数学基础

莫绍揆

高等教育出版社

本书对数学各科中凡牵涉到基础问题的部分汇聚起来，从数理逻辑的角度加以分析、检讨，作比较深刻而系统的介绍，并有相当多的创见，使读者对数学基础问题有比较全面的认识 主要内容为:

绪论，介绍数学的三次危机及其解决过程，说明数学基础问题的起源；第一章逻辑演算，较全面而又系统地介绍数理逻辑的基本内容；第二章自然数论，主要介绍皮亚诺算术及递归算术与递归函数论；第三章数系的构造，介绍由自然数直到实数的构造过程，既解决了古昔的无理数问题，又是数学分析的奠基石；第四章几何基础，这是在数学基础问题内讨论的，既介绍、评价了希尔伯特的几何公理系统，又介绍了用线性代数处理几何的方法；第五章集合论初步，使读者知道如何将整个数学各概念归结为集合论概念的方法，这是数学基础问题的新面貌；第六章介绍各种抽象公理系统，这亦是数学的一个新面貌；在附录中介绍形式系统的不完备性，这既是数理逻辑的一大成就，也是公理化方法的局限性的表现.

本书可供综合大学与师范院校数学基础或几何基础课作为教科书，也可供数理基础工作者参考.

数 学 基 础

莫绍揆

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.875 字数 260 000

1991 年5月第1版 1991 年5月第1次印刷

印数 0001—2 010

ISBN7-04-002660-0/O·1011

定价 4.70 元

序　言

数学基础是一门新课目，对其内容的选择尚未有人详细讨论过，因此对本书的内容，不同的人肯定有很多的不同意见.鉴于国内这类的书极少甚至没有，要找参考书也非常困难，本书写得特别详细(以兼作参考书之用)，在讲授时不必逐章逐节地全部讲授.现在特提出一些初步意见，一方面说明所以这样地取材的原因，另一方面也可供教师讲授时作为选材的标准.

绪论是把数学基础问题从历史上介绍一番，以使读者知道数学基础问题的来龙去脉以及其重要性.本书作者认为把问题说得详细清楚，对学生的学习是有好处的，但不必花太多时间去讲授，可用两小时提纲挈领地讲述一番便够，其余部分可让学生自己阅读.

第一章内容是数理逻辑.如果学生有机会先学数理逻辑，则这章内容是可以删去的.但在国内(乃至国外)，在数学系开设数理逻辑课的极少，而只有学了数理逻辑以后才能对数学推导的本质(亦即数学的本质)有透彻的了解.因此第一章应该基本上全部讲授，约需16小时.

第二章是自然数论，这是纯数学的基本内容，是各种数、各种运算的出发点，非常重要.§1,§2是皮亚诺算术，是自然数论的标准讲法；§3是另一种讲法，它与标准讲法等价，但更简单方便；§4，§5则是进一步的讨论而且注重能行性.因此这五节各有特点，学生都应知道.作者建议，讲授时以§1,§2为主，学生自学§3,对比较优秀的学生可介绍其进一步阅览§4，§5.本章约需8小时左右.

第三章是数系(尤其实数系)的构造，这是近代数学的一大柱

石(全部极限论以及微积分学都建基于其上). 这部分内容如放在数学分析中则太难;不便于初学;如放在实变函数论中，又与别的内容无关,纯属"填补空白"性质. 实际上，这部分内容放在《数学基础》内最合适,是第二章自然数论的应有发展. 由有理数而构造实数,有多种方法,各有其特点，都值得学习和借鉴. 本书在第三章、第五章、第六章分别介绍它们,读者不要以为叙述重复了,讲授时可只讲一处,别的地方让读者自己阅读. §1, §2方法基本相同,可只讲一节. 本章约需8小时.

