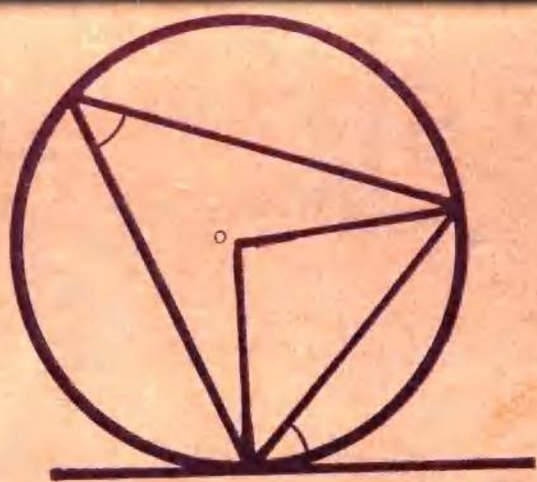




《初等几何研究》学习指导

出版社

《初等几何研究》

学 习 指 导

徐绍珍 熊民福 编

西南师范大学出版社

《初等几何研究》学习指导

徐绍珍等 编

西南师范大学出版社出版

(重庆 北碚)

新华书店 经销

重庆印制一厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 10.5 插页: 1 字数: 227千

1990年4月第一版

1994年8月第2次印刷

印数: 3,001—7,000

*

ISBN 7-5621-0367-4/G·224

定价: 5.80元

541/171/25

前 言

朱德祥教授编写的《初等几何研究》一书，自1985年由高教出版社出版以后，全国不少高等师范及专科院校、教育学院、函大数学专业及中学数学教师进修班都采用作为教本。几年来，朱老本人和云南师大数学系不断收到各处来函，索取有关该书的参考资料，为了满足教师和自学者的需要，同时，也为了我们自身教学的需要，我们将长期教学中积累下来的一些零散素材，进行加工整理。根据多年讲授几何课程的经验 and 体会，我们以《初等几何研究》为兰本，写了这本教学参改书。

本书的特点是针对具体教学内容，着重教材与教法上的研究和探讨，以及对教材中某些重点、难点的剖析。尤其注重解题技术和解题方法，因兰本中大量习题是经过编者认真精选而配置于各个章节的，除了紧扣有关章节的内容以外，还富于灵活性和启发性，并且充分注意了习题中反映重要的思想方法以及对学生思维能力的训练。特别在轨迹和作图题两章，由于考虑到这两部分内容是初学者所不熟悉的，故对其中题目，在解、证时作了较为详细的思路分析，尽力做到突出解题的关键以期对读者有所裨益。

由于本书以《初等几何研究》为兰本，书中引用的章、节、例，指的是兰本中的章、节和例题。这里，必须加以说明。

本书在编写过程中，经常得到朱德祥、赵宏量教授的指导

和帮助，并在百忙中审阅了全部例题解答的初稿，同时：对改正后的定稿又作了认真审校，提出了许多宝贵的意见，使修改后的解、证大为添色。在此，表示衷心感谢。同时，还得到云南师大科研处和数学系领导的鼓励和支持，以及西南师大出版社的鼎力支持惠予出版，付培云同志绘制了全部插图，在此恳致谢忱。由于我们水平有限，缺点错误在所难免，敬希读者批评指正。

徐绍珍 熊民福

1989年1月于云南师范大学

目 录

引论.....	(1)
一, 教学中的点滴体会和看法.....	(1)
二, 各章内容概述.....	(25)
第一章 证题法。初等几何变换。度量与计算 (25)	
(一) 内容概要.....	(25)
(二) 例题.....	(27)
第二章 轨迹.....	(130)
(一) 内容概要.....	(130)
(二) 例题.....	(134)
第三章 作图题.....	(163)
(一) 内容概要.....	(163)
(二) 例题.....	(172)
第四章 立体几何.....	(239)
(一) 内容概要.....	(239)
(二) 例题.....	(245)

