

第二版

数理化自学丛书

代数

第三册

余元希编

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

第二版

代 数

第三册

余元希 编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书代数第三册，内容包括集合的初步知识，不等式，函数，指数和对数，数列，数学归纳法等九章。书中有详细的说明和分析，并附有大量例题和习题、复习题、测验题，供练习巩固之用。

本书供学完本丛书代数一、二册的青年工人、在职干部、知识青年自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

数理化自学丛书

第 二 版

代 数

第 三 册

余元希 编

数理化自学丛书编委会审定

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张14.5 字数385,000

1963年12月第1版

1982年11月第2版 1982年11月第9次印刷

印数: 588,001—800,500

统一书号: 13119·544 定价: (科二) 1.00 元

第二版出版说明

《数理化自学丛书》第二版是在第一版的基础上编写而成的。考虑到我社已出版大学数、理、化自学丛书，中学数学中的微积分内容没有另编分册。第二版仍包括《代数》四册、《平面几何》两册、《平面三角》、《立体几何》、《平面解析几何》、《物理》四册和《化学》四册，共十七册。

由黄丹蘧、杨荣祥、余元希、杨逢挺、桂君协等同志主编的第一版，自1963年陆续出版后，受到广大读者的欢迎。特别是1977年重排、重印以来，受到社会各方面极为广泛的关注，在广大读者中有了相当的影响。许多在职职工、农村青年和在校学生，自学了这套书以后，数理化知识水平有了一定的提高。

第二版由杨荣祥、余元希、束世杰、季文德等同志主编，数理化自学丛书编委会审定。它保留了第一版在编写上“详尽在先、概括在后、通俗到底”和“便于自学、无师自通”的特色，仍是一套与现行中学课本并行的自学读物。第二版仍从读者的实际情况出发，按传统的教学体系编写。但这次参照新的试行教学大纲的要求，与第一版相比，数学各分册的编写内容作了适当的增删和调整，基础知识和运算技能的训练有了进一步加强；物理各分册在内容的取舍、习题的更新、插图的选配、实验的描述等方面均有较大的改进；化学各分册还增加了反映现代科学技术水平的基础理论知识，在理论和实践相结合的原则下，内容和体系均有新的特色。此外，各册的例题和习题选配得力求恰当、合理，知识

论述力求通俗、严密;并按章增加了测验题.在各册编者的话中,还有供读者自学时参考的指导性意见.

自学要有成就,必须刻苦勤奋、踏实认真、持之以恒、知难而进.刻苦自学、学有成就者不乏其人,愿广大读者努力学好.

《数理化自学丛书》出版以来,全国各地的读者给以热情的鼓励和有力的支持,特在此表示衷心感谢.

上海科学技术出版社

编 者 的 话

本书是《数理化自学丛书》中的代数第三册，内容主要是对一些常见的初等函数(不包括三角函数和反三角函数)作系统的研究，并把数列作为一种特殊的函数，引进了关于数列、数列极限的知识。由于研究函数的需要，在引进函数概念之前，系统地研究了各种代数不等式的解法以及不等式的证明，所以在内容安排与处理方法上与全日制中学数学课本不尽相同，但是具有初中二年级水平以上的读者，自学本书将不感到困难。

本书第二版在修改中，除了保持了第一版原有的一些特点以外，许多地方都有较大的变动，主要是：

1. 在中学数学教学改革中，由于集合这一概念已渗透到中学数学教材中，因此本书在开头就介绍了关于集合的初步知识，并把引进的一些术语、符号在以后各章中加以应用。

2. 对于函数这一概念，本书中仍采用“ y 是 x 的函数”这一习惯上使用的提法，但是在讲有理数指数的幂函数之前，也对这一概念应用集合的观点作了阐述。

3. 在第一版中“常用对数”是安排在学过“指数函数和对数函数”之后才引进的，现在把它提到了研究这两种函数之前。这样处理，目的是使之与现行中学数学课本比较接近。

4. 考虑到结合数列来学习数学归纳法，读者比较容易接受，因此把原来安排在代数第四册里的这一部分内容，移到了本书中。

5. 在不等式、有理数指数的幂函数、数列等各章中都

增加了一些新的内容。

6. 把各章复习题、总复习题分成了 A、B 两组，并增加了各章的测验题和总测验题，所以在习题的数量上比过去有所增加。

读者自学本书，除了可以按照全书的安排顺序以外，也可根据实际情况作一些调整。例如在学习了第一章集合的初步知识以及第二章中一元一次不等式组的解法之后，紧接着就可学习第三章、第四章、第六章；书中有些打有*号的内容，可暂时不学。书中所附的习题也可选做其中的一部分。