第四章是几何基础. 讲几何基础的书籍较多，它们几乎全都对欧氏《几何原本》忽略而不作介绍，一上来便胪列希尔伯特(Hilbert)的几何公理系统,从而作出大量推导，这种作法本书作者认为值得商榷. 不知道《几何原本》的公理系统,不评论其缺陷,势必无法理解希尔伯特公理系统,不理解为什么提出这样的公理,不理解它在什么方面优于旧系统. 至于推导,自从线性代数产生以来,在线性代数内推导几何定理,几乎已是不可抗拒的趋势,利用几何公理而作推导已经只对很狭小范围的人才有兴趣，值不得大多数的学生来从事了. 但是在线性代数内推导几何定理这事既不见于线性代数的书中(在那里,这种推导只是一种很特殊的应用，很少提到)，又不见于几何基础的书中(在那里，人们热衷于从希尔伯特公理的推导),以致绝大部分的学生,对这种新趋势并不知道,至少并不熟悉,这是很不应该的. 因此本书的第四章与一般的几何基础书截然不同. 详细地介绍《几何原本》的公理系统和希尔伯特的公理系统,详细地评论其缺点和可以改进的地方,但却不从这些公理出发进行推导,而介绍质点几何(线性代数的一种),以使读者能够熟悉利用线性代数以推导几何定理. 作者建议,在讲授本章时,对§1,§2,§4可以很快地讲完(至多花2～3小时)其大部分让学生阅读,而对§3则比较有系统地讲授. 全章约需8小时.

第五章是集合论，它是渗透到整个数学各部门去的一个内容．学习数学基础的人是应该懂得集合论的基本内容的．集合论的内容极多，如何适当地挑选最重要的内容是不大容易的，本章内容的选取是否适当，希望读者提出意见．值得说明的是，本章§6，§7似与第二章、第三章有重复，但是从集合而作出自然数(与实数)，是近代数理逻辑的一大成就，这种作法在数学别的部门内都可借鉴和使用，学生是很应该知道的，但可不必讲授，由学生自己阅读即可．全章约需12小时．

第六章介绍抽象公理系统．摩尔(Moore)曾说，凡不同理论中有平行发展的地方，都埋伏着一个公共的理论．各种形形色色的公理系统的提出及其研究，是近代数学的一大特点，也是近代数学的一大成就．本章不注重于某某公理系统，而注重于如何源源地由旧公理系统而作出新公理系统．§3～§5中所用方法基本一样，可只讲一节，其余两节由学生阅读．全章约需6～8小时．

附录介绍数理逻辑的一大定理，它显示出形式系统的本质，因内容较深而且较为特殊，可由学生(比较优秀的)自己阅读．

全书讲授合共约需60～62小时，如每周3～4学时，可供一学期使用(对多余的时间或不足的时间，由教师根据上面所述精神自己增删一些内容)．

为了方便教师的使用，下面举出本书的一些特别的地方，教师们如有不同意见，可以互相比较而作调整．

第一章中在命题演算处完全不用代入运算(和一般书一样)，但从狭义谓词演算起，便正式地大量地使用代入(公理亦用代入而表示)了，并对代入给以形式定义，详细地列出其性质，相信这样可使对逻辑演算的讨论清晰得多．对命题符、个体常元、个体变元、谓词符、函词符也给以形式定义，按照定义可以从符号本身看出元数(空位数)，从而使项及公式等得到有穷方式的刻画而不必

假定“有无穷多个符号……”等等. 在赋值、解释与指派处，规定对“约束变元”解释为空位符(命名变元)，从而对一公式或项的赋值的结果，可以一般地为谓词或函词(而不限定为真假值或论域中的元素)，这更有便于赋值的讨论.

庞加莱(**Poincaré**)曾说，数学归纳法是最基本的性质，不能由别的性质推导而来. 的确数学归纳法是根源于一些更基本的东西，那就是，对最基本的东西(如命题符、项、公式等等)所使用的递归定义，以及根据递归定义而作的归纳证明，这些应该一开始便使用，不能推迟到自然数论处. 为此，本书在开头时便介绍并使用递归定义及相应的归纳证法，并在狭义谓词演算处介绍递归子的概念，认为这些内容应属于狭义谓词演算. 这种意见希望得到读者的批评.

第二章，除依常例介绍皮亚诺算术的开头部分(到孙子定理为止，利用它以证原始递归式的合理性)外，并极力说明为什么要证明原始递归式的合理性. 还指出了，如在谓词演算中引入递归子，则原始递归式的合理性是自明的. 又指出了，如果把原始递归式的合理性作为公理而引入，则皮亚诺算术可以得到一个新的、更简的外貌. 由这些讨论，当可使读者明白，为什么在原来的皮亚诺公理系统中要大力证明原始递归式的合理性.

