GAO DENG

高等师专教材

主编　吴顺唐

离散数学

SHI ZHUAN
JIAOCAI

高等师范专科学校教材

离散数学

主　　审：周伯壎
主　　编：吴顺唐
副 主 编：田正平
编写人员：田正平　孙智宏
李为善　吴顺唐
钱国华

华东师范大学出版社

封面设计　高　山

离　散　数　学

主编　吴顺唐

华东师范大学出版社出版发行
（上海中山北路 3663 号　邮政编码 200062）
新华书店上海发行所经销
南京理工大学激光照排公司照排
华东师范大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 11.5　字数 288 千字
1997 年 12 月第 1 版　1997 年 12 月第 1 次印刷
印数 001—5 000 本

ISBN7—5617—1769—5/O・065
定价　11.00 元

出版说明

1986年,我社受国家教委有关部门的委托,根据国家教委师范司制订的《二年制师范专科学校八个专业教学计划》的要求,与全国各省、市、自治区教委合作,共同组织编写了全国高等师范专科学校教材20余种;并与华东六省教委密切协作,编写了能反映华东地区师专教学和科研水平的、适应经济建设较为发达地区的师专教学需要的教材40余种,师专第一次拥有了比较符合自己培养规格、规律和教学要求而自成系统的教材.实践证明,师专教材建设对于提高师专教学水平,保证师专教学质量起到了重要作用.

近几年来,在邓小平同志建设有中国特色社会主义理论的指引下,我国的教育事业取得了很大发展.国家教委根据《中国教育改革发展纲要》的要求,针对高等师范专科学校的教育特点,颁发了《高等师范专科学校二、三年制教学方案》,进一步明确了高等师范教育面向21世纪的发展目标和战略任务,以及教学内容和教学结构的改革要求.

自出版第一本师专教材以来,我社多年来分阶段地对师专教材的使用情况进行了跟踪分析,又于1995年开展了较为系统的全面调查.调查中,教师普遍反映,现有师专教材尚不同程度存在着与当前师专教学实际相脱节的现象;对各学科中的新发现、新理论、新成果,未能加以必要的反映,已跟不上当前社会、经济、科技等发展的新形势.考虑到师专从二年制向三年制发展的现状和趋势,我社于1996年初与华东六省教委有关部门一起,邀集全国48所师专代表专门研讨了师专教材建设问题,随即开展了部分教材的修订和新编工作.

师专教材建设并不是一个孤立的系统，它必须服务于师范教育的总体规划，它已经历了从"无"到"有"的过程，并将逐步实现从"有"到"优"的目标.我们相信，通过各方面的努力，修订和新编的师专教材将充分体现基础与能力相结合，理论与实践相结合，当前与未来相结合的特色，日臻完善和成熟.

这次编写和修订工作得到了华东六省教委的大力支持，我们谨在此深表谢忱，并向为师专教材建设付出辛勤劳动的各地师专领导和所有参加编写、修订和审稿的专家、学者等致以衷心的谢意.

华东师范大学出版社

1997年3月

序　　言

离散数学是数学中涉及面非常广泛的一门学科，凡不考虑拓扑结构的数学系统都属于离散数学所研究的范围.特别，近几十年来，由于电脑的迅速发展与广泛应用，大量的应用到数学的实际问题往往都首先化成离散数学的问题再由电脑处理解决.再者，离散数学的逻辑思维方法不仅在自然科学，而且在社会科学中也是有用的.

师范院校数学专业的培养目标是中学数学教师，我国现阶段大部分中学生在中学毕业以后都将走向社会，他们中有不少人将或多或少地会用到离散数学，特别是组合数学中的一些理论和方法.因此，中学老师学习一些离散数学知识是十分必要的.

