

1980年

全国计算力学
会议文集

中国力学学会主办
北京大学出版社出版

前 言

力学是一门古老的但仍在不断前进的科学。它一直在为工程实践服务，所以它的理论始终受到实践的检验并且在实践中得到发展。近二十年来，在工程实践中形成了具有旺盛生命力和具有许多分支的工程力学。自从五十年代末期第一代电子数字计算机出现以来，力学运用这个强大的先进工具，为自己增添了新的力量，产生了新的概念和新的方法，扩大了活动范围，分析和解决问题的能力有了很大提高。这种突飞猛进式的变化正方兴未艾，并且很自然的形成了计算力学这一横贯力学各个分支的新的领域。

随着第一代电子数字计算机的问世，我国的力学、数学工作者和工程技术人员就开始了力学计算机化的探索工作。六十年代初期，首先在航空结构分析的计算机化方面取得了较大的进展。此后的十年不少力学工作者注意到国外计算力学的迅速发展趋势，并做了不少工作。1978年教育部在大连召开的高等学校计算结构力学学术交流会，基本上反映了当时我国计算结构力学的发展状况。但是大连会议的规模较小，内容也只限结构方面，因而在反映计算力学的全面水平上是不够的。

1980年11月12日至18日中国力学学会在杭州召开的全国计算力学学术交流会，是我国计算力学发展史上的第一次。在这次会议上交流的研究成果和学术报告，集中地反映了近年来计算力学在理论、方法和应用上取得的最新进展。我国计算力学的研究领域和应用范围明显地扩大了，发展了一批通用的程序系统和专用程序，在结构优化方面做了一些有创造性的工作，有些文章还提出了一些当前国际上尚未见到的新想法。可以说，我国计算力学这些年的发展是有自己的特点的。

虽然我们已经取得了这些可喜的成果，但是要赶上和超过世界先进水平，还要做大量的工作。

我们要继续提倡用较小的机器解较大的问题的精神，根据我国现有计算机的特点，从计算方法和模型选择上多想办法。应该更加努力扩大计算力学的应用范围，为我国现代化建设解决更多的实际问题。

我们要注意填补和加强计算力学的空白和薄弱环节，例如微观和细观，高度非线性等方面的研究工作。这些问题，有的国际上已经做了大量工作，有的还处于开始阶段，我们应该急起直追。

从事计算力学工作的同志，对于计算机的发展是十分关心的。目前我国计算机的水平较低，远不能满足计算力学发展的需要。在某些方面，我们虽然在理论和方法上有许多新的想法，但是由于没有可用的大型计算机而不能实现。因此，我们要努力促进计算机的迅速发展，并且首先应该把现有的计算机更好的管理和使用起来，发挥它们的作用。

我们相信，这次会议之后，必然会引起各方面对于应用计算力学解决工程技术实际问题的更多的重视与兴趣，必定会有更多更好的成果出现。再过若干年，当人们回头重读这本文集时，也许将会对它的水平和内容感到不足，但它是我国计算力学迈出的第一步的真实记录，希望它对我们当前的工作有所补益。

全国计算力学会议文集编辑委员会

1980 年 12 月

目 录

前言	(I)
----	-------

第一部分 论 文

理 论 与 方 法

两类轴扭转问题在任意非正交曲线坐标系方程的共同表达式及解法	李敏华 任孝安 (1)
有限元分析中的拟协调元法	唐立民 陈万吉 刘迎曦 (11)
位移函数在用有限单元法求解弹性力学问题中的应用	王敏中 苏先樾 武际可 (20)
建立精密单元刚度矩阵的一种方法的改进	丁皓江 徐博侯 陈志平 (28)
关于有间隙弹性接触问题的解及其迭代格式	崔俊芝 (33)
大型广义特征值问题一个新解法	张 文 侯志坤 (38)
刚度改变对线性弹性系统频率和振型的影响	胡守信 (44)
方差泛函变分与高斯配点离散型最小二乘法	邱吉宝 (51)
循环矩阵及其在结构计算中的应用	梁国平 邵秀民 (58)

流 场 计 算

超声速、高超声速粘性气体分离流动的数值解法	张涵信 余泽楚 陆林生 马占奎 (64)
亚临界声速绕流问题的计算	陈耀松 马 瑜 (77)
用交替方向迭代法计算高超音速钝体的粘性激波层	董常铨 (82)
求解可压缩完全 Navier-Stokes 方程的一种差分格式 SOMS	邬华谟 杨明亮 (91)
机翼三维边界层计算方法	包涵令 (94)
双向一维流计算	陈大年 王德生 (102)
大型冷却池水力热力的数值模拟	吴江航 秦素娣 刘兰芬 李瑞生 (110)

