数理化竞赛丛书

# 全国中学数学竞赛题解

## （1978年）

全国数学竞赛委员会编



科学普及出版社

1978年　北京

## 内 容 提 要

本书汇集了一九七八年全国和八省、市中学数学竞赛试题与题解，供广大青少年、中小学教师和广大数学爱好者参考。

数理化竞赛丛书

**全国中学数学竞赛题解**

全国数学竞赛委员会编

科学普及出版社出版

北京西郊友谊宾馆会议楼

水利电力出版社印刷厂排版

北京新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1978年12月第一版　开本：787×1092　1/32

1978年12月北京第一次印刷

印数：1,000,000册　字数：108千字　印张：$4^1/_2$

统一书号：13051.0002　本社书号：0002

定价：0.30元

# 出 版 说 明

为了实现我国新时期的总任务，提高整个中华民族的科学文化水平，教育部和全国科协于今年五月间举行了有北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东八省、市参加的中学数学竞赛和全国决赛．在全国决赛前，先由八个省、市普遍自下而上举行了地区、省、市预赛和复赛．现在我们把这次数学竞赛复赛和决赛的试题及其解答编辑出版，以供爱好数学的广大青少年和中小学教师及其他读者参考．

试题和解答是在华罗庚同志直接指导下，由王寿仁同志和全国数学竞赛命题小组，以及八省、市有关方面同志共同努力完成的．编辑出版时，命题小组还作了校核工作．在此，我们表示深切的谢意．

试题和解答仅供读者参考．殷切地希望专家和读者批评指正．

一九七八年十月

# 目 录

# 前　言

**华　罗　庚**

在英明领袖华主席发出“提高整个中华民族科学文化水平”的伟大号召下，我国科技教育战线出现了崭新的局面。

经国务院批准，教育部和全国科协联合举办的全国八省、市中学数学竞赛已经告一段落．在这期间，各地老师们为了培养下一代，为了向四个现代化进军，十分辛劳地出了不少试题．各方面要求把这些试题汇总出版．

这样的事，只有在华主席为首的党中央一举粉碎“四人帮”后，在抓纲治国、拨乱反正初见成效后才会出现，其影响遍及全国，其意义之深远是难以估计的．我参与其事的体会是说不尽的，在这儿只谈些我和同学们一同参加考试后的一些体会，和我所知道的部分试题背景．很可能挂一漏万，不能道出出题老师们的全部心意．但抛砖引玉总比藏而不露易于受教益，因此把一些认识写在下面，敬待指教．

1.从量地看阶级剥削

全国试题第二试第 4 题，是一个量地问题．一块四边形的土地要丈量它的面积，解放前，北方地主是用两组对边中点连线长度的乘积作为面积，而南方地主是用两组对边边长平均值的乘积作为面积．实际上，四边形真正的面积≤两组对边中点连线长度的乘积≤两组对边边长平均值的乘积．这也就是说，北方地主和南方地主的量法都是把土地量大了．面积量大了农民就得多交租，地主得到好处．农民由于缺乏

文化，对这种剥削比对大斗小秤更难于发觉。

我们证明这个题目的方法是这样的：

把四边形沿对边中点连线划成四块（图1），把四块搬到图2的位置，得到一个平行四边形。它的两边就是原四边形对边中点连线（这里利用了对边中点连线互相平分的性质，请同学们想一想，这点能如何简单地证明），一个平行四边形的面积总是≤两边边长乘积，因而我们证明了第一个不等式。在原四边形的右边拼上同样的四块得到图3。利用三角形两边之和大于第三边，就得到对边边长的平均值大于另一组对边中点连线，这样就证明了第二个不等式。

