数学解题技巧

（第三卷　上册）

〔日〕矢野健太郎　著

张卓澄　马宝珊　李俊杓　译

黑龙江人民出版社
198[illegible]年·哈尔滨

责任编辑：田兆民　孙怀川
封面设计：蒋　明

数学解题技巧

（第三卷　上册）

〔日〕矢野健太郎　著
张卓澄　马宝珊　李俊杓　译

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
延边新华印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 14 6/16 · 字数 273,000
1983年9月第1版　1983年9月第1次印刷
印数 1—16,400

统一书号：13093·63　定价：1.25元

译者的话

本书译自日本东京工业大学名誉教授、理学博士矢野健太郎著《解法のテクニック》一书1979年三订版。

原书是根据日本现行高中数学的全部内容，按解题技巧加以分类、整理而编成的一部供高中学生系统复习和准备高考用的完备的参考指南。全书分3卷(数学Ⅰ、数学ⅡB、数学Ⅲ) 28章127节，共精选出782个典型问题及约2000道习题，并给出了详细解答。这些问题及习题包括了所能想到的各种数学问题及其解题技巧。它对学生熟练地运用数学基础知识，提高数学解题能力十分有益，确实是广大高中学生、中学数学教师以及数学爱好者不可多得的一部内容丰富的好参考书。

为了使读者能够有效而全面地掌握数学解题技巧，作者通过精心的协调和安排，以条理清晰的形式，将有关的基础知识及其应用方法展示给读者，为此在各章的每一节中都安排了如下内容：

首先介绍基础知识 (Fundamentals)，简明扼要地分条列出该节有关的基本定义、公式、定理等，并指出了注意事项。

其次将该节的具体内容编排成一个一个的典型问题，并

详细阐述解答问题的思路和方法。对于解题中出现的，对其它问题也有普遍应用价值的常用技巧，冠以“关键”（Technique）字样；对于解题时要用到的，有普遍意义的公式、定理等，冠以“理论”(Theory)字样。凡“关键”和“理论”部分，一律用简洁的语言或公式表示出来，以便于读者的复习和记忆。

在阐明解题的思路和方法的基础上，给出了问题的完整的解答。其中对于容易出错的地方，冠以“当心”（Remark）字样，以提醒读者注意。对于解题过程中所依据的公式、计算方法和论证等，通过反向箭头“←”列在相应步骤的右边。

在每一问题的后面配备了若干同类型的习题，以供练习之用。对于个别较难的习题，标上“*”号，以示区别，初读时可以略过。这些习题的解题技巧与解答附于书末。

由于原书是按照日本高中数学大纲编写的，所以有个别章节（如空间坐标和向量、矩阵、概率分布、统计推断、微分方程、平面几何公理的构成、映射等）超过了我国现行中学数学教学大纲范围。但是，考虑到这些内容有的将陆续纳入我国三年制高中数学教学大纲，有的对中学教师和广大数学爱好者有一定的参考价值，因此，中译本将原书全部内容译出，以保持其完整性和系统性。

原书中，冠以“理论”、“关键”、“当心”字样的部分，都是以醒目的红蓝套色印刷的，中译本则一律用黑体字排出。对于原书中数字和符号上的个别印刷错误，我们已作纠正，不再一一注出。

本书中译本改为三卷六分册（每卷分上、下两册）出版。

译者分工如下：第一卷上册由马宝珊、李俊杓、安永德译，下册由李俊杓、安永德译；第二卷上册由颜秉海、颜建设译，下册由李开成译；第三卷上册由张卓澄、马宝珊、李俊杓译，下册由安永德、马宝珊译。李诵权、周师颖承担了第一、三卷各册的部分校对工作，林龙威承担了第二卷下册的校对工作。全书由颜秉海、李开成担任总审校。

在此谨向原著者、东京工业大学名誉教授矢野健太郎先生及黑龙江人民出版社致谢。

由于译者水平有限，难免出现缺点和错误，欢迎各位读者批评指正。

黑龙江大学数学系　颜秉海

1981年11月

目　　录

第一章　数列的极限

第二章 函数的极限

第三章 微 分 法

第四章 微分的应用

第一章　数列的极限

§1　无穷数列

基础知识

1. 无穷数列$\{a_n\}$的收敛与发散

(1) 收敛 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$（确定的有限值）

(2) 发散 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$（向正无穷发散）

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$（向负无穷发散）

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$（摆动）

2. 极限的性质

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} Ca_n = C\alpha$（$C$ 为常数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$（复号顺序相同）

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　($\beta \neq 0$)

3. 无穷等比数列$\{r^n\}$的收敛与发散

$r>1$	$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = +\infty$	发散
$r=1$	$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 1$	收敛
$-1<r<1$	$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$	收敛

$r \leqslant -1$ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$（不定） 发散（摆动）

4. 极限的求法

(1) $n\to\infty$时 $f(n)$的极限⟶将 $f(n)$化为$\frac{1}{n}$的函数。

(2) 根式的极限⟶有理化。

(3) 含有r^n的式子的极限⟶分$|r|>1$、$|r|=1$及$|r|<1$三种情况计算之。

对于数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$（也可简写为 $\{a_n\}$），当n无限增大时，a_n 无限地趋近于定值 a，则记为

$$n\to\infty\text{时 } a_n\to a \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