吴顺唐教授等编写的《离散数学》是一本很好的教科书.这本书包含了离散数学中的五个主要组成部分.第一章讨论了集合的概念及其基本性质、等势性与基数等理论.这部分本来是不易处理的，但作者却写得非常和谐，顺理成章.第二章主要讨论了组合数学的基本原理与基本公式.这一部分，许多学生都是熟悉的，不熟悉的部分也是容易理解的.第三章专门介绍了几种最基本的代数结构与重要的同态理论.第四章所讨论的数理逻辑的一些基础理论也许是最难学习的，但作者也写得深入浅出，通俗易懂.第五章讨论了图论中的一些最基本的问题，使读者对图论这个理论有一个初步的了解.

总之，作为一本师范院校的教科书，本书取材适当，论证严谨，文理通顺，是非常适用的.再者，每章末尾都配有习题，有的习题是启发性的，既有利于学生巩固已学到的课文，也有利于训练进一步

深入与研究的能力.不但如此,本书也可以作为自学之用的课本.

因此,本人乐于推荐本书出版,并作此序。

周伯壎

1997年元月于南京大学数学系

目　　录

第一章 集合论基础

在现代数学的任一分支中，都要用到集合的概念. 目前，集合的基本理论已渗透到各个学科领域，成为现代科学技术的一个基本工具. 本章将介绍集合的基本概念，集合的运算，关系与映射，集合的基数等.

§1 集合的概念

1.1 集合的定义

集合是数学中最基本的概念，它像几何中的点、线等概念一样，很难用更原始的词汇给予严谨的定义，除非使用公理化的方法. 我们只满足于下面的说法：将具有确定内容或适合一定条件的事物全体看作一个整体，那么这个整体便称为**集合**（或简称**集**），其中的事物称为集合的**元素**. 例如，某中学的学生，小于 5 的自然数，平面上的三角形，某台计算机的所有内存单元等，都是集合.

对于一个给定的集合，它的元素必须是明确的. 所以像"比较大的实数"，"高个子学生"等，就不能构成集合. 此外，我们还要求集合中的元素是互不相同，不分先后次序的.

通常我们用大写英文字母 A、B 等表示集合，用小写英文字母 a、b 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，便称 **a 属于 A**，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，便称 **a 不属于 A**，记作 $a \notin A$. 设 A、B 为两个集合，如果它们有完全相同的元素，便认

为是相等的，并记为 $A = B$.

为了表示集合，有时可用列举法，即将集合中的所有元素一一列出，写在同一括号内. 例如，如果 A 为小于 5 的自然数所成的集，那么可将 A 表示成

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

但有些集，例如区间 $I = [0, 1]$，平面上的所有三角形等，就无法用列举法表示. 此时，可用描述法：设 E 是一个给定的集合，P 是给定的性质，那么 E 中具有性质 P 的事物全体构成集合，记为 $\{x \mid P(x), x \in E\}$. 例如，

$$\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \text{ 是实数}\},$$

$$\{x \mid x \text{ 是中国的一个省}\},$$

都是集合. 此外，我们还可以只写出集合的一部分元素，其余元素用省略号来代替的方法表示集合，例如

$$\{1, 2, \cdots, 100\}, \{1, 2, 3, \cdots\}$$

就分别表示 1～100 之间的整数和全体自然数集.

在习惯上，自然数集、整数集、有理数集和实数集分别用字母 $\mathscr{N}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Q}$ 和 $\mathscr{R}$ 表示.

不含任何元素的集称为**空集**，空集用 $\varnothing$ 表示. 只含一个元素的集称为**单元集**. 以集合为元素的集称为**集族**. 例如，

$$\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathscr{R}\} \text{ 和 } \{x \mid x \text{ 是高度为 1 万米的山峰}\}$$

是空集.

$$\{x \mid x \text{ 是某大学的学生社团}\}$$

是集族.

$$\{a\} \quad \text{和} \quad \{x \mid x - 1 = 0, x \in \mathscr{R}\}$$

是单元集. 注意, a 和 $\{a\}$ 是两个不同的概念, $\{a\}$ 是集合, a 只是这个集合的元素. 因此, $a \neq \{a\}$, 但 $a \in \{a\}$.