结构分析与程序系统

关于非线性结构振动方程的求解——改进的 θ 法	孙焕纯 (124)
用半解析半离散法分析板壳	何广乾 张维嶽 (132)
最小二乘配点法解薄板弯曲问题	徐次达 郑瑞芬 施德芳 (142)
圆柱面螺旋线杆件空间刚度、内力及变形的计算	吴健生 (150)

加筋板大变形及过屈曲的有限元分析·····	常福忠 刘玉兰 (159)
岩体弹塑性问题的有限单元法·····	王德厚 黄自成 (168)
结构分析中的荷载线性规划模型·····	林少培 (177)
结构分析和结构化程序设计——介绍 JIGFEX 系统·····	钟万勰 李锡夔等 (183)
有限元软件系统的发展与 HAJIF-I·····	冯钟越 (191)
SDL 应用程序系统 (第一部分: 平面杆系) ·····	王绍华 张汉义 (196)

结 构 优 化

多单元、多约束、多工况的结构优化设计——DDDU 程序系统·····	钱令希 钟万勰 隋允康 张近东 (205)
具有频率约束的结构最轻重量设计·····	王生洪 (221)
机身结构优化设计·····	丁惠梁 陈文浦 孙宪学 武 访 (231)
双曲拱坝的优化·····	朱伯芳 宋敬廷 (238)
拟乘子法及其在结构优化设计中的应用·····	李康元 (245)
一个新的满应力设计方法·····	唐燮黎 (256)

其它领域的应用

不同步态下人体股骨的有限元分析·····	王以进 (263)
关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法——(I) 解析方法·····	欧阳颀 (272)
均布载荷作用下圆底扁薄球壳的非线性稳定性·····	叶开沅 顾淑贤 (280)
材料非线性有限元法中的一种新解法及其在平面断裂问题中的应用·····	龚尧南 (288)
耦合热弹性接触问题的有限元分析·····	陈万吉 (293)
弹塑性接触问题的有限元分析·····	刘元杰 徐福娣 (301)
地面强爆炸近区地运动规律研究·····	李荫藩 张德良 刘育魁 杨秀敏 赵成福 李和娣 (308)
用有限元法研究弹塑性波传播问题·····	苏士功 倪菊芬 (315)
用模态综合法计算旋转壳的固有振动和地震反应·····	王大鈞 任鈞国 陈 平 (320)
烧蚀端头帽的外形和温度场计算·····	黄振中 (330)

第二部分 摘 要

拟协调元的广义变分原理·····	陈万吉 刘迎曦 (338)
弹性薄板弯曲分析的一种改进的三角形单元·····	罗 恩 魏文郎 (340)
有限条元法的基本方程与级数的收敛性能和加速方法·····	赵祖武 (340)
大型结构频率方程的分块直接解法·····	叶碧泉 (341)
用杂交应力元及等参元计算应力强度因子·····	何积范 常亮明 高占民 李洲圣 孙篤信 (342)
解异形板弯曲问题的一种半解析法——有限板块法及有限单元法的联合使用·····	严宗达 (343)

