翟忠信 陈知先 编

高等数学教程

（下册）

GAO DENG
SHU XUE
JIAO CHENG

兰州大学出版社

高等数学教程

下册

翟忠信 陈知先 编

兰州大学出版社

（甘）新登字第08号

高等数学教程

翟忠信　陈知先　编

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路216号　电话：8883156　邮编：730000

甘肃省静宁印刷厂印刷

开本：850×1168毫米1/32　　印张：22.375

1995年9月第1版　　1995年9月第1次印刷

字数：581千字　　印数：1—3,000

ISBN 7-311-00894-8/O·111

定价：22.40元（全二册）

下 册 目 录

第七章　空间解析几何及矢量代数初步

解析几何是用代数方法研究几何图形的一门数学学科，它不但给传统的几何学带来一套全新的研究方法，而且在其它数学学科中，使我们可以利用直观的几何形象来启发新的数学思想，说明抽象的数学概念．正如在一元函数微积分中，有关函数及其连续性等概念的解释，导数、微分和定积分概念的引入等诸多内容，都曾多次涉及到平面解析几何的知识，在我们将要学习的多元函数微分学和积分学中，类似内容的处理则要应用到空间解析几何和矢量代数的知识．此外，矢量代数也是研究空间解析几何的重要工具，我们将简单介绍其必需的内容．

§1　空间直角坐标系

一根数轴，实现了直线上的所有点和全部实数间的一一对应；两根互相垂直而交于原点的数轴，引出了平面直角坐标系，从而实现了平面上所有点和全部有序实数对之间的一一对应，正是这种点和数或数组之间的对应，奠定了解析几何的基础．现在我们要建立空间直角坐标系，以实现空间所有点和全部有序三元实数组之间的一一对应．

§1.1　坐标系的建立

过空间一点O作三条两两垂直的数轴Ox、Oy、Oz，并设O为三坐标轴的原点，这样便建立了一个空间直角坐标系，用$Oxyz$表示．点O称为坐标系的**原点**，Ox轴，Oy轴，Oz轴叫做这个坐标系的三个**坐标轴**，并分别简称为x**轴**、y**轴**、z**轴**，三坐标轴的每两

个确定一个平面，称为**坐标平面**，共有三个坐标平面，它们两两垂直，垂直于x轴的叫做yz（平）**面**，用Oyz或yOz表示；垂直于y轴的叫zx(平)**面**，用Ozx或zOx表示；垂直于z轴的叫xy(平)**面**，用Oxy或xOy表示。

通常，我们取Oxy面为水平面，且称 Ox，Oy，Oz 三个坐标轴分别为**横轴**、**纵轴**和**竖轴**（或**立轴**）。

如果Ox，Oy，Oz 三坐标轴顺序的相对位置就象令右（左）手拇、食和中指相互垂直时可能形成的相对位置一致，则称该坐标系为右（左）手系（图7.1）.