引 论

经过多年几何课程的教学，我们感到朱德祥教授所编《初等几何研究》一书，写得非常精辟。尤其是平面部分，每教一次都会有一些新的感受和认识，越教越觉得它是一本好书。

全书共分四章，前三章是平面几何，第四章是立体几何。

一、教学中的点滴体会和看法：

书的开头，就论述了初等几何研究的对象，这就是“初等几何研究的对象是多方面的，如中学缺陷的补充，教材内容的融会贯通，独立工作能力的养成，克服学习中困难的刚毅精神的培养等等。通过这课程的学习，对初等几何，要有概括而联贯的知识，获得观察、分析、综合、推究的能力，掌握通用方法，具备足够的熟练技巧，并能愉快胜任中学几何教学，从中发现问题，解决问题，以便得到锻炼、提高。”。这一段话不但指明了开设本课程的目的和任务，同时对教师也提出了严格的要求。讲授初等几何课的教师，不但要熟习中学教材，而且还应系统的掌握几何（高等几何，尤其是几何基础）的专业知识，才能得心应手地进行讲授。如果未学过几何基础，书中引言部分所提到的“欧几里得第五公设”，

“绝对几何命题”，注释中的“罗氏几何”等等，就会一无所知，不知应该如何进行讲解才好。至于引言中所提到的三角形“外角定理”，有许多人都理解为：“三角形的每个外角等于它不相邻的两个内角之和”，这是错误的，这个定理必须要平行公理（中学课本所采用的平行公理）才能推出。而平行公理是与欧几里得的第五公设等价的，也就是说这个定理是属于欧几里得几何的内容，而三角形的外角定理是属于绝对几何的内容，它在欧氏几何与罗氏几何中都是成立的定理，因而它的证明得避开欧氏平行公理。那么究竟什么是三角形的外角定理呢？现在叙述并证明如下：

三角形外角定理 三角形的每个外角大于跟它不相邻的内角。

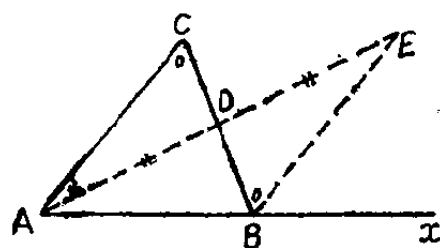


图1

设 $\angle CBX$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角，我们来证明：

$$\angle CBX > \angle C.$$

在 BC 边上取中点 D ，连 AD 在其延长线上取一点 E ，使 $DE = AD$ 。则 BE 在 $\angle CBX$ 的内部，所以 $\angle CBE < \angle CBX$ 。

但 $\triangle ACD \equiv \triangle EBD$ (S、a、S)，

从而有 $\angle C = \angle DBE = \angle CBE < \angle CBX$ 。

仿此可证 $\angle A < \angle CBX$ 。

三角形的外角定理在绝对几何中占着很重要的位置，有

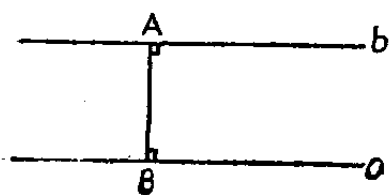


图 2

了它我们就可以推出平面上不相交的直线是存在的。如给了一条直线 a 和不在它上面的点 A ，我们可以证明通过点 A 而不与直线 a 相交的直线一定

存在。

此时只要通过点 A 作直线 a 的垂线 AB ,再通过点 A 作 AB 的垂线 b ,由外角定理知,直线 b 与直线 a 不能相交,这样就作出了通过点 A 而与直线 a 不相交的直线。至于通过点 A 而与直线 a 不相交的直线有几条?这就不是绝对几何的内容了,要求过点 A 仅有一条直线与直线 a 不相交,就需要欧氏平行公理来保证。如过点 A 有无数条直线与直线 a 不相交,就需要罗巴切夫斯基平行公理保证。引用了不同的平行公理就得出不同的几何。引用中学课本所列出的平行公理就得出欧几里得几何,引用了罗氏平行公理就得出罗氏几何。因此我们一定要把三角形的外角定理弄清楚。