在这次修改中，本丛书编委杨荣祥、赵宪初同志曾提了不少有益的意见，王抒同志通读了全书，并代我核验了全部习题的答案，这里谨向他们表示衷心的感谢。在修改中，编者虽然作了一定的努力，但是限于水平，难免还存有不少缺点甚至错误，希望读者给以指正。

编 者

1981年3月

目 录

第二版出版说明	i
编者的话	iii
1. 集合的初步知识	1
§ 1.1 集合的意义和表示法	1
§ 1.2 有限集合、无限集合、空集合	5
§ 1.3 子集、真子集、集合的相等	7
§ 1.4 交集、并集	11
§ 1.5 全集、补集	14
本章提要	18
复习题一 A	19
复习题一 B	20
第一章测验题	21
2. 不等式	22
§ 2.1 不等式的概念	22
§ 2.2 不等式的基本性质	27
§ 2.3 一元不等式的解和解集	30
§ 2.4 一元一次不等式组	33
§ 2.5 区间	42
§ 2.6 一元二次不等式	45
*§ 2.7 一元二次不等式组	54
*§ 2.8 一元高次不等式	56
§ 2.9 一元分式不等式	59
§ 2.10 不等式的其他一些性质	64
§ 2.11 一元无理不等式	72
§ 2.12 不等式的证明	75
*§ 2.13 代数式的最大值和最小值	82
§ 2.14 含有绝对值的不等式	87

本章提要	97
复习题二 A	102
复习题二 B	104
第二章测验题	105
 3. 函数的初步知识	107
§ 3.1 常量和变量	107
§ 3.2 函数	110
§ 3.3 平面上的直角坐标系	118
§ 3.4 函数关系的表示法	124
§ 3.5 正比例函数	128
§ 3.6 反比例函数	139
本章提要	144
复习题三 A	146
复习题三 B	148
第三章测验题	149
 4. 一次函数和二次函数	150
§ 4.1 一次函数的图象和性质	150
§ 4.2 根据已知条件确定一次函数	157
§ 4.3 二元一次方程的图象	159
§ 4.4 二次函数的图象和性质	167
§ 4.5 二次函数图象的作法	176
§ 4.6 根据已知条件确定二次函数	179
§ 4.7 二次函数的极值	182
§ 4.8 二次函数图象的应用	189
本章提要	193
复习题四 A	195
复习题四 B	198
第四章测验题	200
 5. 有理数指数的幂函数	202
§ 5.1 对应和函数	202

§ 5.2	函数的一些重要性质	212
§ 5.3	整数指数的幂函数、有理函数	219
§ 5.4	分数指数的幂函数、无理函数	224
§ 5.5	反函数	230
*§ 5.6	单值函数和多值函数	237
	本章提要	240
	复习题五 A	243
	复习题五 B	245
	第五章测验题	246
6.	指数和对数	247
§ 6.1	幂的概念的扩展	247
§ 6.2	对数	251
§ 6.3	关于对数的定理	255
§ 6.4	常用对数	261
§ 6.5	对数表	267
§ 6.6	常用对数的求法	270
§ 6.7	反对数表	278
§ 6.8	利用对数进行计算	280
§ 6.9	对数的换底公式	283
	本章提要	287
	复习题六 A	288
	复习题六 B	291
	第六章测验题	292
7.	指数函数和对数函数	293
§ 7.1	指数函数	293
§ 7.2	对数函数	304
§ 7.3	指数方程	310
§ 7.4	对数方程	315
*§ 7.5	指数方程和对数方程的图象解法	320
*§ 7.6	指数和对数方程组	322
§ 7.7	指数和对数不等式	325

本章提要	328
复习题七 A	329
复习题七 B	331
第七章测验题	332
 8. 数列、数学归纳法.....	333
§ 8.1 数列	333
§ 8.2 等差数列	342
§ 8.3 等比数列	351
§ 8.4 等差中项和等比中项	360
§ 8.5 数学归纳法	366
§ 8.6 数列前 n 项的和	379
本章提要	386
复习题八 A	388
复习题八 B	390
第八章测验题	391
 9. *数列的极限	393
§ 9.1 数列极限的意义	393
§ 9.2 关于数列极限的一些定理	401
§ 9.3 无穷递缩等比数列	405
§ 9.4 化循环小数为分数	409
§ 9.5 无穷数列各项的和	413
本章提要	414
复习题九 A	416
复习题九 B	418
第九章测验题	419
总复习题 A	420
总复习题 B	426
总测验题	431
习题答案	433

1

集合的初步知识

集合是数学里一个重要的基本概念。这一章里,我们将学习集合的一些初步知识,包括集合的意义,集合的表示法,以及集合的一些常用术语和符号,这些都是学习下面各章内容的基础。