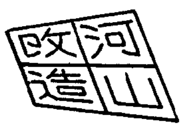


图 1

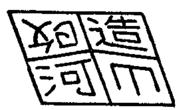


图 2

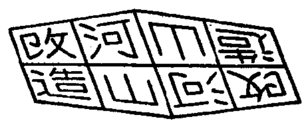


图 3

2.物理模型与数学方法

北京试题第二试第1题，其实际背景是从光行最速原理推出入射角等于反射角，在数学上涉及了对称原理，这是一道好题目。

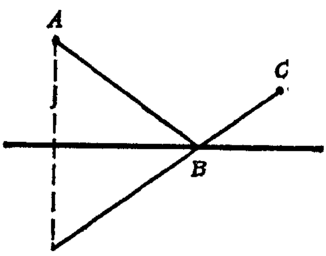


图 4

光线从$A$经$B$到$C$，$A'$是$A$的对称点，利用三角形两边之和大于第三边，可见，只有当入射角等于反射角时，$AB+BC$取最小值。

这次出全国试题时，本来想出从光行最速原理推出关于折射角的问题。虽然用微积分的方法，这是很容易的。但由于我们没有想到适合于当前中

学生的解法，所以没有采用。

3. 射影几何的基本定理

全国试题第二试第1题，包含了仿射几何的基本原理。苏步青教授在来信中也建议出同样性质但另一形式的题目：已知与一直线 $l$ 平行的一条线段 $AC$，今要求只用直尺不用圆规平分线段 $AC$。图5就把作图方法告诉了我们，

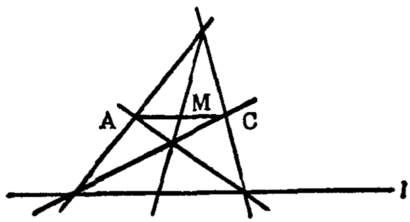


图 5

$M$点即平分$AC$。射影几何是仿射几何进一步的发展。在图5中去掉$AC$平行于 $l$ 这一条件，就得到另一图形（图6）。

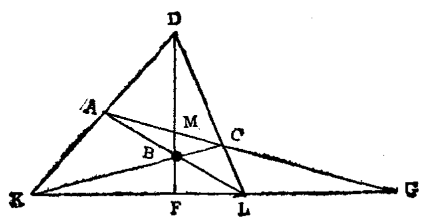


图 6

在图6中求证 $\dfrac{KF}{LF}=\dfrac{KG}{LG}$。

这里就包含了射影几何的基本原理。将$G$点趋于无穷，图6就变为图5。

我们来证明这个题目. 设$\triangle KFD$中$KF$边上的高为$h$，利用

$2\triangle KFD$ 面积$=KF\cdot h=KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF$，得到

$$KF=\frac{1}{h}\cdot KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF,$$

同理，再求出$LF$、$LG$与$KG$的类似的表达式。

因而
$$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF}{LD\cdot DF\cdot\sin\angle LDF}\cdot\frac{LD\cdot DG\cdot\sin\angle LDG}{KD\cdot DG\cdot\sin\angle KDG}=\frac{\sin\angle KDF}{\sin\angle LDF}\cdot\frac{\sin\angle LDG}{\sin\angle KDG},$$

同样可得到

$$\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}=\frac{\sin\angle ADM}{\sin\angle CDM}\cdot\frac{\sin\angle CDG}{\sin\angle ADG},$$

所以
$$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}.$$

类似地可以证明

$$\frac{LF}{KF}\cdot\frac{KG}{LG}=\frac{\sin\angle LBF}{\sin\angle KBF}\cdot\frac{\sin\angle KBG}{\sin\angle LBG}$$

$$=\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}\cdot\frac{\sin\angle CBG}{\sin\angle ABG}=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}$$

由此可见
$$\left(\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}\right)^2=1.$$

即证得结论。

图 6 也告诉我们，在已知$K$、$F$、$L$三点时，可以只用直尺不用圆规作图找到第四点$G$，使$F$“内分”$KL$的比例等于$G$“外分”$KL$的比例。

