

数学解题技巧

(第三卷 上册)

〔日〕矢野健太郎 著

张卓澄 马宝珊 李俊杓 译

501/240/19



责任编辑：田兆民 孙怀川

封面设计：蒋 明

数 学 解 题 技 巧

(第三卷 上册)

〔日〕矢野健太郎 著

张卓澄 马宝珊 李俊杓 译

黑 龙 江 人 民 出 版 社 出 版

(哈尔滨市道里森林街42号)

延边新华印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32·印张 14 6/16·字数 278,000

1983年9月第1版

1983年9月第1次印刷

印数 1-16,400

统一书号：13093·63

定价：1.25 元

译 者 的 话

本书译自日本东京工业大学名誉教授、理学博士矢野健太郎著《解法のテケニツケ》一书 1979 年三订版。

原书是根据日本现行高中数学的全部内容，按解题技巧加以分类、整理而编成的一部供高中学生系统复习和准备高考用的完备的参考指南。全书分 3 卷(数学 I、数学 II B、数学 III) 28 章 127 节，共精选出 782 个典型问题及约 2000 道习题，并给出了详细解答。这些问题及习题包括了所能想到的各种数学问题及其解题技巧。它对学生熟练地运用数学基础知识，提高数学解题能力十分有益，确实是广大高中学生、中学数学教师以及数学爱好者不可多得的一部内容丰富的好参考书。

为了使读者能够有效而全面地掌握数学解题技巧，作者通过精心的协调和安排，以条理清晰的形式，将有关的基础知识及其应用方法展示给读者，为此在各章的每一节中都安排了如下内容：

首先介绍基础知识 (Fundamentals)，简明扼要地分条列出该节有关的基本定义、公式、定理等，并指出了注意事项。

其次将该节的具体内容编排成一个一个的典型问题，并

详细阐述解答问题的思路和方法。对于解题中出现的,对其它问题也有普遍应用价值的常用技巧,冠以“关键”(Technique)字样;对于解题时要用到的,有普遍意义的公式、定理等,冠以“理论”(Theory)字样。凡“关键”和“理论”部分,一律用简洁的语言或公式表示出来,以便于读者的复习和记忆。

在阐明解题的思路和方法的基础上,给出了问题的完整的解答。其中对于容易出错的地方,冠以“当心”(Remark)字样,以提醒读者注意。对于解题过程中所依据的公式、计算方法和论证等,通过反向箭头“ $\leftarrow$ ”列在相应步骤的右边。

在每一问题的后面配备了若干同类型的习题,以供练习之用。对于个别较难的习题,标上“*”号,以示区别,初读时可以略过。这些习题的解题技巧与解答附于书末。

由于原书是按照日本高中数学大纲编写的,所以有个别章节(如空间坐标和向量、矩阵、概率分布、统计推断、微分方程、平面几何公理的构成、映射等)超过了我国现行中学数学教学大纲范围。但是,考虑到这些内容有的将陆续纳入我国三年制高中数学教学大纲,有的对中学教师和广大数学爱好者有一定的参考价值,因此,中译本将原书全部内容译出,以保持其完整性和系统性。

原书中,冠以“理论”、“关键”、“当心”字样的部分,都是以醒目的红蓝套色印刷的,中译本则一律用黑体字排出。对于原书中数字和符号上的个别印刷错误,我们已作纠正,不再一一注出。

本书中译本改为三卷六分册(每卷分上、下两册)出版。

7411240/19

译者分工如下：第一卷上册由马宝珊、李俊杓、安永德译，下册由李俊杓、安永德译；第二卷上册由颜秉海、颜建设译，下册由李开成译；第三卷上册由张卓澄、马宝珊、李俊杓译，下册由安永德、马宝珊译。李诵权、周师颖承担了第一、三卷各册的部分校对工作，林龙威承担了第二卷下册的校对工作。全书由颜秉海、李开成担任总审校。

在此谨向原著者、东京工业大学名誉教授矢野健太郎先生及黑龙江人民出版社致谢。

由于译者水平有限，难免出现缺点和错误，欢迎各位读者批评指正。

黑龙江大学数学系 颜秉海

1981年11月

目 录

第一章 数列的极限

§ 1 无穷数列.....1	收敛条件(2).....22
1. 数列的收敛与 发散(1)2	12. 图形与无穷等比 级数(1).....24
2. 数列的收敛与 发散(2)4	13. 图形与无穷等比 级数(2).....26
3. 数列极限.....6	14. 循环小数(1)28
4. 关于极限的性质9	15. 循环小数(2)30
5. 无穷等比数列 $\{r^n\}$ 的收敛与发散10	§ 3 无穷级数31
6. 含有 r^n 的数列的 极限12	16. 无穷级数和33
7. 各种数列的极限值14	17. 无穷级数的收敛与 发散(1).....35
§ 2 无穷等比级数15	18. 无穷级数的收敛与 发散(2).....36
8. 无穷等比级数和(1)17	§ 4 递推式与极限38
9. 无穷等比级数和(2)19	19. 两项间的递推式与 极限值40
10. 无穷等比级数的 收敛条件(1).....21	20. 三项间的递推式与 极限42
11. 无穷等比级数的	21. 各种递推式与 极限(1).....43