§1.1 集合的意义和表示法

1. 集合的意义

什么叫做集合?粗略地来回答,所谓“集合”,也就是我们通常所说的“全体”或者“整体”。例如:

- (1) 右手掌上五个手指:大拇指、食指、中指、无名指和小指;
- (2) 五个英文元音字母: a, e, i, o, u ;
- (3) 车间里所有的工人;
- (4) 所有的自然数: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$;
- (5) 和线段 AB 的两个端点等距离的所有的点;
- (6) 一切大小不同的等边三角形

等等;当我们分别把它们看成是一个整体来考察时,我们就说这些对象(手指、字母、工人、数、点、图形)分别组成了一个集合,并把它们分别叫做

- (1) 右手掌上手指的集合;
- (2) 英文元音字母的集合;
- (3) 车间里工人的集合;

(4) 自然数的集合;

(5) 和线段 AB 的两个端点等距离的点的集合;

(6) 等边三角形的集合.

在每个集合里的各个对象, 叫做组成这个集合的元素.

一般地说: 当我们把具有某种共同属性的对象看成是一个整体来考察, 就说这些对象组成了一个集合, 集合里的各个对象叫做集合中的元素.

有时, 我们也把集合简单地叫做集. 例如, 由一切自然数组成的集合, 简称自然数集. 自然数 $1, 2, 3, \dots$ 都是自然数集中的元素.

当我们一般地研究某一个集合时, 常用大写英文字母 $A, B, \dots$ 表示集合, 小写英文字母 $a, b, \dots$ 表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素, 就说: “ a 属于 A ”, 并把它表示为

$$a \in A.$$

如果 b 不是集合 A 中的元素, 就说: “ b 不属于 A ”, 并把它表示为

$$b \notin A \text{ (或 } b \bar{\in} A).$$

这里符号 $\in$ 读做“属于”, 符号 $\notin$ (或 $\bar{\in}$) 读做“不属于”.

例如, 用符号 N 表示自然数集, 那末

$$3 \in N, \quad \frac{1}{3} \notin N.$$

应该注意: 数学里所称的集合, 它的元素必须是确定的. 也就是说, 只有当我们能够判断出任何考察的对象是不是这个集合中的元素时, 才能说确定了一个集合. 例如, 我们能够判断出一个数是自然数或者不是自然数, 所以我们可以说一切自然数组成了自然数集; 但是我们无法判断出怎样的数是大数或者不是大数, 所以我们就不能说所有

的大数组成了“大数的集合”。

2. 集合的表示法

对于一个具体的集合,常用的表示法有两种:

(1) 列举法. 把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内, 用来表示集合的方法叫做列举法. 例如:

1° 英文字母中元音字母的集合, 可以记做

$$\{a, e, i, o, u\};$$

2° 比 10 小的质数的集合, 可以记做 $\{2, 3, 5, 7\}$;

3° 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的根的集合, 可以记做 $\{1, -1\}$.

当集合里的元素很多时, 只要我们能够判断出它指的是什么, 也可只写出其中的几个元素, 而把其它的元素用省略号来代替. 例如:

比 100 小的自然数的集合, 可以记作 $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$;

自然数的集合可以记做 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

应用列举法来表示集合时, 要注意两点:

1° 集合里元素出现的先后顺序是不考虑的, 只要元素完全相同, 就认为是同一个集合. 例如 $\{1, -1\}$ 和 $\{-1, 1\}$ 表示同一个集合.

2° 一个元素在集合里不能重复出现.

(2) 描述法. 表示一个集合, 也常常采用把集合中元素的公共属性或约束条件在大括号里写出的方法, 这种方法叫做描述法. 例如:

1° 由所有等边三角形组成的集合, 可以表示为

$$\{\text{等边三角形}\};$$

2° 由所有比 10 小的质数组成的集合 $\{2, 3, 5, 7\}$, 可以表示为

$$\{\text{比 10 小的质数}\};$$

3° 一切正数组成的集合, 可以表示为

$$\{x|x>0\}. \textcircled{1}$$

在这一表示法中,竖线前面的 x 表示这个集合中的元素,后面那个不等式 $x>0$,就表示这种元素所受到的约束条件.

例 1 把下面这两个集合,分别用列举法表示出来:

(1) {20 以内的正偶数};

(2) $\{x|x^2-3x+1=0\}$.

[解] (1) 这个集合就是: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18}.

(2) 因为方程 $x^2-3x+1=0$ 有两个根 $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,

所以这个集合就是 $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

例 2 如果用字母 A 表示由方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x-y=1 \end{cases}$$

的解所组成的集合

$$\{(x, y) | x^2+y^2=25 \text{ 且 } x-y=1\},$$

判断下列各数对是不是属于这个集合,用符号 $\in$ 或者 $\notin$ 表示出来.