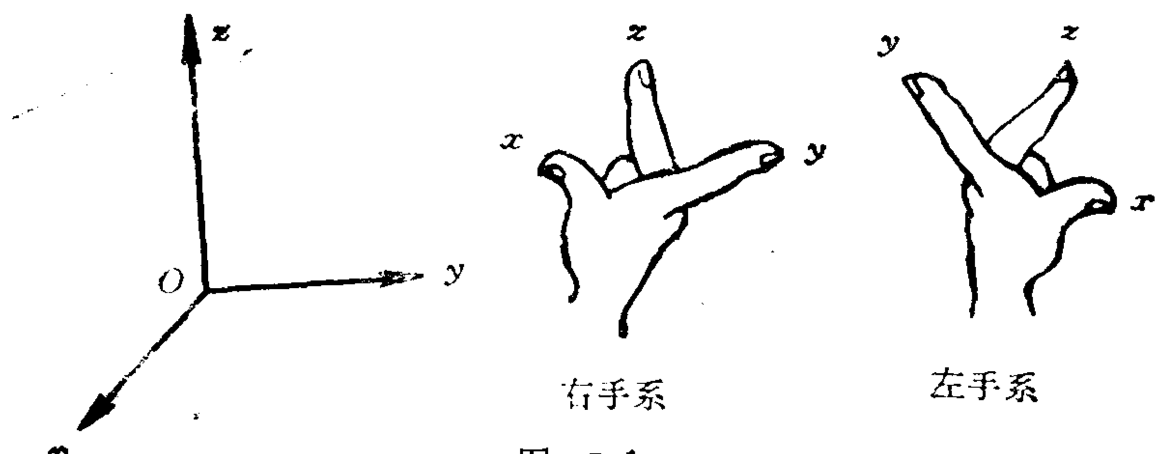


图 7.1

此外，为方便计，我们取三个坐标轴的单位彼此相等。

我们知道，规定了正向的直线叫做轴，规定了起点和终点的线段叫**有向线段**。以A为起点，B为终点的有向线段记为 $\overline{AB}$，其方向认作从A指向 B。设$\overline{AB}$是轴l上的有向线段，所谓$\overline{AB}$ 的**代数长**（**或值**）是指这样一个实数AB：

$$AB=\begin{cases}|AB| & \text{当}\overline{AB}\text{与}l\text{方向相同，}\\ 0 & \text{当}A\text{与}B\text{重合，}\\ -|AB| & \text{当}\overline{AB}\text{与}l\text{方向相反。}\end{cases}$$

其中$|AB|$是线段AB之长。

今后，如果空间坐标系的有向线段与某个坐标轴平行，则其

代数长的符号由其与这个坐标轴是否同向而定，度量单位与坐标轴的单位一致。

设M是空间一点，M在坐标轴Ox，Oy，Oz上的投影依次为A,B,C，此三点在各自坐标轴上的坐标（即$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$的代数长）顺次为实数x，y，z，则称（x,y,z）为**点M的坐标**，并依次称此三数为M的x**坐标**（**横坐标**），y**坐标**（纵坐标）和z坐标（**竖坐标**或**立坐标**），这个事实用$M(x,y,z)$表示。

通常有两种方法来得到空间一点M的坐标：

(1)过点M作三个平面，分别与三个坐标平面平行，此三平面顺次交横轴、纵轴和竖轴于A,B,C三点，则此三点便是M在上述三坐标轴上的投影（图7.2）。

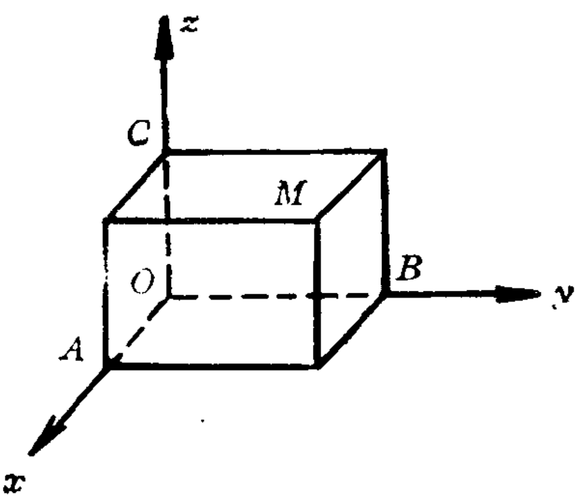


图 7.2

(2)从M向xy面作垂线设垂足为N，在xy面上自N向x轴作垂线，设垂足为A，则有向线段$\overline{OA}$，$\overline{AN}$，$\overline{NM}$的代数长即为点M的坐标：

$OA=x$，$AN=y$，$NM=z$

（图7.3）。这其实是法(1)的简化。

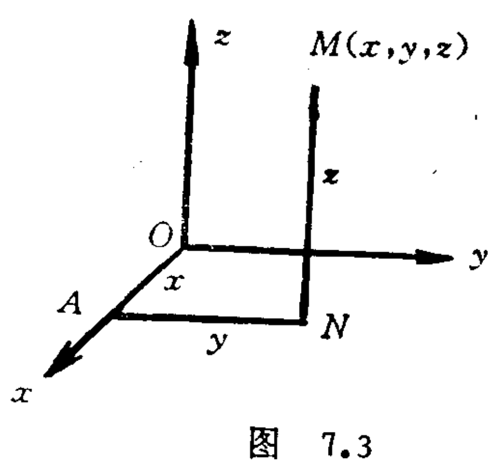


图 7.3

这样，在空间直角坐标系建立之后，空间任一点M均对应着一个“有序三数组”，它们就是M的坐标；反之，任给一有序三数组（x,y,z），则x,y,z分别在Ox，Oy，Oz轴上决定了三个点A,B,C，这三点在相应坐标轴上的坐标依次为x,y,z。过A,B,C三点依次作平行于Oyz，Ozx，Oxy