结构有限元的修正解	吳良芝 (343)
旋转刚度的计算	丁皓江 (344)
激光等离子体动力学数值计算	毕 祝 苏林祥 李献文 董玉斌 (344)
超音速、高超音速压缩折角分离流数值解	傅德薰 陈英文 (344)
近海浅水环流问题的数值模拟	呂玉麟 賴国璋 (345)
水中任意布置各种柱径的多圆柱结构的抗震分析与动力分析	曲乃泗 (347)
组合体超音速流场数值计算	郭智权 (347)
冲击波绕二维山体的数值计算	李文绚 陈志林 (348)
复杂壳体应力分析	邹振祝 王本利 王宏钰 赵九江 尤靖康 (348)
结构化 FORTRAN 语言 及其实现	钟万勰 裘春航 吳金仙 (349)
环向加筋圆柱壳在横向冲击波作用下的动力响应	叶裕恭 (350)
高层建筑杆——薄壁柱结构空间内力分析的矩阵方法	程万年 姚卓智 (351)
高层建筑结构分层剪弯型振动体系在地震力作用下的弹塑性动力分析	赵西安 錢庚青 (351)
按有侧移薄板弯曲理论分析折迭板	云天铨 (352)
关于40个自由度、结点壳体单元的一些计算试验	周洪祥 赵丽仙 丁皓江 (353)
固体火箭发动机壳体法兰连接分析	陈汝训 (353)
有限元通用程序系统中的两个问题	张 迪 (354)
组合结构有限元分析的罚单元法和主从变量法	曲圣年 (354)
矩形板格分析及其程序使用说明	杨学龄 胡云程 (355)
弹性反应谱计算方法比较及程序	陶贵源 杜瑞明 (355)
最小二乘边界配点法解平面问题	徐文煥 陈 虬 (356)
多孔锥壳有限元分析	陈裕泽 汤绍源 (356)
用有限元半解析法计算复杂转子的临界转速问题	安为民 邹经湘 (357)
用交感模型平板弯曲单元进行薄壳和平板空间结构分析	魏兆正 张积珠 严国梅 (357)
结构动力模型支承刚度参数识别的优化处理方法	黃文虎 李效韩 (359)
桥式起重机主梁优化的一个计算方法——复形法	宋甲宗 施光燕 (359)
有频率禁区的结构优化设计	林家浩 (360)
双层柱壳组合结构的优化分析	宋天霞 (360)
建议一个计及大变形的极限分析定理	薛大为 (361)
大型雷达结构自振频率分析	徐植信 朱美珍 翁大根 于春生 (362)
结构动力阻尼特性及速度元法	杨真荣 閻榕玲 (362)
用有限元——线性规划法解弹性接触问题	紀名剛 (363)
自由界面模态综合方法的改进	朱礼文 (364)
在 C_n 群上对称的壳体结构的振动分析	孙树勋 (364)
关于高阶稀疏局部非线性方程组的拟牛顿方法	崔俊芝 (365)
有限元混合法分析四坡顶扭壳屋盖	徐次达 郑瑞芬 (366)
岩体工程有限单元分析中的一维节理单元	殷有泉 张 宏 (366)

再入飞行器壳体结构在强脉冲射线辐照下的动力响应·····李清源 (367)	
计算表面裂纹体 St.-Venant 扭转问题用的高阶奇应变单元·····	
·····蔡承文 刘明杰 黄纯明 (368)	
土中一维塑性波的传播·····黄崇明 游新义 (369)	
附录 会议报告总目录 ·····	(370—382)

CONTENTS

PREFACE	(I)
---------------	-------

(I) PAPERS

Theories and Methods

General equations of two types of shaft under torsion using arbitrary non-orthogonal curvilinear coordinates and its method of solution	Li Min-hua, Ren Xiao-an (1)
Quasi-conforming element method for finite element analysis	Tang Li-min, Chen Wan-ji, Liu Ying-xi (11)
The application of displacement functions to the finite elements in elasticity	Wang Min-zhong, Su Xian-yue, Wu Ji-ke (20)
Improvement of a method to establish the refined element stiffness matrix	Ding Hao-jiang, Xu Ba-hou, Chen Zhi-ping (28)
The solution and iterative scheme of the elastic contact problems with initial gap	Cui Jun-zhi (33)
A new method for solving the large scale generalized eigenvalue problems	Chang Wen, Hou Zhi-kun (38)
The effect on eigenvalues and eigenvectors of a linear elastic system due to the variance of stiffness	Hu Shou-xin (44)
Square error functional variation and discrete least square method of the Gauss collocation	Qiu Ji-bao (51)
The circulant matrix and its applications for the computation of structures	Liang Kuo-ping, Shao Xiu-min (58)

Flow field computations

Numerical analysis for the super-sonic and hyper-sonic separated flows of viscous gas	Zhang Han-xin, Yu Ze-chu, Lu Lin-sheng, Ma Zhan-kui (64)
A computational method for the subcritical sonic potential flow	Chen Yao-song, Ma Yu (77)
Using an ADT technique to the hypersonic viscous shock-layer equation for blunt body	Dong Chang-quan (82)
A difference scheme SOMS for the calculations of viscous flows	Wu Hua-mo, Yang Ming-liang (91)

Calculation method for three-dimensional boundary layers of wings	Bao Han-ling (94)
The calculation of coupled one-dimensional flow	Chen Da-nian, Wang De-sheng (102)
Hydro-thermal numerical simulation of large cooling pond	Wu Jiang-hang, Qin Su-di, Liu Lan-fen, Li Rui-sheng (110)