1.2节关于数学证明,篇幅虽少,但它的含义却相当丰富,如在书中所提到的“古埃及丰富的几何知识的积累,一经跟古希腊的形式逻辑相结合,便使几何学光照环宇,成了最早成熟的科学典范,这里起作用的,是严格的逻辑证明”。这简单的几句话,就把几何的起源、发展、和丰富的几何知识的积累,需要人们按照严格的逻辑推理,把它系统化、科学化、阐述得非常清楚。在当时,却有许多数学家都从事于这项工作的研究,出版了不少著作。但是欧几里得的“几何原本”一经问世,其他人的著作都被遗忘了,而“原本”却成了光照环宇最早成熟的科学典范。

又如直观和推理这一段“直观和推理,实物是最好的教具,其次是模型,再其次是图形。但实物和模型难能要有就有,因此,图形在教学上起重要作用。几何图形的直观能化抽象为具体,往往是启发抽象思维的有力工具。但图形无论

画得如何准确，也无法代替逻辑思维。直观不一定可靠，还往往和实际情况不符，甚至相反。并且复杂的问题，直观就无能为力。所以，尽管直观和实验对我们获得感性认识起重要作用，证明命题还主要靠逻辑推理”。这段话既对图形在几何中的作用给予了高度评价，又指出了命题的证明不能仅借助于图形的直观。因为直观不一定可靠，还往往和实际情况不符甚至相反。为什么呢？如果未学过高等几何，尤其是未学过几何基础，这些话是使人费解的。如后面又提到“欧几里得的第五公设就不是自明的”，学生更会感到茫然。什么是欧几里得的第五公设呢？作为一个教初等几何课的教师，又感到这些地方写得恰到好处，它可以使教师在教学中不至于照本宣科，而可以把学生现有的几何知识加以扩充，使它们的眼界更加开阔，可以进一步激发同学学习几何的积极性。

命题的四种变化及真假关系和等价性，这一节是为第二章的轨迹打基础。学生学习这一节时，并不重视，以为简单、容易。可是一旦叫他们写出命题“凡直角皆相等”的四种变化形式时，他们会五花八门胡乱写。如

原命题：若直角，则相等。

逆命题：若相等，则直角。

否命题：若不是直角，则不相等。

逆否命题：若不相等，则不是直角。

这种写法说明学生既没有听教师的讲解，也没有认真阅读过这一节的内容。实际上这一节书的内容已把命题的四种变化形式和它们的真假关系以及等价性，都阐述得十分透彻。每个例子都有它的典型性，给人一个直观的感觉。原命

题也可真可假，说明了所有的命题不一定是真的。如果同学们仔细阅读了书上的内容，他就不难写出命题“凡直角皆相等”的四种形式了。因为第7页的例4是对命题“对顶角相等”而写的命题的四种形式，它会给人一个启示，由此就可以正确写出“凡直角皆相等”的四种变化形式：

原命题：若两角为直角，则此两角相等。 (真)

逆命题：若两角相等，则此两角为直角。 (假)

否命题：若两角非直角，则此两角不等。 (假)

逆否命题：若两角不等，则此两角非直角。 (真)

7页最末一段指出“初学的人往往在证明命题时，不去证这命题(或跟它等效的逆否命题)，而去证逆命题(或否命题)，这是原则性错误”。这一段话应该特别引起同学们的重视。

对于充分条件、必要条件、充要条件，学生在中学接触过。但是并没有很好的掌握，到大学后，其它课程也未涉及这方面的内容。可是，他们是未来的中学教师，如果这方面的内容本身都未弄清楚，又如何去纠正学生们的错误呢？