的平面，此三平面交于空间一点M，则M的坐标显然是（x,y,z）.于是我们得出结论：

空间直角坐标系建立之后，空间所有点和全部有序三数组之间建立了一宗一一对应关系。

今后，我们可直接把一个有序三数组（x,y,z）视为空间一点，该点即以此三数组为它的坐标，于是，称呼**点**（x,y,z）是允许的。

由点M与其坐标（x,y,z）的对应关系易见：$M\in Oxy \Longleftrightarrow z=0$，$M\in Oyz \Longleftrightarrow x=0$，$M\in Ozx \Longleftrightarrow y=0$，$M\in Ox \Longleftrightarrow y=z=0$，$M\in Oy \Longleftrightarrow z=x=0$，$M\in Oz \Longleftrightarrow x=y=0$.

三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分称为一个**卦限**（不含坐标面上的点），共有八个卦限，用大写罗马字母Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅷ表示，各卦限内点的坐标x,y,z的符号如下表（表7.1）.

表 7.1

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

此外，容易看到，点$M(x,y,z)$关于坐标原点$O(0,0,0)$的对称点为$(-x,-y,-z)$，关于xy面的对称点为（$x,y,-z$），关于Ox轴的对称点为($x,-y,-z$）等等.

在图7.3中，若在直线MN上任取一点M_1，易见点M_1与M的横、纵坐标均相等，而竖坐标可以有所不同，设M_1的坐标为（x_1,y_1,z_1），则差z_1-z恰为有向线段$\overline{MM_1}$之代数长MM_1（图7.4）. 一般来讲，我们可以得出论断：

当空间一点M平行于某坐标轴移动到另一点M_1时，与此坐

标轴相应的坐标有所改变，其差恰为有向线段$\overline{MM_1}$的代数长，其余二坐标不变。

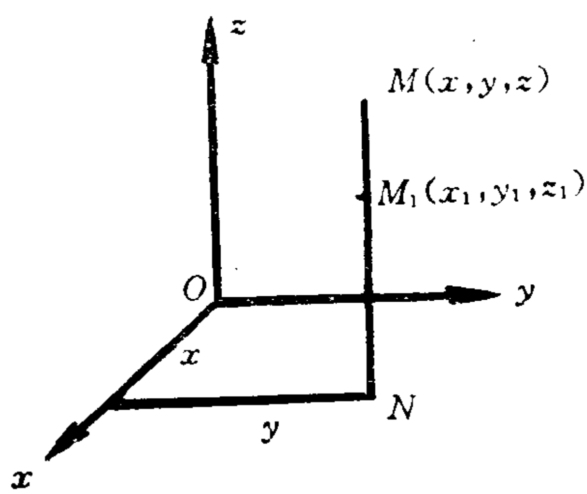


图 7.4

例1 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点，它们在xy面上的投影为N_1和N_2，作直线$N_1M_3 /\!/ M_1M_2$交直线M_2N_2于点M_3，在xy面上作直线$N_1M_4 \perp Ox$轴，M_4为垂足．在平面$M_3N_1M_4$上作$\square M_3N_1M_4M_5$，在平面OM_4M_5上作$\square OM_4M_5M_6$（图7.5）。于是由上面的论断易知诸点的坐标如下：