Structural analysis and program systems

On solving non-linear structural dynamic differential equations—an improved θ method	Sun Huán-chun (124)
Analysis of plates and shells by the semi-analytical and semi-discretizing method	He Guang-qian, Zhang Wei-yue (132)
The least-square collocation method used in plate-bending problems	Xu Ci-da, Zheng Rui-fen, Shi De-fang (142)
The computer analysis for space stiffness, section forces and displacements of a helical member	Wu Jian-sheng (150)
The finite element analysis for stiffened plates considering large deflection and postbuckling	Chang Fu-zhong, Liu Yu-lan (159)
The finite element analysis for the elasto-plastic problems in rock mechanics	Wang De-hou, Huang Zi-cheng (168)
Load linear programming model for structural analysis	Lin Shao-pei (177)
Structural analysis and structured programming—program system JIGFEX	Zhong Wan-xie, Li Xi-kui et al (183)
The development of finite element software system and HAJIF-I	Feng Zhong-yue (191)
The SDL applied program system (part I; planar member systems)	Wang Shao-hua, Zhang Han-yi (196)

Structural optimization

Optimization of structures with multiple types of element under multiple loading cases and multiple constraints—program system DDDU	Qian Ling-xi, Zhong Wan-xie Sui Yun-kang, Zhang Gin-dong (205)
Minimum weight design subject to structure frequency constraints	Wang Sheng-hong (221)
The optimum design of fuselage structure	Ding Hui-liang, Chen Wen-pu, Sun Xian-xue, Wu Fang (231)

The optimum design of double-curved arch dam.....	
.....Zhu Bo-fang, Song Jing-ting (238)	
Quasi-multiplier method and its application in structural optimization design.....	Li Kang-yuan (245)
A new method of fully stressed design.....	Tang Xie-li (256)

Applications in other fields

The analysis of finite elements in various walking stages of the human femur.....	Wang Yi-jing (263)
A kind of solutions for any edge notch or cracks —(I) analysis method.....	Ou Yang-chang (272)
Non-linear stability of a spherical shallow shell under uniformly distributed pressure.....	Yen Kai-yuan, Gu Shu-xian (280)
A new solving procedure for material finite element method and its application for 2-dimensional fracture problem.....	Gong Yao-nan (288)
Finite element analysis for the coupled thermo-elastic contact problem	Chen Wan-ji (293)
Finite element analysis for elasto-plastic contact problem.....	
.....Liu Yuan-jie, Xu Fu-di (301)	
Research of close-inground motion from strong surface blast.....	
.....Li Yin-fan, Zhong De-liang, Liu Yu-kui,Yang Xiu-min, Zhao Cheng-fu, Li He-di (308)	
Study of elasto-plastic wave propagation problem by finite element method.....	Su Shi-gong, Ni Ju-fen (315)
Natural vibration and seismic response of shells of revolution using modal synthesis method.....	
.....Wang Da-jun, Ren Jun-guo, Chen Ping (320)	
Calculations on shapes and temperature fields of the ablating nosetip cap.....	Huang Zhen-zhong (330)

(I) ABSTRACT

The generalized variational principle of the quasi-compatible element models.....	Chen Wan-ji, Liu Ying-xi (338)
An improved triangular finite element for the bending analysis of elastic plate.....	Luo En, Wei Wen-lang (340)
Fundamental equations of finite strip method and characters of conver- gence of series and its acceleration.....	Zhao Zu-wu (340)
The direct solution by blocks for frequency equations of large scale structures.....	Ye Bi-quan (341)

Determination of stress intensity factors using assumed-stress hybrid finite elements and isoparametric finite elements.....	He Ji-fan, Chang Liang-ming, Gan Zhan-min, Li Zhou-sheng, Sun Du-xin	(342)
A semi-analytical method for solution of the bending of plates with irregular boundaries—Combination of finite panel method and finite element method.....	Yan Zong-da	(343)
Modified solution in structural finite element analysis.....	Wu Liang-zhi	(343)
A computation of the rotational stiffness.....	Ding Hao-jiang	(344)
Numerical calculation of laser plasma dynamics.....	Bi Zhu, Su Lin-xiang, Li Xian-wen, Dong Yu-bin	(344)
Numerical solutions of supersonic and hypersonic separated flows over compression corner.....	Fu De-xun, Chen Ying-wen	(344)
The mathematical modelling of near coast shallow water circulation problem.....	Lu Yu-lin, Lai Guo-zhong	(345)
Structure with arbitrarily located multi-cylindrical piles of different diametres subjected to earthquake and vibration.....	Qu Nai-si	(347)
Numerical computation of inviscid supersonic flow fields on sphere- cylinder-flare configurations.....	Guo Zhi-quan	(347)
Numerical solution for the problem of shock wave past the two-space- dimensional hill.....	Li Wen-xuan, Chen Zhi-lin	(348)
Stress analysis in shells with complex shape.....	Zou Zhen-zhu, Wang Ben-li, Wang Hong-yu, Zhao Jiu-jiang, You Jing-kang	(348)
Structured FORTRAN programming language and its implementation...	Zhong Wan-xie, Qiu Chun-hang, Wu Jin-xian	(349)
The dynamic response of ring-stiffened elastic cylindrical shell with infinite length to a transverse shock wave.....	Ye Yu-gong	(350)
Matrices method of three dimensional stress analysis for tall building composed of bars and thin-walled columns.....	Cheng Wan-nian, Yao Zhuo-zhi	(351)
Multi-mass system for elasto-plastic dynamic response analysis of tall building structures.....	Zhao Xi-an, Qian Yu-qing	(351)
Analysis of folded plates based on the bending theory of thin plates with sidesway.....	Yun Tian-quan	(352)
Some computational tests for the eight-node shell element with 40 degrees of freedom.....		