这一节，纲目清晰。既简短，又说明了问题。但如果我们照书讲给学生，就起不到应有的效果。因此教师必须补充和发挥，这就是一本好教材的结果，它能激发教师教学的积极性。下面谈谈我们对这一节教学过程的讲解。

§1.3.2充分条件，必要条件，充要条件。

(1)命题：平行四边形的两条对角线互相平分。

可以换一个方式叙述为：

四边形的两双对边平行 $\Rightarrow$ 这四边形的对角线互相平分。

也就是说，四边形一旦具有了两双对边平行的性质，它

就必然得出对角线互相平分的性质。

也就是说，四边形只要具有了两双对边平行的前提，它就必然得出对角线互相平分的结论。

反过来说，如果四边形的对角线不互相平分，那末，这个四边形就不可能是平行四边形。

所以我们对角线互相平分称为两双对边平行的必要条件。

(2) 菱形的对角线互相垂直。

我们把它换一个方式叙述为：

四边形的四边相等 $\implies$ 这四边形的对角线互垂。

也就是说，只要四边形具有了四边相等，它就必然对角线互垂。

即是说，只要具有了这个前提，就必然得出这个结果。反过来说，对角线不互垂，它就不可能是菱形。所以对角线互垂是四边相等的必要条件。

(3) 如果直线 l_1 、 l_2 的斜率存在，分别记为 k_1 、 k_2 。

当 $l_1 \parallel l_2$ 时 $\implies k_1 = k_2$ 。

所以有了 $l_1 \parallel l_2$ 的前提，就必然得出 $k_1 = k_2$ 的结果。如果 $k_1 \neq k_2$ ，就不可能有 $l_1 \parallel l_2$ 。

$\therefore k_1 = k_2$ 是 $l_1 \parallel l_2$ 的必要条件。

(4) $x = y \implies x^2 = y^2$ 。

$\therefore x^2 = y^2$ 是 $x = y$ 的必要条件。

(5) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \implies S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'}$ 。

$\therefore$ 面积相等是三角形全等的必要条件。

从以上五例我们得出，如果命题真，则结论是前提的必要条件。

∴必要的意思是：无它必不行，有它未必行。无它必不行如：(1)四边形的对角线不互相平分，它就不可能是平行四边形。(2)对角线不互垂，它也不是菱形。(3) $k_1 \neq k_2$ ，就不可能有 $l_1 \parallel l_2$ 。(4) $x^2 \neq y^2$ ，也得不出 $x=y$ 。(5) $S_{\triangle AOB} \neq S_{\triangle A'B'O'}$ ，也就不可能有 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

有它未必行如：四边形对角线互垂，但不一定是菱形。有 $x^2=y^2$ ，但不一定是 $x=y$ 而可能是 $x=-y$ 。有 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'}$ ，但两个三角形不一定是全等，也可能是等底等高。

再回过头看(1)——(5)。

(1)四边形的两双对边平行，便足以保证对角线互相平分。(2)四边形的四边相等，也保证了对角线互垂。(3)只要有 $l_1 \parallel l_2$ ，便保证有 $k_1=k_2$ 。(4)只要有 $x=y$ ，便保证有 $x^2=y^2$ 。(5)只要有 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，便保证有 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'}$ 。

也就是说，只要有这个前提，就保证有这个结论。

所以，前提是结论的充分条件。

充分的意思是：有它必行，无它未必不行。

无它未必不行是指什么呢？

如(2)没有四边相等，我们仍然可以得出对角线互垂的四边形。这时，我们只要画两条任意垂直相交的线段即可。

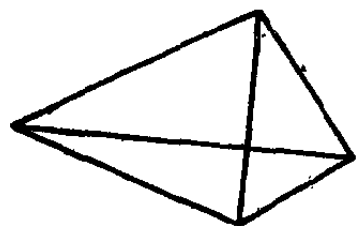


图 3

(4)没有 $x=y$ ，我们仍然可以得出 $x^2=y^2$ 。只要有 $x=-y$ 就行。

(5)没有 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，我们仍然可以得出 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle A'B'O'}$ 。例如两个三角形等底