由于数理逻辑的进展，能行性概念日益重要，为此添入递归函数以及递归算术两节，使读者可以接触这方面的思路. 尤其递归算术，它撇开逻辑演算而独立发展，更值得注意.

第三章，当我们由自然数而整数、有理数、实数时，新数每每由旧数的数偶或数列而表示，但表示方式不止一种(而是无穷多种)，现在流行的书每每引入等价类而把新数定义为这些表示的等价类，为此要使用无穷集合. 本书恢复古老的作法，从各种表示中挑出一个“标准表示”，把这个标准表示叫做新数，这既符合习惯而易

于理解，又避免了无穷集合的使用．十进小数的真正作用在这里才得以阐释明白．

第四章，比较详细地介绍欧几里得的《几何原本》，为别的书所少见．在介绍希尔伯特的公理系统后，比较详尽地介绍希尔伯特的贡献（在几何基础方面），还介绍近人对希尔伯特系统的改进，这样更易知道有关几何公理系统的新面貌．当对几何系统作具体推导时，不介绍从几何公理所作的推导而介绍质点几何（从线性代数所作的推导），这更符合于近代几何的精神．在非欧几何处既讨论了三种著名的（欧氏及非欧）几何的公共基础（绝对几何）的有关问题，也介绍了其它的非欧几何的简单内容，以开拓读者的眼界，

第五章，集合论部分只介绍公理集合论的极基本的内容（但推导得比较具体详细），更高深的内容则只简略提及，不再深入．由集合而定义自然数，则作详细的介绍，使读者可以比较这种说法（由集合而定义自然数）与皮亚诺算术（用公理以确定自然数）之间的区别，而这正是数学基础的一个重要内容．

第六章比较注重于各公理系统的公共内容，以及各公理系统之间的相互关系，而不深入到各公理系统本身．在本章内大体上把目前各著名的公理系统都涉及了．大家知道，各公理系统大体上是由一些熟知的理论（自然数论、整数论、有理数论、实数论）抽象而来的，亦即由这些熟知理论舍弃了一些特有的性质而得出的．能否由各公理系统添入一些性质以得回原有的理论呢？这便是各熟知理论如何由这些公理系统刻画的问题．在本章内我们对此亦作了讨论，这样对抽象公理系统将有进一步的了解了．

以上各论点是否得当，请读者批评．

作　者

1986 年 12 月

目　　录

绪论　数学三次危机与数学基础

§1　数学的第一次危机

公元前五世纪，毕达哥拉斯 (Pythagoras) 学派的希帕索斯 (Hippasus) 发现了：正方形的一边与其对角线不可通约①．这是一个非常伟大的发现，和数学史上任何别的发现相比并不逊色，而它却导致了数学的第一次危机．

希帕索斯理应受到当时最高的奖赏，可是希帕索斯事实上究竟获得了什么奖赏呢？实际上他获得的是：受到同伴们把他抛进海里，处以"淹死"的惩罚，因为他违背了毕达哥拉斯学派的基本论点——万物都是数(自然数)．的确，根据希帕索斯的发现，不管你用什么单位去量度，正方形的边和对角线不能同时都是(自然)数．

这个发现不但对毕达哥拉斯学派的学说是致命的损害，而且对人们当时的根本信条也是极大的冲击．当时人们刚刚把自然数扩充到有理数，根据经验以及各式各样的实验，完全确信任何量，在任何精确度范围内都可以表成有理数．这不但是希腊人当时的普遍信仰，就是今天，测量技术已经高度发展，可以测量得高度精密的时候，这个断言也毫无例外地是正确的！可是居然发现了有不可通约的两条线段，亦即至少有一条线段不能用有理数去度量，这该是多么违反常识的事．从表面看来，也是多么荒谬的事．要把这种"荒谬"的事承认下来，该是多么困难啊！它简直把以前所知道的、所相信的事情根本推翻了．因此，说它是数学的第一次危机，绝

① 另外，他还(更早地)发现正五边形的一边与其对角线不可通约，这比之正方形的情况是更难觉察、更难证明的．由此可以看出，希帕索斯确是具有非凡的数学推理能力的．

不是过甚其词，而是非常恰当的.