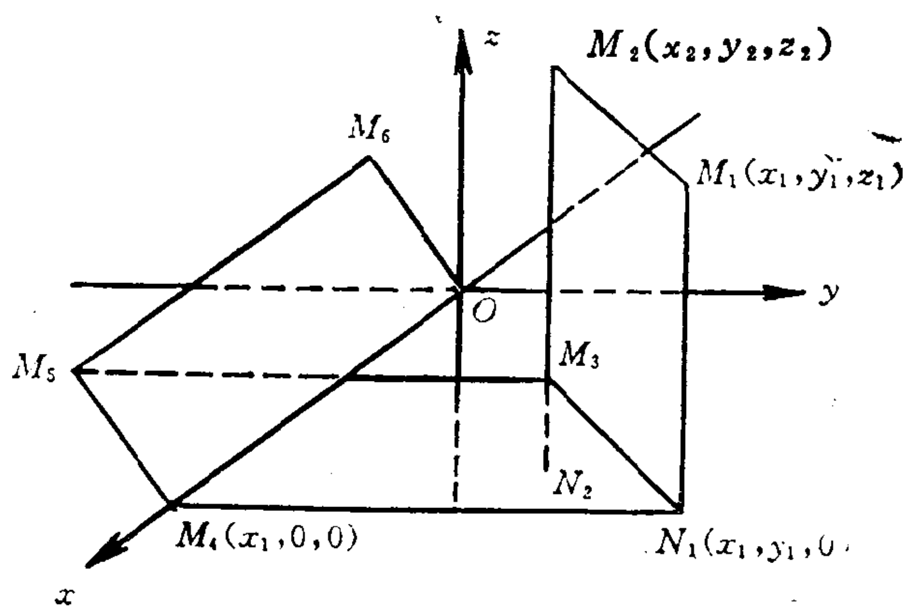


图 7.5

$N_1(x_1, y_1, 0)$，$N_2(x_2, y_2, 0)$，

$M_3(x_2, y_2, z_2-z_1)$，$M_4(x_1, 0, 0)$

$M_5(x_2, y_2-y_1, z_2-z_1)$，

$M_6(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$。

§1.2 距离公式

设$M(x,y,z)$是空间任意一点，由图7.2知点M到原点的距离是长方体的一条对角线OM的长度：

$$|OM|=\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad (1)$$

这就是说，**空间任一点到原点的距离等于这点各坐标的平方和的平方根.**

如果$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间任意二点，以$d(M_1,M_2)$表示此二点的距离，则作图如图7.5，易知线段$M_1M_2 \perp\!\!\!= N_1M_3 \perp\!\!\!= M_4M_5 \perp\!\!\!= OM_6$，故

$$d(M_1,M_2)=|M_1M_2|=|OM_6|.$$

由（1）式及例1中导出的M_6的坐标，知

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (2)$$

这个公式叫做空间两点的**距离公式**，是空间解析几何的一个最基本的公式。

例2 在Oz轴上求一点，使此点与点$A(-2,5,3)$和$B(3,2,-1)$等距离.

解 设所求点为$M(0,0,z)$. 则由$d(M,A)=d(M,B)$得

$$\sqrt{[0-(-2)]^2+(0-5)^2+(z-3)^2}$$
$$=\sqrt{(0-3)^2+(0-2)^2+[z-(-2)]^2}$$

两边平方后解得$z=3$，故所求的点为$M(0,0,3)$。

§2 矢量代数初步

矢量是数学中的基本概念之一，它在数学的许多分支及力学、物理学等其它科学领域中都有着广泛的应用，更是研究和解决空间解析几何的许多问题的有力工具，其特点是简捷直观。本

节只介绍矢量及其运算的若干基本内容.

§2.1 矢量的概念

既有大小又有方向的量称为**矢量**或**向量**，简称**矢**，如力、速度、加速度等等均为矢量.

矢量可用一端带箭头的线段表示，如图7.6，在线段AB的一端加一箭头便表示一个矢量. 约定该矢量的方向与箭头方向相同，而大小等于线段AB的长度$|AB|$，并记为$\overrightarrow{AB}$. A和B分别是矢量$\overrightarrow{AB}$的**始**（**起**）点和**终点**.

也常用一个带箭头的字母来标记一个矢量，如$\vec{A}$，$\vec{r}$，$\vec{a}$等等. 印刷中通常把字母排成黑体字而省去箭头，如**A**,**r**，**a**等等.

必须严格区别矢量和数量. 数量，也称**标量**，是一个只有大小而没有方向的量，如长度、面积、密度、功、流量等，均用一个普通字母标记，数量是数而**矢量不是数**.

矢量**a**的大小称为**a**的**模**，记为$|\mathbf{a}|$. 显然，$|\mathbf{a}|$是一个非负实数. 特别，模为零的矢量叫做**零矢量**，以**0**标记，它可以看成是始点和终点重合的矢量，而**其方向可以认为是任意的**，模为1的矢量称为**单位矢量**或**么矢**，我们以$\mathbf{a}^0$来记与非零矢量**a**方向相同的单位矢量.