等高就行。

“菱形的对角线互相垂直平分”换一个方式叙述为：

如果一个四边形是菱形，那么它的两条对角线互相垂直平分。

所以，菱形是对角线互相垂直平分的充要条件。对角线互相垂直平分也是菱形的充要条件。

如果把一个“四边形是菱形，那么它的对角线互相垂直平分”看成原命题，对原命题：菱形是对角线互相垂直平分的充分条件。对逆命题：菱形是对角线互相垂直平分的必要条件。

所以充要条件的意思是：有它必行，无它必不行。

即是说有菱形就有对角线互相垂直平分，没有菱形就没有对角线互相垂直平分。

一般而论：

命题： $P \Rightarrow Q$ 。（真）

有了 P 便保证有 Q ，所以 P 是 Q 的充分条件。没有 Q ， P 就不成立，所以 Q 是 P 的必要条件。

如果原命题和逆命题同时成立，即 $P \Leftrightarrow Q$ 。则 P 是 Q 的充要条件。 Q 也是 P 的充要条件。也就是说它们互为充要条件。

那么什么又是充分而不必要，必要而不充分呢？

一个定理只要它的逆命题不成立，它的前提一定是充分而不必要，结论是必要而不充分。如“对顶角相等”。

“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”。对顶角是两个角相等的充分条件，但不是必要条件。两个角相等是它们成对顶角的必要条件，而不是充分条件。

一个假命题，它的前提既不是结论的充分条件，而结论

也不是前提的必要条件。

例如，条件 $P: \sqrt{1+\sin\theta}=a$,

$$\text{条件} Q: \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = a,$$

条件 P 不是 Q 的充分条件，也不是必要条件。

习题一的第3题 a ，利用外角定理证明：“三角形中两角之和小于二直角”。此题的证明不需要利用平行公理，也就是说它不需要利用与平行公理等价的定理：“三角形的内角和等于两直角”。因为它是属于绝对几何的定理。现证明如下：

设 $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角，由外角定理知 $\angle A < \angle ACD$ 。但 $\angle ACD + \angle ACB = 2d$ ，所以 $\angle A + \angle ACB < 2d$ 。

证毕

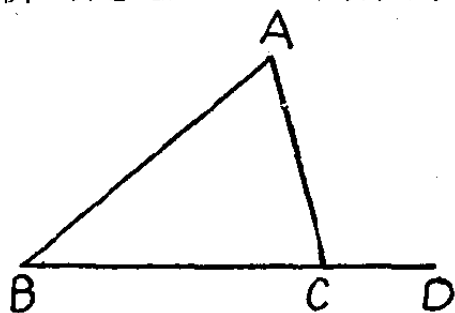


图 4

在讲证题方法时，其中讲到这样一个例子，要求用穷举法证明：“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”。这个命题本来可以直接证明，而且证明的方法也有好多种。但此地要求用穷举法来证，以便得出一个更为深刻的定理：

设 CM 为 $\triangle ABC$ 的中线，则

1° 当 $CM > \frac{1}{2} AB$ 时， $\angle C$ 为锐角。

2° 当 $CM < \frac{1}{2} AB$ 时， $\angle C$ 为钝角。

3° 当 $CM = \frac{1}{2}AB$ 时, $\angle C$ 为直角。

这个定理前提有三款, 既是穷举的, 又是彼此不相容的; 结论也分三款; 也满足既穷举又互斥的条件, 容易用反证法证明逆定理成立:

设 CM 为 $\triangle ABC$ 的中线, 则

1° 当 $\angle C$ 为锐角时, $CM > \frac{1}{2}AB$;