经过这次发现，希腊人不得不承认：第一，直觉、经验乃至实验都不是绝对可靠的（比如说，用任何实验都只能得出一切量均可用有理数表示这个结果），今后必须依靠证明. 第二，数（自然数）及其比（有理数）不能包括一切几何量，但几何量却可以表示数（自然数与有理数），因此几何较之算术占着更重要的地位.

从此以后，希腊人便不重算术而重几何、不重计算而重推理了. 人们常说，古代世界上各民族如埃及、巴比伦等都是注重计算与算术的，只有希腊人不喜欢数而喜欢图形，不喜欢计算而喜欢推理，说这是希腊的民族特征；于是还把所有有姓名传下来的希腊数学家，从泰利斯(Thales)开始，都说成是建议进行推理的人物. 这种种说法看来是不太符合于历史事实的.

泰利斯从事商业活动，预测过一次日食，利用影子长度来计算金字塔的高度，测量过船只离岸的距离，改进航行术等等，这些都属于计算与实用过程，而与推理无关. 公元前六世纪希腊统治者梭伦(Solon)给手艺工人以荣誉，给发明家以奖励；希腊字"sophia"在后来是指"智慧"、"抽象思想"的，当初却指"技巧"；凡此种种都表明希腊人本性仍注重计算、注重技巧的. 普洛克鲁斯(Proclus)说，只是从毕达哥拉斯以后才把"数学变成自由教育（意指自由人的教育，不再是奴隶的技巧）"，这句话大概是真的，亦即自从毕氏以后，希腊人对数学的态度才为之一变. 但大家知道，"毕氏"实际上指一个学派，我们可以更正确地说：自从毕氏门徒发现了无理数后，才对数学的态度有所改变. 历史事实表明，无理数的发现（数学的第一次危机）使得数学的发展方向有一个很大的改变，说无理数发现前希腊人便注重推理，是没有根据的.

无理数发现后，经过一段思想混乱的时期（以芝诺(Zeno)的四个悖论和诡辩学派为代表），由于苏格拉底(Socrates)、柏拉图

(Plato)、亚里士多德(Aristotle)、欧度索斯(Eudoxus)等的努力，便替几何学建立了公理系统，由欧几里得(Euclid)编成《几何原本》一书，流传至今，成为数学的一部标准著作.

人们经常注意到欧几里得对《几何原本》的作用，其实柏拉图、亚里士多德和欧度索斯的贡献也不小.

柏拉图是一个大哲学家，他很注意几何. 他曾标榜于其门口说：凡不懂几何的人不能进此门. 他和他的弟子对几何学都有很高的造诣. 现在虽然不知道他们具体的贡献，但他之后不久，几何学便完成了流传到今天的公理系统. 看来，这不能不说是他作了很大的贡献.

欧度索斯最大的功绩是建立一套完善的比例论，把不可通约量处理得妥妥当当，直截了当地把由于无理数的出现而引起的数学危机解决了. 我们看得非常清楚，正是由于有欧度索斯的比例论，希腊人才敢于正面面对不可通约量，敢于认为不可通约量并不神秘，然后才敢于建立整个几何体系，敢说可以由几条公理而推出整个几何. 可以说，欧度索斯的比例论是欧氏的《几何原本》的一大基石，没有它是不会建立起《几何原本》的公理体系的.

欧度索斯理论的主要点是：他不说两量之比是什么（据今天说法，比是一个实数，包括无理数），而只定义在什么情况之下两个比是相等的. 这已开创了今天抽象法的起源，今天我们可以不说基数是什么而只说在什么情况下两基数是相等的便可以发展基数论，用的正是欧度索斯的方法.

欧度索斯的定义如下：设有四个量 A, B, C, D，如果对任何自然数 m, n，永有：$mA \gtreqless nB$ 当且仅当 $mC \gtreqless nD$，则说 $A:B=C:D$，亦说四数成比例（这种定义，今天看来还是非常恰当的）.