(1) (4, 3);

(2) (3, 4);

(3) (-4, -3);

(4) (-3, -4).

[解] 解这个方程组,得到它有两个解:

$$\begin{cases} x=4, \\ y=3 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x=-3, \\ y=-4. \end{cases}$$

所以

(1) $(4, 3) \in A$;

(2) $(3, 4) \notin A$;

(3) $(-4, -3) \notin A$;

(4) $(-3, -4) \in A$.

① 有的书上,也把它写成 $\{x: x>0\}$.

习 题

1.1

1. 用列举法写出由下列各题中的事物所组成的集合:
 - (1) 比 20 小的质数;
 - (2) 绝对值小于 10 的奇数;
 - (3) 16 和 24 的公约数;
 - (4) 540 的质因数;
 - (5) 方程 $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ 的根;
 - (6) 多项式 $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 的一次因式.
2. 写出下面各集合中的元素:
 - (1) $\{x | -3 < x < 2, \text{且 } x \text{ 是整数}\}$;
 - (2) $\{x | |x| \leq 2, \text{且 } x \text{ 是整数}\}$.
3. 设字母 N 表示自然数集, 在下面的____处填上符号 $\in$ 或 $\notin$:
 - (1) 0 ____ N ;
 - (2) -1 ____ N ;
 - (3) 如果 $a \in N, b \in N$, 那末 $a+b$ ____ N ;
 - (4) 如果 $a \in N, b \in N$, 那末 $a \cdot b$ ____ N .
4. 用两种不同方法, 表示出下列各方程的解的集合:
 - (1) $3x^2 - 4x + 1 = 0$;
 - (2) $x^3 - 2x - 1 = 0$.

§1.2 有限集合、无限集合、空集合

1. 有限集合和无限集合

从 §1.1 所举的那些集合的例子中, 可以看到有些集合只含有有限个元素. 例如 {比 10 小的质数} 中只含有 4 个元素 2、3、5、7. 而有些集合却有无限多个元素. 例如, 因为自然数可以从 1 开始无限止地延续下去, 在自然数集 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 里就含有无限多个元素. 为了区别这两类不同性质的集合, 我们把只含有有限多个元素的集合叫做有限集合 (简称有限集), 否则就叫做无限集合 (简称无限集).

例 1 判断下面这些集合, 哪些是有限集, 哪些是无限集:

- (1) $\{x | x - 3 > 2\}$;
- (2) $\{12, 16 \text{ 的公约数}\}$;
- (3) $\{12, 16 \text{ 的公倍数}\}$.

[解] (1) 由 $x-3>2$ 可知 $x>5$, 这个集合是由一切比 5 大的实数组成的, 它是一个无限集.

(2) 12, 16 的公约数只有 1, 2, 4 等 3 个, 这个集合就是 $\{1, 2, 4\}$, 它是一个有限集.

(3) 12, 16 的最小公倍数是 48, 一切能被 48 整除的自然数都是这个集合中的元素, 所以它是一个无限集.

2. 单元素集合和空集合

现在我们来考察下面这两个集合:

(1) $\{x|x-3=0\}$; (2) $\{x|x^2+1=0\}$.

在(1)中, 因为方程 $x-3=0$ 只有一个根 $x=3$, 所以这个集合中只含有一个元素 3. 象这类只含有一个元素的有限集, 叫做单元素集合. 一般地, 以 a 为元素的单元素集合, 可以记做 $\{a\}$.

应该注意 a 与 $\{a\}$ 的意义是不同的. a 表示元素, 而 $\{a\}$ 表示以 a 为元素的集合, 它们间的关系是

$$a \in \{a\}.$$

在(2)中, 因为在实数范围里, 方程 $x^2+1=0$ 是无解的, 也就是说, 没有一个实数 x , 能够满足条件 $x^2+1=0$, 所以在 $\{x|x^2+1=0\}$ 里, 实际上并不包含任何元素. 为了讲法上的方便, 我们也把它看做是一个集合. 象这种不含有任何元素的集合, 叫做空集合(简称空集). 空集一般可用符号 $\emptyset$ 来表示. 与之区别, 我们把至少含有一个元素的集合, 叫做非空集合(或非空集).

例 2 说明符号 0, $\{0\}$, $\emptyset$ 各有什么意义. 并用符号 $\in$ 或者 $\notin$ 表示出 0 与 $\{0\}$ 以及 0 与 $\emptyset$ 间的关系.

[解] 0 表示一个元素, $\{0\}$ 表示以 0 为元素的单元素集合, $\emptyset$ 表示不含有任何元素的空集.

$$0 \in \{0\}, \quad 0 \notin \emptyset.$$