.....	Zhou Hong-xiang, Zhao Li-xian, Ding Hao-jiang	(353)
The connection analysis of flanges for solid propellant rocket engine cases	Chen Ru-xun	(353)
Two problems in the general program system of the finite element method	Zhang Di	(354)
The penalty element method and the master-slave variable method for finite element analysis of composite structures.....	Qu Sheng-nian	(354)
On the analysis of rectangular plate lattice structure and its computer program.....	Yang Xue-ling, Hu Yun-cheng	(355)
Comparison of computational methods for calculating elastic response spectrum and the associated program.....		
.....	Tao Gui-yuan, Du Rui-ming	(355)
Analysis of plane problems by the least squares boundary collocation method.....	Xu Wen-huan, Chen Qiu	(356)
Finite element analysis of multi-hole conical shell.....		
.....	Chen Yu-ze, Tang Shao-yuan	(356)
The semi-analytical method of finite element analysis for critical speed of the complex rotor.....	An Wei-min, Zou Jing-xiang	(357)
The hybrid plate bending element for the analysis of shell and three space dimensional panel structures.....		
.....	Wei Zhao-zheng, Zhang Ji-zhu, Yan Guo-mei	(357)
An optimization technique for the identification of support rigidity parameters of a dynamic structural model.....		
.....	Huang Wen-hu, Li Xiao-han	(359)
The optimum design of a girder of overhead travelling crane by complex method.....	Song Jia-zong, Shi Guang-yan	(359)
Optimum design of structures with frequency prohibited band.....		
.....	Lin Jia-hao	(360)
Optimal analysis of the composite structure with double cylindrical shells.....	Song Tian-xia	(360)
A theorem on the limit analysis in finite displacements.....	Xue Da-wei	(361)
Analysis of the natural frequencies of large radar.....		
.....	Xu Zhi-xin, Zhu Mei-zhen, Weng Da-gen, Yu Chun-sheng	(362)
The features of dynamic damping system of structures and the velocity element method.....	Yang Zhen-rong, Yan Rong-ling	(362)
The linear programming method and finite element analysis for elastic contact problems.....	Ji Ming-gang	(363)
Improvement of modal synthesis methods of free-interface.....		
.....	Zhu Li-wen	(364)

Analysis of vibration of shell structures with group C_n	Sun Shu-xun (364)
The quasi-Newton's methods of the solutions of discrete equations in nonlinear mechanics.....	Cui Jun-zhi (365)
The mixed finite element method used for the analysis of a "four-hill- sides" hyperbolic shell roof.....	Xu Ci-da, Zheng Rui-fen (366)
One-dimensional joint element in finite element analysis for rock engineering.....	Yin You-quan, Zhang Hong (366)
Dynamic response of re-entry vehicle shell structure under strong X-ray pulse.....	Li Qing-yuan (367)
Compute the surface crack of St.-Venant torsional problem, using high order singular strain element.....	Cai Cheng-wen, Liu Ming-jie, Huang Chun-ming (368)
The propagation of one-dimensional plastic wave in soil.....	Huang Chong-ming, You Xin-yi (369)

APPENDIX List of All Papers Presented at the Conference (370—382)

两类轴扭转问题在任意非正交曲线 坐标系方程的共同表达式及解法

李敏华 任孝安

(中国科学院力学研究所)