亚里士多德肯定公理的必要性，主张分成公理（适用于各学科）与公设（适用于某特定学科），这已为欧几里得所采用. 亚氏

又主张和公理一样，也应有一些无定义的原始概念，以免彼此循环定义，这一点欧几里得没有采纳(欧氏把一切概念都给以定义). 今天看来，亚氏的主张比欧氏的更可取. 今天我们都同意亚氏的说法，列出一些无定义的原始概念了(亚氏及其门徒也给出或改进好些定义和公理，其中有很多已为欧氏所采用).

更为重要的是，亚氏著作了一本《工具论》，对逻辑推理过程作深入研究，得出三段论学说，并把它表述成一个公理系统. 他的《工具论》还早于欧几里得的《几何原本》，可以说，他对三段论所作的公理系统还是第一个成文的公理系统 (至少是现存的第一个公理系统)! 由此看来，亚氏的三段论和欧氏的几何 原本 是两个最早的公理系统(一个是逻辑的公理系统，一个是几何的公理系统)，几乎是同时诞生的(前后相差四十来年)，可以说是科学史上的双胞胎. 这对双胞胎都同样享受二千多年的盛誉，都在19世纪末期 (20世纪初期) 受到彻底的改造，在这之前都被人们视为金科玉律，推理模范，真是巧合之至了!

可以说，数学的第一次危机既产生了数学的第一本经典著作，《几何原本》，也产生了古典逻辑的经典著作《工具论》. 这两部著作所讨论的内容正是数学基础的两大内容.

§2 非欧几何的诞生

欧几里得的《几何原本》可以说是解决数学第一次危机的产物. 但就在欧几里得的当时，人们便已对它不满意，主要在于其中有关平行线的公设(第五公设). 人们所以对它不满意，是因为它的叙述太噜嗦了，虽然大家都相信它是正确的，但却嫌不够简明；换句话说，大家觉得它不象一条公理(公设)，倒象一条定理. 如果它真的是一条定理，它便应该能够从别的公理、公设推出. 因此，

在欧几里得之后不久，便出现“改进”《几何原本》的评论家．所谓“改进”是指：从别的公理、公设推出平行公设，使它成为定理，从公设中删去．

但是一切“改进”的企图全都失败了，人们经历了下列三个阶段．

最初，人们企图从别的公理、公设推出平行公设．好些人自以为成功了，但是经过检查，所有的证明中都有意无意地使用了一些别的假设，而这些新假设与平行公设是等价的(在别的公理、公设帮助下)．因此人们并没有从别的公理公设推出平行公设，只是找出一些与平行公设等价的命题罢了．“改进”的目的并没有达到．

第二阶段，人们想用反证法来推出平行公设．即，既承认别的公理、公设，又假设平行公设为假，如果从此推出矛盾，根据反证法，便可证出平行公设了．最早作此尝试而又最有名的是意大利数学家萨开利(G.Saccheri)．他在一线段两端树立两条相等的垂直线段，连结两垂直线段的另外两端点而成四边形．他指出了这四边形的四个角，除两底角为直角外，如假设两顶角(必相等)为直角，将得平行公设，如假设为钝角则导致矛盾应予抛弃．此外，他从锐角假设出发，作了相当长的推导，得出“有两条线，它们在无穷远处相交，而在交点处该两线有公垂线”．最后他说，“锐角的假设是绝对错误的，因为它与直线的本性相矛盾”．他否定了锐角假设和钝角假设，便证明了直角假设亦即平行公设了．后人经研究后指出，萨开利的论证是不成立的．别的数学家想用反证法证明平行公设也失败了．

第三阶段，人们仍然承认别的公理公设而否认平行公设，并从而进行推导，但是不忙于作“得出矛盾故平行公设成立”的论断，而是一直推下去，看看推出什么结果，希望得出明确无疑的矛盾后，

再作结论. 这样做的结果是: 人们越推越远, 出现一大批很奇怪的, 与常识(常见的结果)很不相同的定理, 但却丝毫不自相矛盾. 于是数学家们便渐渐地提到: "否认平行公设后虽然看来很接近于矛盾, 但始终没有出现矛盾". 换句话说, 人们渐渐意识到, 否认平行公设后, 可能得到一个融贯的、不自相矛盾的新几何系统来. 在萨开利略后一点的兰伯特(J.H.Lambert)便是其中一个.