设$A(a_1,a_2,a_3)$与$B(b_1,b_2,b_3)$是空间二点，则矢量$\overrightarrow{AB}$的模显然是线段AB的长，故由距离公式有

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

如果矢量**a**和**b**的模相等且方向相同（图7.6），我们称**a**与**b**相等，记为**a** = **b**. 这样，两个相等矢量的任一个均可看做是另一个在空间平移而得到的，即，相等的矢量的始点可以不同，这就是**自由矢**

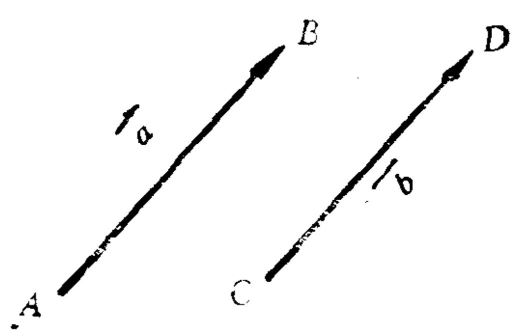


图 7.8

量的概念。特别，始点在坐标原点O而终点在M的矢量$\overrightarrow{OM}$称为点M的**径矢**或**矢径**，于是，空间任一矢量**a**均有唯一一个径矢$\overrightarrow{OM}$与之相等，这个径矢有时也称为**a**的径矢。由于一个径矢完全由其终点来决定，故空间任一矢量均可由其径矢的终点来决定，而且，为确定**a**的方向，只须确定其径矢的方向。

空间矢量的方向可以用方向角、方向余弦或方向数来确定，下面我们就非零径矢给出的定义，自然也适用于空间任意非零矢量。

定义1 非零径矢$\overrightarrow{OM}$与坐标轴Ox,Oy,Oz的正向间的夹角α,β,γ（$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$）叫做$\overrightarrow{OM}$的**方向角**；方向角的余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta,\cos\gamma$称为$\overrightarrow{OM}$的**方向余弦**；又设$k$是任一不为零的实数，$m=k\cos\alpha$，$n=k\cos\beta$，$p=k\cos\gamma$，则称$m,n,p$为$\overrightarrow{OM}$的**方向数**。

由于零矢量的方向可以看作是任意的，故其方向角、方向余弦和方向数均不确定。

与矢量**a**的模相等而方向相反的矢量称为**a**的**反矢量**，以$-$**a**标记，由定义1易知，倘**a**的方向角为α,β,γ，则$-$**a**的方向角为$\pi-\alpha$，$\pi-\beta,\pi-\gamma$，从而$-$**a**与**a**的方向余弦反号。