参考文献〔1〕用任意正交曲线坐标对发动机涡轮轴先用沿坐标曲线积分叠代^{〔2〕}进行数值计算,得到了轴的应力分布。但这种叠代法^{〔2〕}收敛性差。所用的分区几何方程形成正交曲线坐标有时也较困难。文献〔3〕和文献〔1〕中第二种数值计算方法,改用节点应力函数叠代,提高了收敛性,从而放松了对应力函数初值的要求,也就放松了对坐标曲线的选择要求。中国科学院工程热物理研究所成功地 将 非 正 交 曲 线 座 标 用 于 叶 轮 机 械 内 部 流 动 问 题 的分析计算^{〔4〕},作者受到了启发,改用非正交曲线坐标,推导得到了变截面圆轴扭转问题在任意非正交曲线坐标系中的方程,给出了形成曲线坐标的简易方法,发展成为变截面圆轴扭转问题的新解法^{〔3〕}。文献〔5〕编排了通用程序,叙述了其中一些问题的处理方法,并对复杂外形的实际涡轮轴进行了计算,给出了全轴的应力分布图和等应力函数线图。

本文首先将上述方法^{〔3〕}推广到任意形等截面柱体扭转问题,得到了以应力向量表达的平衡和协调方程,以及在任意非正交曲线坐标系中的方程。解决了计算过程对本问题协调方程中柱体扭转角项 $2G\alpha$ 的处理问题。为了对方程和方法进行考核,对有解析解的空心椭圆形柱体计算了应力函数 ψ 值,和解析解进行了比较。本文进一步将变截面圆轴和任意形等截面柱体的方程写成了共同表达形式,并给出了这两类轴共同的通用计算机程序的实现途径。

符 号 表

$B_{k-1,i}^{k,i}$	表示 k, i 节点差分方程中 $\psi^{k-1,i-1}$ 项系数
e_i	基底向量,亦称为协变基底向量
e^i	正交于 e_i 的基底向量,亦称逆变基底向量
g_{ij}	任意曲线坐标系中的度量张量
(q^1, q^2, q^3)	任意非正交曲线坐标
u_i, u^i	分别为协变单位向量和逆变单位向量
(y_1, y_2, y_3)	任意正交曲线坐标
θ_{ij}	任意曲线坐标 q^i 和 q^j 之间的夹角
$\tau_{zr}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$	圆柱坐标系中的剪应力分量
τ_θ, τ_z	分别为垂直于 θ 方向平面和垂直于 z 轴平面上的剪应力向量
τ_θ^i, τ_z^i	分别表示 τ_θ 和 τ_z 在 q^i 方向的逆变分量

$\Phi(x, y)$	翘曲函数
Ψ, ψ	分别为应力函数和无量纲应力函数
$\Psi_{k,i}^{(m)}$	表示叠代过程中第 k, i 节点第 m 次计算的应力函数
(ξ^1, ξ^2, ξ^3)	两类轴扭转问题方程共同表达式中的任意非正交曲线坐标

一、变截面圆轴扭转问题在任意非正交曲线坐标系中的 主要方程^[3]及涡轮轴小凹槽区应力分布

变截面圆轴在扭矩作用下以剪应力向量的散度和旋度表达的平衡和协调方程^[1]分别为

$$\nabla \cdot (r \tau_\theta) = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times (\tau_\theta / r) = 0 \quad (1.2)$$

参考文献[3]取 q^3 和 q^1 为变截面圆轴纵剖面(即 Z - R 面)上的非正交曲线坐标, q^2 为 θ 方向的坐标曲线, $\sqrt{g_{22}} = r$ 。 q^2 坐标曲线垂直于 Z - R 平面, 即垂直于 q^3 - q^1 面, 因此当 $i \neq 2$ 时, $g_{2i} = 0$ 。

$$g = g_{22} \begin{vmatrix} g_{33} & g_{31} \\ g_{13} & g_{11} \end{vmatrix} = g_{22} g_{33} g_{11} \sin^2 \beta_{31} \quad (1.3)$$