22. 各种递推式与 极限(2).....	45
--------------------------	----

23. 递推式与图象	47
---------------------	----

第二章 函数的极限

§ 5 函数的极限50

24. $\frac{0}{0}$ 不定型	51
-----------------------------	----

25. $\frac{\infty}{\infty}$ 与 $\infty - \infty$ 不定型	53
--	----

26. 各类函数的极限(1)	55
-------------------------	----

27. 各类函数的极限(2)	58
-------------------------	----

28. 系数的确定	59
-----------------	----

29. 三角函数的极限 (基本形式)	61
-----------------------------	----

30. 三角函数的极限 (公式应用)	63
-----------------------------	----

31. 指数函数与对数 函数的极限	65
----------------------------	----

32. 关于 θ 的极限	
---------------------	--

.....	68
-------	----

33. 稍为复杂的极限	69
----------------------	----

34. 图形的极限(1)	71
-----------------------	----

35. 图形的极限(2)	73
-----------------------	----

§ 6 函数的连续76

36. 右极限与左极限	77
----------------------	----

37. 函数的连续性	79
---------------------	----

38. 极限函数的图象	81
----------------------	----

39. 极限函数的连续性	83
-----------------------	----

40. 中值定理	85
----------------	----

第三章 微分法

§ 7 导数计算87

41. 根据定义求导数的 方法	89
--------------------------	----

42. 商的导数	91
----------------	----

43. 复合函数的导数(1)	93
-------------------------	----

44. 复合函数的导数(2)	94
-------------------------	----

45. 反函数的导数	96
---------------------	----

§ 8 各类函数的微分98

46. 三角函数的导数(1)	99
-------------------------	----

47. 三角函数的导数(2)	101
-------------------------	-----

48. 指数函数与对数	
-------------	--

函数的导数.....	102	58. 洛尔定理.....	123
49. 对数函数的导数		59. 平均值定理(1)	
.....	104		125
50. 指数函数的导数		60. 平均值定理(2)	
.....	105		126
51. 对数微分法.....	107	61. 单调递增函数与	
52. 用参变量表示的		单调递减函数	
函数微分法.....	108		128
53. 隐函数的微分法		62. 函数的极限与微商	
.....	110	(1)	129
54. 二阶导数.....	112	63. 函数的极限与微商	
55. 高阶导数(1)		(2)	131
.....	114	64. 微商在求不定型	
56. 高阶导数(2)		极限方面的应用	
.....	116		133
§ 9 导数的性质.....	117	65. 函数方程的导数	
57. 可微与连续.....	121		135

第四章 微分的应用

§ 10. 切线与法线.....	138		155
66. 切线方程(1)		§ 11 函数的增减与极值	
.....	140		156
67. 切线方程(2)		75. 有理函数的增减与	
.....	142	极值(1)	159
68. 切线方程(3)		76. 有理函数的增减与	
.....	143	极值(2)	161
69. 法线方程.....	145	77. 无理函数的增减与	
70. 切线的夹角.....	147	极值.....	163
71. 切线与定量计算问题		78. 三角函数的增减与	
.....	149	极值.....	164
72. 切点的轨迹.....	151	79. 指数函数、对数函数	
73. 曲线相切.....	153	的增减与极值	
74. 曲线簇与定切线			166

80. 隐函数的图象	168	96. 面积的最大值与最小值(3)	200
81. 函数的增减、凸凹及图象	170	97. 体积的最大值与最小值(1)	202
82. 曲线的拐点(1)	172	98. 体积的最大值与最小值(2)	204
83. 曲线的拐点(2)	174	99. 经济性与最小值问题	206
84. 二阶导数与极值	175	100. 最短时间问题(1)	208
85. 单调递增与单调递减的条件	179	101. 最短时间问题(2)	210
86. 有极值的条件	180	102. 二元函数的最大值与最小值	212
87. 关于极值问题	182	§ 13 速度与加速度	214
§ 12 最大值与最小值	184	103. 速度与加速度	216
88. 最大值与最小值(1)	185	104. 直线上的点的运动(1)	218
89. 最大值与最小值(2)	187	105. 直线上的点的运动(2)	220
90. 用换元法求最大值与最小值	189	106. 水面上升速度	221
91. 整数变量函数的最大值与最小值	191	107. 图形变化的速率	223
92. 某区间内的最大值与最小值	192	108. 平面上的点的运动(1)	225
93. 线段的最长与最短	194	109. 平面上的点的运动(2)	227
94. 面积的最大值与最小值(1)	196	110. 平面上的点的运动(3)	228
95. 面积的最大值与最小值(2)	198	§ 14 在方程与不等式方面的应用	230