4. 凸体分割问题

安徽试题第二试第3题是说，通过三角形重心的任意一条直线把三角形切成的两块，其面积之比总是在$\frac{4}{5}$与$\frac{5}{4}$之间。这里我们可以想到这样一个问题，在三角形内应该选择怎样的点，使得过这点沿任意直线把三角形所切得的两块，其面积之比的变化范围最小。同学们可以证明，这点是选在三角形的重心最好。不只是三角形，平面上任意一个凸的图形，过它的重心沿任一直线把图形切成两块，其面积之比也总是在$\frac{4}{5}$与$\frac{5}{4}$之间。更进一步，我们也知道三维空间任意一个凸体，过它的重心沿任意一个平面把凸体切成两块，其体积之比总在$\frac{27}{37}$与$\frac{37}{27}$之间。要证明这些结论，可能就出乎中学数学的范围了。

5. 规划论的一个基本原则

全国试题第二试第3题，可以一般地化为下列的问题：当点（$x$，$y$）在平面上一个区域$\Gamma$（包括边界）上变动时，求一次函数$ax+by$的最大值和最小值。

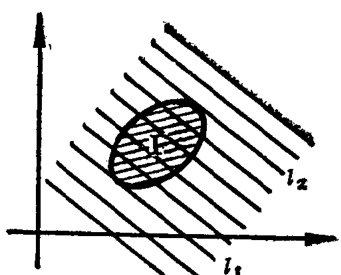


图 7

$ax+by=p$，当$p$变动时就得到一组互相平行的直线族，与$\Gamma$有公共点的最边缘的两条直线$l_1$和$l_2$，就决定了$ax+by$在$\Gamma$上的最小值和最大值。可见一次函数的极值总是在$\Gamma$的边界上达到。当区域$\Gamma$是一个三角形时，就一定在顶点上达到极

值．如果$\Gamma$有一条边与直线族$ax+by=p$平行，则在这条边上$ax+by$的值都相等，且是最大值或最小值。

6．分圆多项式不可分解问题

全国试题第二试第 2 (1)题，分解多项式

$$F(x)=x^{12}+x^{9}+x^{6}+x^{3}+1.$$

在复数范围内可分解为

$$F(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq5,10}}^{14}\left(x-e^{\frac{2\pi i}{15}k}\right);$$

在实数范围内可分解为

$$F(x)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq5}}^{7}\left(x^{2}-2\cos\frac{2k\pi}{15}x+1\right);$$

在整数范围内可分解为

$$F(x)=\frac{x^{15}-1}{x^{3}-1}=\frac{(x^{5}-1)(x^{10}+x^{5}+1)}{x^{3}-1}$$

$$=(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1)(x^{8}-x^{7}+x^{5}-x^{4}+x^{3}-x+1).$$

在整数范围内分解$F(x)$，这是出题人的原意．在整数范围内，上面两个因子能不能继续分解？这两个多项式都是所谓“分圆多项式”，在高等数学中可以一般地证明，分圆多项式在整数范围内不可分解．我们现在用初等的方法来证明：

$$f_{1}(x)=x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1,$$

和 $$f_{2}(x)=x^{8}-x^{7}+x^{5}-x^{4}+x^{3}-x+1,$$

在整数范围内不可分解．

$f_1(x)$和$f_2(x)$都是$x^{15}-1$的因子，$x^{15}-1$除了 1 之外没有其他实根，而 1 不是$f_1(x)$和$f_2(x)$的根，所以$f_1(x)$和

$f_2(x)$没有实数根。于是它们不可能有奇数次因子。如果$f_1(x)$和$f_2(x)$有二次因子，一定形如$x^2-2\cos\dfrac{2k\pi}{15}x+1$（$1\leqslant k\leqslant 7\quad k\neq 5$），而这时$\cos\dfrac{2k\pi}{15}\neq 0$、$\pm\dfrac{1}{2}$、$\pm 1$，所以$2\cos\dfrac{2k\pi}{15}$不是整数，因此$f_1(x)$和$f_2(x)$不可能有二次因子，这样我们就证明了$f_1(x)$不可分解。而$f_2(x)$如果能分解，只能是