由定义1，可得关于方向角、方向余弦和方向数的若干推论（参看图7.7并联系图7.5）：

推论1 设$M(x,y,z)$是异于原点的空间一点，α,β,γ是径矢$\overrightarrow{OM}$的方向角，则

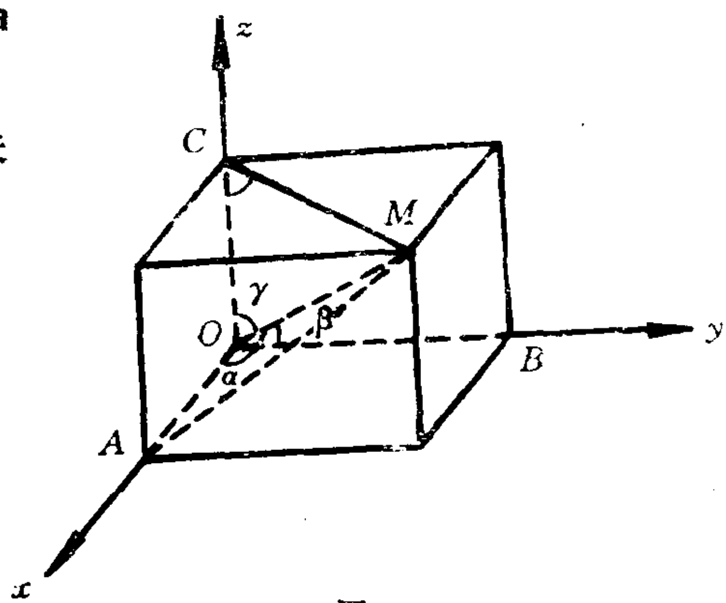


图 7.7

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

推论 2 非零径矢的终点坐标是这个矢量的方向数

推论 3 一个非零矢量的方向余弦的平方和等于1，即

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

特别，若**a**是单位矢量，则其径矢终点坐标的平方和$x^2+y^2+z^2=1$，于是又得

推论 4 单位矢量的方向余弦等于其径矢的终点坐标。

把定义1中的三个等式平方后相加并利用推论3，立得$k^2=m^2+n^2+p^2$，即$k=\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}$。再把k的值代回，并注意$k\neq0$，又得

推论 5 设m,n,p是矢量**a**的方向数，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是**a**的方向余弦，则有

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

上三式前的符号同时取正号或同时取负号。

我们也常把一个矢量的方向数m,n,p说成**与其方向余弦成比例的三个数**，记为

$$m:n:p=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma \tag{1}$$

或者等价地

$$\frac{m}{\cos\alpha}=\frac{n}{\cos\beta}=\frac{p}{\cos\gamma} \tag{2}$$

由于矢量的三个方向余弦可能有一个或两个为零，因之对上面的比例式我们作如下约定：**在（1）或（2）式中，m与$\cos\alpha$，n与$\cos\beta$，p与$\cos\gamma$或者同时为零，或者同时不为零。**例如，若$\cos\alpha$

$=0$，由定义1，$m=k\cos\alpha=0$；反之，若$m=0$，因$k\neq 0$，故 $\cos\alpha$ $=\frac{m}{k}=0$。这样约定后，由（1）或（2）所定义的方向数就与定义1完全一致了。今后，凡遇到与方向数或方向余弦有关的类似比例式，均遵从上述约定（这样的比例式在后面将要讨论的有关平面和直线的方程中，还会多次遇到），并**约定不定式$\frac{0}{0}$可等于任何实数**。

例1 设$M_1(x_1,y_1,z_1)$与$M_2(x_2,y_2,z_2)$是空间二点，求矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦。

解：设 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的径矢是 $\overrightarrow{OM}$，由§1的例1知M的坐标为$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，于是由推论1可得

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

§2.2 矢量的线性运算

矢量的线性运算指的是两个矢量的加法、减法和一个数量乘一个矢量，我们分别介绍如下。

1. 矢量的加法 设给定非零矢量**a**,**b**.以任意点O为始点作$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，再以$OA,OB$为边作▱$OACB$，则对角线矢量$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$定义为**a**与**b**之和，记作$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$（图7.8）。此外，定义

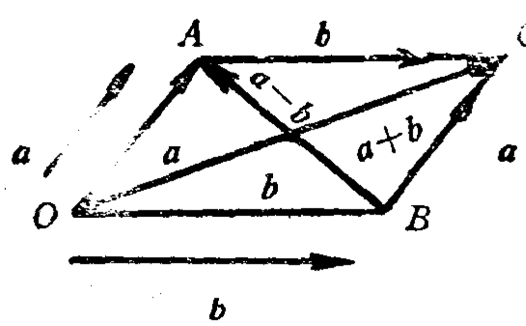


图 7.8

$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

上述求矢量和的作图法叫做**平行四边形法则**（图7.8）。如果我们只作出$\triangle OAC$（图7.9），也可得$\mathbf{a}+\mathbf{b}$，它是把矢量$\mathbf{b}$的

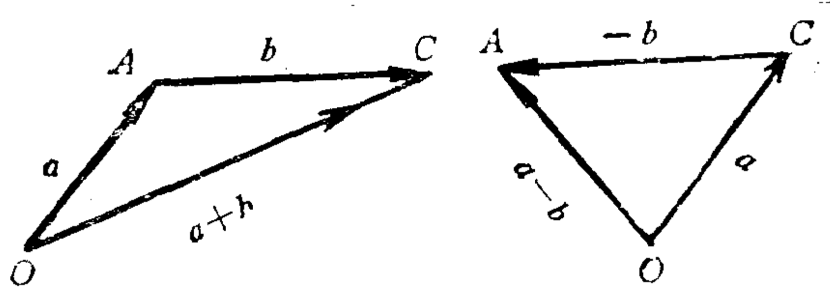


图 7.9

始点放在$\mathbf{a}$的终点，并以$\mathbf{b}$的终点为和矢量的终点，$\mathbf{a}$的始点为和矢量的始点。这种求矢量和的作图法叫**三角形法则**。如果注意到零矢量是起点和终点重合的矢量，则上述三角形法则对$\mathbf{a}$或$\mathbf{b}$为零时仍然适用。以后在讲到与矢量加法有关的命题时，我们不再对零矢量作专门的讨论。