此 a 叫做无穷数数列$\{a_n\}$的极限。同时，称此无穷数列 $\{a_n\}$ 为收敛。这样，凡不收敛的统称为发散。

例如，无穷数列 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots$,

$$n\to\infty\text{时 } a_n = 2n-1\to+\infty$$

此时，称此无穷数列向正无穷发散。

此外，如无穷数列 $1, -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-1}, \cdots$，虽为发散的无穷数列，但既不向$+\infty$发散，又不向$-\infty$发散，而是摆动的，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 叫做不定。

1. 数列的收敛与发散(1)

问　题　由下式表示通项的无穷数列收敛吗？

(1) $\dfrac{2n^2+1}{3n^2}$　(2) $\dfrac{n^2}{2n-1}$　(3) $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

(4) $1+(-1)^n$　(5) $(-2)^n$

【技巧】　求通项是关于n的分式的无穷数列的极限时，根据

理论：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^k=+\infty(k>0)$。

分子、分母同除以分母的最高次项，化为$\frac{1}{n}$的函数。例如：

(1) 中，分子、分母同除以n^2化为$\dfrac{2+\frac{1}{n^2}}{3}$。

(2)、(3) 亦按此法处理。

(4)、(5) 作出具体数列考虑。

【解答】 (1) $a_n=\frac{2n^2+1}{3n^2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$ 收敛。

(2) $a_n=\frac{n^2}{2n-1}=\dfrac{n}{2-\frac{1}{n}}$ ←分子、分母同除以n。

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ 发散。

(3) $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$ ←分子、分母同除以n。

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 收敛。 ←$n\to\infty$时$\frac{1}{n}\to0$。

(4) $a_n=1+(-1)^n$时，无穷数列$\{a_n\}$是

$0, 2, 0, 2, \cdots$

故，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不定，数列$\{a_n\}$是发散（摆动）的。

习　题　1

1. 判断由下式表示通项的各无穷数列的收敛与发散情

况，如收敛时求出极限。

(1) $\dfrac{n-2}{2n^2+3}$　　　　(2) $\dfrac{-n^2+1}{n+1}$ 散

(3) $\log_2\sqrt{\dfrac{8n+3}{n}}$ $\frac{3}{2}$　　　　(4) $\dfrac{(n-3)(5n-6)}{(4n+1)(6n+3)}$ $\frac{5}{24}$

(5) $1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 1　　　　(6) $(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ 发散

(7) $(-3)^n$ 发散

2. 数列的收敛与发散(2)

问　题　判断通项由下式表示的无穷数列的收敛与发散性，收敛时，求其极限。

(1) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$　　　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$

(3) $\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 发散　　　　(4) $\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$ $=0$

【技巧】 (1) 从形式上看来，当$n\to\infty$时，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$变为$\infty-\infty$，但因∞不是数，故不能写成$\infty-\infty=0$。因此，按

关键：根式的极限$\longrightarrow$考虑有理化

的方针处理，在大多数情况下是有效的。

本题中，分子、分母同乘以$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$，使分子有理化。　　←将原式看做分母为1的分数。

(3)、(4) 含有三角函数的式子的极限，写出具体的数列，或利用$|\sin\theta|\leqslant1$。

【解答】 (1) $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\times\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$$=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})=+\infty,$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ （收敛）

(2) $a_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}$

$$=\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n^2+n+1-n^2}$$ ←考虑了分母有理化。

$$=\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$ ←分子、分母同除以 n。

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,\qquad \therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$ （收敛）

(3) $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$时，数列$\{a_n\}$是

$$\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\pi,\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \sin2\pi,\ \cdots$$

此即

$$1,0,-1,0,\cdots$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不定（发散）

(4) 由 $a_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{2n\pi}{3}$，$-1\leqslant\sin\dfrac{2n\pi}{3}\leqslant1$ 可知，

$$-\frac{1}{n}\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n},$$

而因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ （收敛） ←这里应用了夹值法.

习 题 2

1. 判断通项由下式表示的各无穷数列的收敛与发散性，收敛时求其极限.

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $=\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ $=1$

(3) $(-1)^n\cos\frac{n\pi}{2}$ (4) $\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

(5) $\frac{\cos n\pi}{n+1}$ 0

3. 数列极限

问　题 求下列极限：

$$\frac{2\cdot3}{1\cdot2},\ \frac{3\cdot4}{2\cdot3},\ \frac{4\cdot5}{3\cdot5},\ \frac{5\cdot6}{4\cdot7},\ \cdots$$

(2) 求下列极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+n\cdot1]$$

【技巧】 求数列极限的基础是先求通项.

关键：数列极限 ⟶ 求其通项令 $n\to\infty$。

(2) 中，由于分子为$\sum_{k=1}^{n} k\cdot[2n-(2k-1)]$

$$=(2n+1)\sum_{k=1}^{n} k-2\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

故可引用公式

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

【解答】 (1) 通项 $a_n=\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(2n-1)}$ ←分子、分母同除以 n^2。

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2-\frac{1}{n}}$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{2}$

(2) 分子为$\sum_{k=1}^{n} k[2n-(2k-1)]$ ←$\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$=(2n+1)\sum_{k=1}^{n} k-2\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$=(2n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$ ←$\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$\therefore$ 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right.$

$$\left.-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]$$