$$f_2(x)=(x^4+ax^3+bx^2+ax+1)(x^4+cx^3+dx^2+cx+1),$$

（两个二次式$x^2-2\cos\dfrac{2k\pi}{15}x+1$相乘得到的四次因子一定是上述形式）。比较等式两边的系数，可得

$$a+c=-1,$$

$$d+ac+b=0,$$

$$c+ad+bc+a=1,$$

$$2+2ac+bd=-1.$$

第2式乘2减去第4式得

$$(d-2)(b-2)=1,$$

因而

$$b=d=2\pm 1.$$

由第3式得出

$$b=-2$$

矛盾，所以$f_2(x)$不可分解。

7. 证明素数定理的一个工具

全国试题第二试第2（2）题，来自下列一般问题：求整数$a_0$、$a_1$、……$a_n$，使三角多项式

$$a_0+a_1\cos\phi+\cdots\cdots+a_n\cos n\phi\geqslant 0\ (\text{对一切}\,\phi\ )$$

且适合 $0<a_0<a_1 a_2\geqslant 0,\ \cdots\cdots a_n\geqslant 0$，

并使

$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_0})^2}\text{最小，并求这最小值.}$$

这个问题太难，现在给出下列诸例.

**例1** $n=2$

$$3+4\cos\phi+\cos 2\phi=3+4\cos\phi+2\cos^2\phi-1$$
$$=2(1+\cos\phi)^2\geqslant 0,$$

$$a=\frac{4+1}{2(2-\sqrt{3})^2}=\frac{35}{2}+10\sqrt{3}=34.82.$$

**例2** $n=3$

$$5+8\cos\phi+4\cos 2\phi+\cos 3\phi$$
$$=5+8\cos\phi+4(2\cos^2\phi-1)+4\cos^3\phi-3\cos\phi$$
$$=4\cos^3\phi+8\cos^2\phi+5\cos\phi+1$$
$$=(\cos\phi+1)(2\cos\phi+1)^2\geqslant 0,$$

$$a=\frac{8+4+1}{2(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2}=\frac{169}{18}+\frac{26}{9}\sqrt{10}=18.52.$$

**例3** $n=4$

$$18+30\cos\phi+17\cos 2\phi+6\cos 3\phi+\cos 4\phi$$
$$=18+30\cos\phi+17(2\cos^2\phi-1)+6(4\cos^3\phi-3\cos\phi)$$
$$+(8\cos^4\phi-8\cos^2\phi+1)$$
$$=8\cos^4\phi+24\cos^3\phi+26\cos^2\phi+12\cos\phi+2$$
$$=2[(4\cos^4\phi+4\cos^3\phi+\cos^2\phi)+(8\cos^3\phi+8\cos^2\phi$$
$$+2\cos\phi)+(4\cos^2\phi+4\cos\phi+1)]$$
$$=2(\cos\phi+1)^2(2\cos\phi+1)^2\geqslant 0,$$

$$a=\frac{30+17+6+1}{2(\sqrt{30}-\sqrt{18})^2}=9+\frac{27}{12}\sqrt{15}=17.71.$$

例1、例2被用于素数定理的证明，例 3 被用于某些素数函数的上界估计中。

8.排序问题

全国试题第二试第 5 题，排队提水的问题，在其他一些场合也是会遇到的。例如，有一台机床要加工 $n$ 个工件，每个工件需要的加工时间不一样，问应该按照什么次序加工，使总的等待时间最短。同样，如果有两台同样的机床加工 $n$ 个工件，应该怎样安排加工顺序呢？在这个题目的解法中利用了一条简单而重要的引理。

**引理** （ $a$ ）表示非负数 $a_1$、$a_2$、……$a_n$，

（ $b$ ）表示非负数 $b_1$、$b_2$、……$b_n$，

问题 （ $a$ ）与（ $b$ ）一对一对相乘后相加，何时最大，何时最小？

答案：同序时最大，倒序时最小。

将（ $a$ ）由小到大排为 $\bar{a}_1\leqslant\bar{a}_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant\bar{a}_n$，