平衡方程为

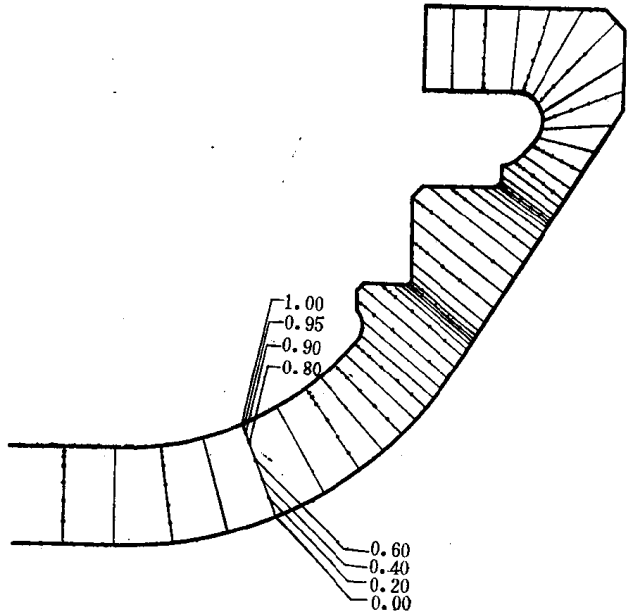


图1 涡轮轴外形和网格节点示意图

$$\frac{\partial [r^2 \sqrt{g_{11}} (\sin \beta_{31}) \tau_\theta^3]}{\partial q^3} + \frac{\partial [r^2 \sqrt{g_{33}} (\sin \beta_{31}) \tau_\theta^1]}{\partial q^1} = 0 \quad (1.4)$$

应力函数 Ψ 和应力分量的关系式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial q^1} &= r^2 \sqrt{g_{11}} (\sin \beta_{31}) \tau_\theta^3 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial q^3} &= -r^2 \sqrt{g_{33}} (\sin \beta_{31}) \tau_\theta^1 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

协调方程为

$$\frac{\partial}{\partial q^3} \left[\frac{\sqrt{g_{11}} \tau_\theta^1}{r} + \frac{\sqrt{g_{11}} (\cos \beta_{31}) \tau_\theta^3}{r} \right] - \frac{\partial}{\partial q^1} \left[\frac{\sqrt{g_{33}} \tau_\theta^3}{r} + \frac{\sqrt{g_{33}} (\cos \beta_{31}) \tau_\theta^1}{r} \right] = 0 \quad (1.6)$$

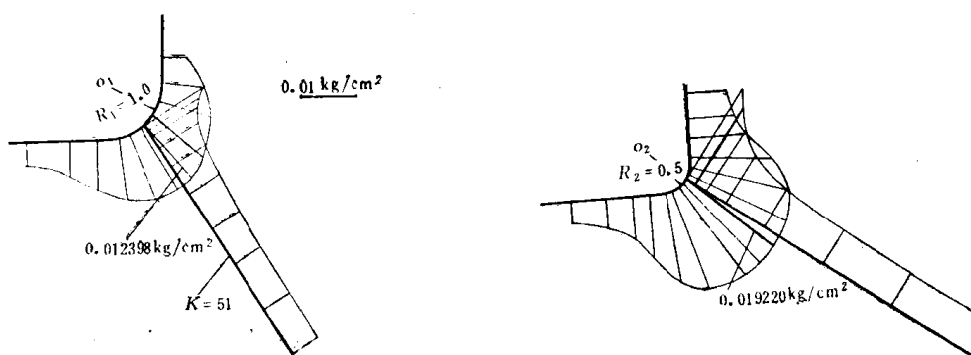
用应力函数表达的协调方程为

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial q^3)^2} - \frac{2 \cos \beta_{31}}{\sqrt{g_{33} g_{11}}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^3 \partial q^1} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial^2 \Psi}{(\partial q^1)^2} + (G_3)_a \frac{\partial \Psi}{\sqrt{g_{33}} \partial q^3} \\ + (G_1)_a \frac{\partial \Psi}{\sqrt{g_{11}} \partial q^1} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} (G_3)_a &= - \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}} r^3 \right) - \frac{\operatorname{ctg} \beta_{31}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial \beta_{31}}{\partial q^3} \\ &\quad + \frac{3 \cos \beta_{31}}{r} \frac{\partial r}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{1}{\sin \beta_{31}} \frac{\partial \beta_{31}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial q^1} \\ (G_1)_a &= - \left(\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}} \frac{1}{r^3} \right) \frac{\partial}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial q^1} \left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}} r^3 \right) - \frac{\operatorname{ctg} \beta_{31}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \beta_{31}}{\partial q^1} \\ &\quad + \frac{3 \cos \beta_{31}}{r} \frac{\partial r}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial q^3} + \frac{1}{\sin \beta_{31}} \frac{\partial \beta_{31}}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial q^3} \end{aligned} \right\} \quad (1.7a)$$

文献〔5〕计算了带两个小凹槽的航空涡轮轴（图1），给出了全轴的应力分布图和等应力函数线图以及有关数据表。本文在图2(a)和图2(b)中给出了该涡轮轴在两个小凹槽区的应力分布，说明用非正交曲线座标的新解法能解决复杂外形的工程实际问题。