1.2 子集

定义 1.1 设 A、B 为两个集合. 如果 A 的每个元素都属于 B, 就称 A 是 B 的一个**子集**或 B **包含** A, 记为

$$A \subseteq B \quad \text{或} \quad B \supseteq A.$$

如果 A 是 B 的子集, 而且存在元素 $b \in B$, $b \notin A$, 就称 A 是 B 的**真子集**, 记为

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A.$$

$A \nsubseteq B$ 是指存在 $x \in A$, 但 $x \notin B$.

例 1 $\mathscr{N} \subset \mathscr{Z} \subset \mathscr{Q} \subset \mathscr{R}$.

集合的包含关系 $\subseteq$ 有以下性质:

定理 1.1 对任何集合 A、B、C 有

1) $A \subseteq A$;

2) $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$;

3) $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

定理 1.2 空集是任一集合的子集, 空集是唯一的.

证 设 S 为任一集合. 如果 $\varnothing \nsubseteq S$, 则必存在元素 x, $x \in \varnothing$, 但 $x \notin S$, 这与 $\varnothing$ 不含任何元素相矛盾, 故 $\varnothing \subseteq S$.

设 $\varnothing_1$ 是另一空集, 则有 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing$ 和 $\varnothing \subseteq \varnothing_1$, 由定理 1.1, $\varnothing_1 = \varnothing$. 所以空集是唯一的. □

§2 集合的运算

2.1 集合的四种运算

设 A、B 为给定的集合，那么可以通过建立一些运算关系，构造出新的集合来.

定义 2.1 设 A、B 为给定集合，那么既属于 A 又属于 B 的元素所成的集称为 A 和 B 的**交**，记为 $A \cap B$.

定义 2.2 设 A、B 为给定集合，那么或属于 A 或属于 B 的元素所成的集称为 A 和 B 的**和**，记为 $A \cup B$.

定义 2.3 设 A、B 为给定集合，那么属于 A 而不属于 B 的元素所成的集，称为集合 A 和 B 的**差**，记为 $A - B$.

例 1 设 $A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，则

$$A \cap B = \{2, 4\},$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\},$$

$$A - B = \{6\}.$$

在许多场合，我们所考虑的集都是某个集合 E 的子集，这时，E 就称为**全集**.

定义 2.4 设 E 为全集，$A \subseteq E$. 则 E 中不属于 A 的元素所成的集，称为 A 的**余集**，记为 $C(A)$（或 $\overline{A}$）.

例 2 设 $E = \{1, 2, \cdots, 10\}$为全集，$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$，那么 $C(A) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

集合 A 与 B 的交、和、差、余可用图 1.1 形象地表示出来. 图中的长方形表示全集 E，画斜线的区域表示图下面所指出的相应集合. 集合的这种示意图称为**韦恩(Venn)图**.

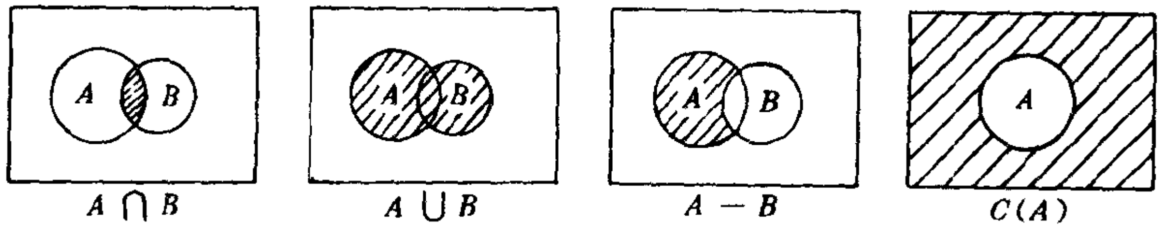

图 1.1

2.2　集合运算的基本性质

交、和、差、余是集合的四种最基本的运算，它们有以下简单性质：

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.　　　　（幂等律）
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.　　　　（交换律）
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
   （等式左右均可写成 $A \cup B \cup C$）;
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
   （等式左右均可写成 $A \cap B \cap C$）.　　　　（结合律）
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.　　　　（分配律）
5. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. $A \cup E = E$, $A \cap E = A$.
7. $C(C(A)) = A$, $C(\varnothing) = E$, $C(E) = \varnothing$.
8. $C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$;
   $C(A \cup B) = C(A) \cap C(B)$.