将（ $b$ ）由小到大排为 $\bar{b}_1\leqslant\bar{b}_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant\bar{b}_n$，

也就是说

$$\bar{a}_1\bar{b}_1+\bar{a}_2\bar{b}_2+\cdots\cdots+\bar{a}_n\bar{b}_n \text{最大，}$$

$$\bar{a}_1\bar{b}_n+\bar{a}_2\bar{b}_{n-1}+\cdots\cdots+\bar{a}_n\bar{b}_1 \text{最小。}$$

**证明** 若 $a_i<a_j$、$b_i<b_j$ 则

$a_ib_i+a_jb_j-(a_ib_j+a_jb_i)=(a_i-a_j)(b_i-b_j)>0$。

可见，在 $i$ 和 $j$ 两个位置上，将同序改为倒序时，和值将减少，由此即可证得引理.

（ I ）一个水龙头的情况．若按某一顺序放水时间依次

为 $a_1$、$a_2$、$\cdots a_n$，则总的等待时间为：

$$a_1+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+\cdots\cdots+(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$
$$=na_1+(n-1)a_2+\cdots\cdots+2a_{n-1}+a_n$$

在引理中取$(b)=n,n-1,\cdots\cdots2,1$，可见依 $a_i$ 由小到大的次序放水等待时间最少。

（Ⅱ）二个水龙头的情况。首先考虑两个水龙头上人数相等的情况。若一个龙头上按某一顺序放水时间依次为$a_1$、$a_2$、$\cdots\cdots a_n$，另一个龙头上按某一顺序放水时间依次为 $a'_1$、$a'_2$、$\cdots$
$\cdots a'_n$，则总的等待时间为：

$$na_1+(n-1)a_2+\cdots\cdots+a_n+na'_1+(n-1)a'_2+\cdots\cdots+a'_n$$
$$=na_1+na'_1+(n-1)a_2+(n-1)a'_2+\cdots\cdots+a_n+a'_n.$$

在引理中取（$b$）为 $n$，$n$，$n-1,n-1,\cdots\cdots1,1$，可见当

$$a_1\leqslant a'_1\leqslant a_2\leqslant a'_2\leqslant\cdots\cdots\leqslant a_n\leqslant a'_n$$

时，总的花费时间最少。当然使花费时间最少的排法可以不止一个。

若两个龙头上人数不等，则在人数少的龙头上添上一定个数放水时间为零的人，使人数相等，再利用上述引理。

（Ⅲ）类似地可以讨论 $n$ 个人 $r$ 个龙头的情况。等待时间最少的排列，就是按照放水时间由小到大的次序，依次在 $r$ 个龙头上放水，哪个龙头上的人打完了水，后面等待着的第一人就上去打水。

# 全国中学数学竞赛（决赛）题解

## 第一试题解（参考答案）

1.已知$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$，问当$x$为何值时（Ⅰ）$y>0$；（Ⅱ）$y<0$？

**【解】** $y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}$的定义域为$x+3>0$，即

$$x>-3 \qquad (1)$$

又
$$0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

（Ⅰ）若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}>0$，则$\frac{1}{x+3}<1$，$x+3>1$，即$x>-2$。结合（1）得$x>-2$。

（Ⅱ）若$y=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{x+3}<0$，则$\frac{1}{x+3}>1$，$x+3<1$，即$x<-2$。结合（1）得$-3<x<-2$。

所以当$x>-2$时$y>0$；当$-3<x<-2$时$y<0$。

2.已知$\operatorname{tg} x=2\sqrt{2}\,(180^\circ<x<270^\circ)$，求$\cos 2x$，$\cos\frac{x}{2}$的值。

**【解】** $\because \quad 180^\circ<x<270^\circ,$

$\therefore \quad \sec x=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=-\sqrt{1+8}=-3,$