2° 当 $\angle C$ 为钝角时, $CM < \frac{1}{2}AB$;

3° 当 $\angle C$ 为直角时, $CM = \frac{1}{2}AB$ 。

有了这个定理来证明习题二的11题, “在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 是钝角, CD 是 AB 边上的高。证明 $AB > 2CD$ ”。就易如反掌, 证明如下:

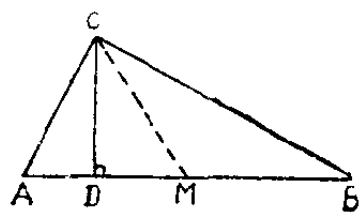


图 5

设 M 是 AB 边上的中点, 连 CM , 则 $CM \geq CD$ 。因为 $\angle C$ 是钝角, 所以

$$CM < \frac{1}{2}AB, \text{ 即 } CD < \frac{1}{2}AB.$$

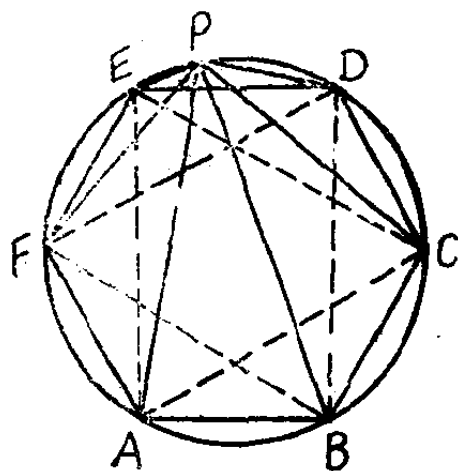


图 6

书中每一章节后面所配备的习题, 都与内容紧密结合。离开了教材, 有许多习题就很难下手。我们举两个实例作为体现, 如习题六第七题 “从正六边形外接圆上任一点到

六顶点连线，证明其中两长线段之和等于其余四线段之和”。

证：设 $ABCDEF$ 为正六边形（图6）， P 为外接圆周上任一点。为确定计，设 P 在 $\widehat{DE}$ 上，取 D 、 E 各为一顶点的两个正三角形 ACE 和 BDF 。由§1.10例1知：

$$PA=PC+PE$$

$$PB=PD+PF$$

$$\therefore PA+PB=PC+PD+PE+PF$$

又如习题七第13题：“设一正方形各顶点在锐角三角形的周界上，计算其边长；并比较这样的三个正方形的大小”。我们来看一下此题的证明。

设正方形 $EFGH$ 各顶点在锐角 $\triangle ABC$ 的周界上，边长为 x 。过 A 作 $AD \perp BC$ 交 GH 于点 P ，且 $AD=h_a$ ， $BC=a$ ， $CA=b$ ， $AB=c$ 。则

$$\frac{HG}{BC} = \frac{AP}{AD} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{h_a - x}{h_a},$$

$$\therefore x = \frac{ah_a}{a+h_a} \dots\dots\dots(1)$$

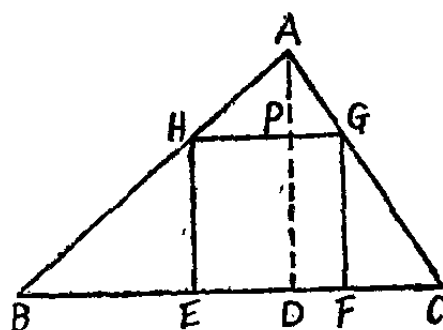


图 7

当正方形的一个边在 CA 边上时，设边长为 y 。正方形的一个边在 AB 边上时，设边长为 z 。

同理可求得： $y = \frac{bh_b}{b+h_b} \dots\dots\dots(2)$

$$z = \frac{ch_c}{c+h_c} \dots\dots\dots(3)$$

现在我们来比较三个正方形的大小，由(1)、(2)、(3)可以看出，它们分子一样，都是已知三角形面积的两倍。