利用韦恩图，可以验证这些等式的正确性，但也可用定理 1 的(2)加以严格证明. 作为例子，下面证明性质 8 的第一式.

例 3　证明：$C(A \cap B) = C(A) \cup C(B)$.

证　任取 $x \in C(A \cap B)$，则 $x \notin A \cap B$，所以 $x \notin A$ 或 $x \notin B$，即 $x \in C(A)$ 或 $x \in C(B)$，于是 $x \in C(A) \cup C(B)$. 因 x 是

任意的，所以

$$C(A \cap B) \subseteq C(A) \cup C(B).$$

又，若 $x \in C(A) \cup C(B)$，则 $x \in C(A)$ 或$C(B)$，即$x \notin A$或 $x \notin B$，所以$x \notin A \cap B$，于是$x \in C(A \cap B)$，得

$$C(A) \cup C(B) \subseteq C(A \cap B).$$

由定理 1

$$C(A \cap B) = C(A) \cup C(B). \qquad \square$$

性质 8 称为**德·摩根(De Morgan)定律**. 这是一组关于交、和的对偶公式. 利用它，可以将关于交(和)的性质转变为和(交)的性质.

2.3 任意多个集合的交与和

两个集合的交与和，可以推广到任意多个集合的情形. 设有集族 $S = \{A_\alpha,\ \alpha \in I\}$，其中 I 为指标集，α 取遍 I.

定义 2.5 由至少属于某个 $A_\alpha(\alpha \in I)$的元素所成的集，称为集族$\{A_\alpha\}$当 α 取遍 I 时的**和**，记为$\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

定义 2.6 由属于每个 $A_\alpha(\alpha \in I)$的元素所成的集，称为集族$\{A_\alpha\}$当 α 取遍 I 时的**交**，记为$\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$.

两个集合交与和的许多性质都可推广到任意个集合的情形. 例如有：

定理 2.1 设 A、$A_\alpha(\alpha \in I)$均为集合，则

$$A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I}(A \cap A_\alpha).$$

定理 2.2(德·摩根定律) 设 A、$A_\alpha(\alpha \in I)$均为集合，则

1) $A - \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in I}(A - A_\alpha)$;

2) $A - \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I}(A - A_\alpha)$.

这些定理都可以用定理 1 加以证明.

例 4 设 $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$，$(n = 1, 2, \cdots)$. 求 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

解 因 $A_{n+1} \subset A_n (n = 1, 2, \cdots)$，所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 = [-1, 1].$$

显然 0 属于每个 A_n，所以 $0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 而对任一 $x \neq 0$，必存在充分大的 N，当 $n > N$ 时，$|x| > \frac{1}{n}$. 此时 $x \notin A_n$，并由此得到 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 这样，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}. \qquad \square$$

例 5 学校某部门到数学系调查学生体质情况，他们希望了解：

1）年龄超过 21 岁，身高超过 165cm，体重超过 55 公斤的男生；

2）年龄超过 21 岁，身高超过 165cm，体重不足 55 公斤的女生；

3）年龄不足 21 岁，身高不超过 165cm，体重超过 55 公斤的男、女生.

假定 A、B 为数学系的全体男生和女生，C、D、F 分别为数学系年龄大于 21 岁、身高超过 165cm、体重超过 55 公斤的学生. 试将该部门要了解的学生用集合 A、B、C、D、F 表示.

解 1）$C \cap D \cap F \cap A$.

2）$C \cap D \cap C(F) \cap B$ 或 $C \cap D \cap C(F) \cap C(A)$.

3）$C(C) \cap C(D) \cup F$. $\square$