合理安排问题。

又如，某粮油加工厂有几种不同的原料，可以加工几种不同的食品，每种食品的价格和原料消耗是不同的。为了取得最大的产值，也有一个合理安排与使用原料的问题。

很明显，在解决这些问题的时候，往往会遇到很多的数量关系。线性规划能帮助我们从这些复杂的数量关系中找到最合理的方案。它的特点是在不增加人力和物力的情况下，用数学方法进行科学安排，找到其中的最优方案，以发挥更好的组织作用，并提高经济效益。

那么，什么是线性规划呢？我们通过下面的例子作一些具体的介绍。

一、一个实际例子

某副食品公司需要从甲、乙两个仓库调拨食糖给三个批发店（一店、二店、三店）。两个仓库的调出量分别为46吨和54吨；三个批发店的调入量分别为34吨、36吨和30吨。从两个仓库到三个批发店的运价如表1－1所示。

表1-1

单位：元／吨

仓库 \ 批发店	一 店	二 店	三 店
甲	50	60	70
乙	60	110	160

问：应该怎样安排调拨，才能使总运费最省？

很明显，就是这样一个简单的商品调拨问题，也面临许多调拨方案可供选择。例如，从调入方来说，一店需要的34吨可以由甲库和乙库各调给一半，也可以全部由甲库或乙库供给；二店需要的36吨，可以由甲库调给20吨，乙库供给16吨，也可以由乙库调给20吨，甲库供给16吨；三店需要的30吨，可以由甲库调给10吨，乙库调给20吨，也可以由乙库调给10吨，甲库调给20吨；等等。就调出方来看，甲库需要调出的46吨，可以平均调给一、二、三店，也可以调给一店20吨，二店10吨，三店16吨；乙库需要调出的54吨，可以调一店20吨，二店17吨，三店17吨，也可以只调给一、二店各27吨，而根本不调给三店；等等。总之，我们面前有很多不

同的数量组合。

那么，光凭经验去判断行不行呢？下面这个方案就是根据“就近调拨”的原则，哪里的运价最低，就安排哪里的调拨。即甲库到一店的运价最低（50元），一店需要的34吨全部由甲库调给。这样，甲库还剩12吨，就调给运费第二低（60元）的二店。二店需要36吨，还缺24吨，只好由乙库调给。乙库需要调出54吨，调走24吨以后，还剩30吨，则调给三店。于是得到表 1－2 这个调拨方案。

表1-2

单位：吨

仓库 \ 批发店	一店	二店	三店	调出量
甲	34	12		46
乙		24	30	54
调入量	34	36	30	100

这个调拨方案的总运费是

$$50\times34+60\times12+110\times24+160\times30=9,860(\text{元})$$

然而，这个方案却不是最优方案。我们用线性规划的表上作业法，可以求得最优的调拨方案（计算过程见第四章第三节），见表 1－3 所示。

这个调拨方案所花的运费只有：

$$60\times34+60\times16+110\times20+70\times30=7,300(\text{元})\text{。}$$

这个方案比前一个方案节约了运费2,560元，即节约了26%。可见，应用线性规划具有多么重要的意义。

表1-3

单位：吨

仓库 \ 批发店	一店	二店	三店	调出量
甲		16	30	46
乙	34	20		54
调入量	34	36	30	100

二、目标函数

线性规划的主要内容是什么？它是怎样解出上面这个问题的呢？

假设：以X代表两个仓库调给三个批发店的食糖数量：X_1为甲库调出的数量，X_2为乙库调出的数量。那么，甲库调给一店的数量就用X_{11}表示，调给二店的数量用X_{12}表示，调给三店的数量用X_{13}表示。同样道理，乙库调给一店的数量用X_{21}表示，调给二店的数量用X_{22}表示，调给三店的数量用X_{23}表示。根据上面提供的资料，两个仓库调给三个批发店的食糖调拨方案，可用表1－4的已知数和未知数联系起来。

表1-4

单位：吨

仓库 \ 批发店	一店	二店	三店	调出量
甲	X_{11}	X_{12}	X_{13}	46
乙	X_{21}	X_{22}	X_{23}	54
调入量	34	36	30	100

在数学上，X右下角的小数字称为"下标"。有时，下标用一个数字表示，如前面谈到的X_1，X_2。但更多的时候，下标由两个数字组成，前一个数字表示行（横行），后一个数字表示列（纵列）。比如上表中的X_{23}，就表示第二行第三列的X值，即乙库调给三店的数量。如果行和列很多，超过了一位数，如$X_{13,25}$，则表示第13行第25列的X值。我们在中间用逗号分开，以资区别。同样道理，下标也可以用未知数表示，如X_{ij}，则表示第i行第j列的X值。

从上面讲到的问题和表1－4列出的各种数值的关系，我们可以看到：所谓求最优调拨方案，它所面临的问题就是决定哪一个仓库的食糖调给哪一个批发店、调多少最合理。也就是确定X_{11}，X_{12}，X_{13}，X_{21}，X_{22}，X_{23}的值，使总的运费最省。

很清楚，这个例题的目标是寻求最少的运费，而运费的多少又是由食糖调拨的数量和运价的多少（或者说不同的调拨地点）决定的。我们用Z代表总运费，则得到下面这个目标方程式或者叫目标函数

$$Z=50X_{11}+60X_{12}+70X_{13}+60X_{21}+110X_{22}+160X_{23}$$

式中的$50X_{11}$即$50\times X_{11}$。它表示甲库调拨食糖给一店所要花的运费。如果$X_{11}=30$，则运费为$50\times30=1,500$（元）。Z是两个仓库调拨食糖给三个批发店所需要的运费的总和。它由两方面的因素所决定：一方面，不同的调拨数量产生不同的运费。如$X_{11}=20$，则甲库调给一店所花的运费相应减少，$50\times20=1,000$（元）；另一方面，不同的运价也产生不同的运费。如一店所需的20吨食糖不由甲库而由乙库调给，

则$X_{21}=20$，运价为60，所花的运费为$60\times20=1,200$（元）。总之，一组不同的X值导致不同的运费。由于运费是随调拨数量和运价的变化而变化的，所以，运费是调拨数量和运价的函数。在线性规划这门学科里，把我们寻求的目标——总运费称为目标函数。

三、约束条件

运费虽然随调拨数量和运价的变化而变化，但这种变化又不是无限制的。例如，我们不能使所有的X等于零，这样就没有任何意义；也不能使X_{11}大于34，因为一店的调入量总共只有34；更不能使所有的X前面的系数都是50（即$50X_{11}$，$50X_{12}$，$50X_{13}$，…，等等），因为不仅一店，而且二店、三店也需要食糖，这些食糖不能全部由甲库调拨。这样看来，这个例题有一些限制条件。线性规划把这些限制条件称为约束条件。

首先，让我们看看一店。它所需要的食糖是34吨。这就决定了其约束条件是：甲库和乙库调给它的数量必须等于34吨。我们知道，甲库调给它的数量是X_{11}，乙库调给它的数量是X_{21}。于是，可以写出这个例题第一个约束条件的方程式是：

$$X_{11}+X_{21}=34 \cdots\cdots (1)$$

其次，看看二店。它需要调入的食糖是36吨。这就决定了其约束条件是：甲、乙两库调给它的数量必须等于36。按同样道理，可以写出这个例题第二个约束条件的方程式是：

$$X_{12}+X_{22}=36 \cdots\cdots (2)$$