最后便出现了非欧几何. 非欧几何诞生于什么时候, 很难明确指出. 如果说, 当人们推出一条非欧几何的定理便算是非欧几何诞生, 那末在上面的第二阶段中, 例如萨开利, 便已推出相当多的非欧几何定理. 如果说, 当人们已经不再匆忙地说"出现矛盾", 而愿意看看推出怎样的结果(不限于必推出矛盾)时, 便算非欧几何诞生, 那末第三阶段便是非欧几何诞生时期, 而兰伯特等人也可算是非欧几何的创始者了.

如果说, 至少要正式说出"否认平行公设 (并承认别的公理、公设)不会导致矛盾", 才算是诞生了非欧几何, 那末符合这个标准的也有施外卡特(Schweikart)、陶里努斯(Taurinus)、开斯特涅(Kästner)、高斯(Gauss)等人. 但是我们要求更严格些, 还要求他们不但肯定, 而且企图证明"否定平行公设不会导致矛盾". 上面这些人都只是说出(肯定)而未企图证明, 只有俄国的罗巴切夫斯基(Лобачевский) 和匈牙利的鲍耶(Bolyai)两人, 不但最早发表了非欧几何的系统论文, 详细地推导了非欧几何的主要定理, 而且还在一定程度上证明了: 他们的几何系统是融贯的, 没有矛盾的. 正是因为这点, 现在人们都把罗氏和鲍氏两人作为非欧几何的创始人. 最近渐渐有人把高斯也算作创始人之一, 因为他在他们两人之前已获得了相当多的非欧几何的定理, 确信新几何没有矛盾. 但是, 既然他没有企图证明新几何没有矛盾, 对比上面的严格要求他是略有不足的.

当然，从今天的标准看来，罗氏、鲍氏两人的融贯性证明是有缺点的，不完全的. 但是其想法是对路的，只要依照今天的标准略加改进，其证明是正确的. 试就罗氏的证明而论，其主要想法是：在欧氏几何中构造出新几何的一个模型，使得新几何的各定理都可以根据一定的法则而变成相关的欧氏几何的定理. 如果新几何有矛盾，即在新几何中能够推出互相矛盾的两条定理，那末根据上述法则，便可变成欧氏几何中互相矛盾的两条定理，从而欧氏几何也将矛盾了. 既然大家承认欧氏几何没有矛盾，是融贯的，那末新几何也就没有矛盾了. 这便是罗氏所给的证明的主要想法.

这种证法，把新几何的融贯性归结到欧氏几何的融贯性，可以叫做相对融贯性的证明. 这种相对融贯性的证明，对于建立非欧几何而言，对于替新几何争取生存权而言，是很有力的，很能解决问题的. 有了这个证明，新几何之存在(从而平行公设不能由别的公理公设推出)，便没有什么人再怀疑了.

但是，对于新几何是否真的融贯这个问题，上面的相对融贯性证明却不能解决问题. 因为它只把新几何的融贯性归结于欧氏几何的融贯性. 人们要问：欧氏几何的融贯性又从哪里证明呢？

人们会说，欧氏几何和我们的直觉、经验完全符合，它的融贯性还用得着怀疑吗？还需要证明吗？

我们必须指出，数学的第一次危机(它导致几何公理系统的建立)表明了直觉、经验不可全信(见§1). 现在，对有关欧氏几何的融贯性问题，怎么又退回到直觉、经验的保证上面去呢？是的，我们应该证明“欧氏几何是融贯的，”不应完全依靠直觉和经验.

这时人们求救于解析几何. 在解析几何中，人们建立坐标系，把点与坐标相对应，把直线与一次方程相对应等等，于是有关几何的定理便变成有关实数与方程的定理. 如果欧氏几何有矛盾，即在欧氏几何中推出互相矛盾的两条定理，根据这种对应，在实数论