(a) 第一圆角凹槽区的剪应力分布

(b) 第二圆角凹槽的剪应力分布

图2

二、任意形等截面柱体扭转问题用剪应力向量的散度和旋度表达的平衡和协调方程

本文将文献〔3〕的新解法推广到等截面柱体的扭转问题。圣维南对任意形等截面柱体（图3）在扭矩作用下的位移假定分为两个部分^{〔6〕}，截面转动的位移为

$$\left. \begin{aligned} u &= -\alpha z y \\ v &= \alpha z x \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

截面翘曲的位移 w 和翘曲函数 $\Phi(x, y)$ 的关系为

$$w = \alpha \Phi(x, y) \quad (2.2)$$

其中 α 为轴的单位长度的扭转角。平衡和协调方程分别为

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

和

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\alpha \quad (2.4)$$

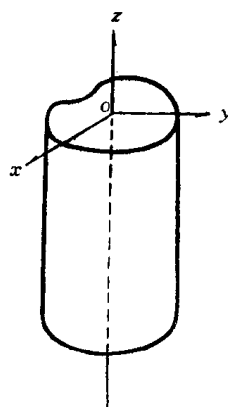


图3 任意形等截面柱体

如以 y_1, y_2 和 y_3 代表三个正交曲线座标， u_1, u_2 和 u_3 分别为沿三个曲线座标的单位

向量。取 y_3 为任意形等截面柱体的轴向。方程 (2.3) 和 (2.4) 中的 τ_{xy} 和 τ_{yz} 是在垂直于 y_3 轴平面 (即 y_1, y_2 面, 亦即柱体的横截面) 上的剪应力 τ_z 分别沿 x 和 y 方向的分量。因此 y_1, y_2 平面上的总剪应力可用向量 τ_z 表示。从向量的散度和旋度的一般方程^[1] 可以看出, 平衡方程 (2.3) 为

$$\nabla \cdot \tau_z = 0 \quad (2.5)$$

协调方程 (2.4) 为

$$(\nabla \times \tau_z) \cdot u_3 = 2G\alpha \quad (2.6)$$

利用向量的散度和旋度对不同坐标系是不变量的特点, 从方程 (2.5) 和向量的散度的一般方程得到在任意正交曲线坐标 (以下简称正交曲线坐标) 系中任意形等截面柱体在扭矩作用下的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(h_2 \tau_{z1}) + \frac{\partial}{\partial y_2}(h_1 \tau_{z2}) = 0 \quad (2.7)$$

从方程 (2.6) 和向量的旋度的一般方程得到协调方程为

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 \tau_{z2})}{\partial y_1} - \frac{\partial(h_1 \tau_{z1})}{\partial y_2} \right] = 2G\alpha \quad (2.8)$$

用应力函数 Ψ 表达的协调方程为

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \right) \right] = -2G\alpha \quad (2.9)$$

三、任意形等截面柱体扭转问题在任意非正交曲线坐标系中的平衡和协调方程

对于任意非正交曲线坐标, 散度和旋度的一般表达式为^[7]

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^i} [f^i \sqrt{g}] \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\left(\frac{\partial p_3}{\partial q^2} - \frac{\partial p_2}{\partial q^3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial p_1}{\partial q^3} - \frac{\partial p_3}{\partial q^1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial p_2}{\partial q^1} - \frac{\partial p_1}{\partial q^2} \right) \mathbf{e}_3 \right] \quad (3.2)$$

其中 $q^i (i=1, 2, 3)$ 为任意非正交曲线坐标, g 为度量张量 g_{ij} 的行列式

$$g_{ij} = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} \cos \beta_{ij}$$

$\mathbf{e}_i$ 为基底向量, 亦可称为协变基底向量。 $\mathbf{e}_i$ 的方向切于坐标曲线 q^i , 但 $\mathbf{e}_i$ 不是单位向量。 f_i 和 p^i 分别为向量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{P}$ 的逆变分量。 $f^i \mathbf{e}_i$ 和 $p^i \mathbf{e}_i$ 分别为向量 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{P}$ 沿坐标曲线 q^i 的分向量 (图 4), 即

$$\mathbf{F} = f^i \mathbf{e}_i$$

如用单位向量 $\mathbf{u}_i$, 则

$$\mathbf{F} = F^i \mathbf{u}_i, \quad f^i = F^i / \sqrt{g_{ii}}$$

$\mathbf{e}^i$ 为另一组交于 $\mathbf{e}_i$ 的基底向量, 亦可称为逆变基底向量。

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{V}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V}$$

V 为数量三重积 $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$ 。式 (3.2) 中的 p_i 为向量 $\mathbf{P}$ 的协变分量