如果$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$是三个给定的矢量，从点O依次作$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$，连$OB$，$OC$，设$\overrightarrow{OC}=\mathbf{d}$，由三角形法则易知

$$\mathbf{d}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

这种依次求三矢量和的作图法叫做**折线法**，它是三角形法则的叠用，并可推广到依次求任意有限个矢量之和的运算中去。

由求矢量和的三角形法则，知矢量的加法满足

（i）交换律：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

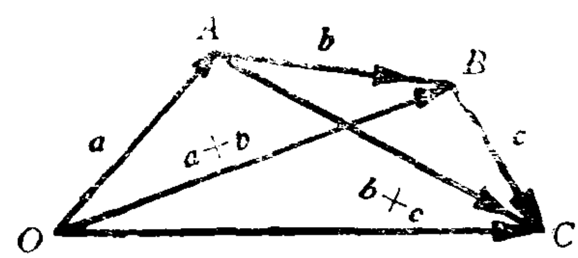
这从图7.8容易看出，因

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}.$$

（ii）结合律：$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

这可从图7.10看出，因

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$



$d=a+b+c$

图 7.10

交换律和结合律的成立，使我们可以定义**三个矢量**$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$

的和为其中任意二个矢量之和与第三个矢量相加的结果，并直接记为$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$而不再加括号。进一步地推广，可定义**任意有限个矢量的和**$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n$，具体求和的作图法可用折线法，并不计次序。

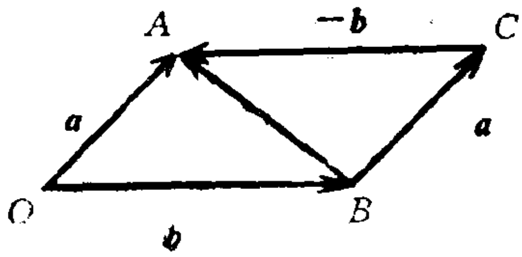


图 7.11

2．矢量的减法　我们定义**矢量a与b的差**为$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$。显然，$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$。图 7.11 给出求$\mathbf{a}-\mathbf{b}$的作图法。即从空间一点$O$ 出发作 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$。这从图7.11的$\triangle BCA$中可以看出。于是在图7.8中的$\square OABC$中，一条对角线$\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$，另一条$\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$。

3．数量乘矢量　若$\mathbf{a}$为一矢量，m为一实数，则定义$m\mathbf{a}$是一个满足下二条件的矢量$\mathbf{r}$：

（i）$|\mathbf{r}|=|m||\mathbf{a}|$；

（ii）当$m>0$时，$\mathbf{r}$的方向与$\mathbf{a}$的方向相同；$m<0$时，$\mathbf{r}$与$\mathbf{a}$方向相反。

由这个定义易得

$$m\mathbf{a}=\mathbf{0}\Longleftrightarrow m=0\text{或}\mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

而且，任意非零矢量$\mathbf{a}$均可写为$\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}^0$，或 $\mathbf{a}^0=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$。特别，若$m=-1$，则 $\mathbf{r}=(-1)\mathbf{a}$，其模与$\mathbf{a}$的模相等而方向与$\mathbf{a}$的方向相反，因之$\mathbf{r}$是$\mathbf{a}$的反矢量$-\mathbf{a}$，即 $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$。

数量乘矢量的运算满足

（ i ）结合律　$m(n\mathbf{a})=(mn)\mathbf{a}$（故可直接记为$mn\mathbf{a}$）；

（ ii ）第一分配律：$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}$；

（iii）第二分配律：$(m+n)\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a}$。

证　（i）由定义可直接证明等式两边的矢量方向相同且模相等；