111. 方程的实根数 (1)	232
112. 方程的实根数 (2)	233
113. 方程 $f(x) = k$ 的实根	235
114. 方程 $f(x) = kx$ 的实根	237
115. 实根的条件	238
116. 整除问题	240
117. 等根问题	242
118. 不等式 (最小值 > 0 型)	243
119. 不等式 (单调递增、递减型) (1)	245
120. 不等式 (单调递增、递减型) (2)	247
121. 单调递增、递减函数与不等式	249

122. 绝对不等式的成立条件	250
123. 平均值定理与不等式	252
124. 曲线的凸凹与不等式	253
125. 各种不等式 (1)	256
126. 各种不等式 (2)	258
§ 15 近似式	260
127. 一次近似式	262
128. 二次近似式	263
129. 近似值的计算	265
130. 接近于 $x = a$ 的近似式	266
131. 方程的根的近似值	268
132. 微小变化	270
习题解答	273

第一章 数列的极限

§ 1 无穷数列

基础知识

1. 无穷数列 $\{a_n\}$ 的收敛与发散

(1) 收敛 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (确定的有限值)

(2) 发散 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ (向正无穷发散)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (向负无穷发散)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (摆动)

2. 极限的性质

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} C a_n = C \alpha$ (C 为常数)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (复号顺序相同)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$

3. 无穷等比数列 $\{r^n\}$ 的收敛与发散

$r > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$

发散

$r = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$

$-1 < r < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

收敛

$r \leq -1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ (不定) 发散 (摆动)

4. 极限的求法

(1) $n \rightarrow \infty$ 时 $f(n)$ 的极限 $\rightarrow$ 将 $f(n)$ 化为 $\frac{1}{n}$ 的函数.

(2) 根式的极限 $\rightarrow$ 有理化.

(3) 含有 r^n 的式子的极限 $\rightarrow$ 分 $|r| > 1$ 、 $|r| = 1$ 及 $|r| < 1$ 三种情况计算之.

对于数列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ (也可简写为 $\{\alpha_n\}$), 当 n 无限增大时, α_n 无限地趋近于定值 α , 则记为

$$n \rightarrow \infty \text{ 时 } \alpha_n \rightarrow \alpha \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$$

此 α 叫做无穷数列 $\{\alpha_n\}$ 的极限. 同时, 称此无穷数列 $\{\alpha_n\}$ 为收敛. 这样, 凡不收敛的统称为发散.

例如, 无穷数列 $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$,

$$n \rightarrow \infty \text{ 时 } \alpha_n = 2n-1 \rightarrow +\infty$$

此时, 称此无穷数列向正无穷发散.

此外, 如无穷数列 $1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots$, 虽为发散的无穷数列, 但既不向 $+\infty$ 发散, 又不向 $-\infty$ 发散, 而是摆动的, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ 叫做不定.

1. 数列的收敛与发散(1)

问 题 由下式表示通项的无穷数列收敛吗?

$$(1) \frac{2n^2+1}{3n^2} \quad (2) \frac{n^2}{2n-1} \quad (3) \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$(4) 1+(-1)^n \quad (5) (-2)^n$$

【技巧】 求通项是关于 n 的分式的无穷数列的极限时, 根据

理论: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$ ($k > 0$).

分子、分母同除以分母的最高次项, 化为 $\frac{1}{n}$ 的函数. 例如:

(1) 中, 分子、分母同除以 n^2 化为 $\frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3}$.

(2)、(3) 亦按此法处理.

(4)、(5) 作出具体数列考虑.

【解答】 (1) $a_n = \frac{2n^2 + 1}{3n^2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n^2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$ 收敛.

(2) $a_n = \frac{n^2}{2n-1} = \frac{n}{2 - \frac{1}{n}}$

← 分子、分母同除以 n .

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 发散.

(3) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$

← 分子、分母同除以 n .

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 收敛.

← $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

(4) $a_n = 1 + (-1)^n$ 时, 无穷数列 $\{a_n\}$ 是

0, 2, 0, 2, ...

故, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不定, 数列 $\{a_n\}$ 是发散 (摆动) 的.

习 题 1

1. 判断由下式表示通项的各无穷数列的收敛与发散情

况, 如收敛时求出极限.

$$(1) \frac{n-2}{2n^2+3}$$

$$(2) \frac{-n^2+1}{n+1} \quad \text{no}$$

$$(3) \log_2 \sqrt{\frac{8n+3}{n}} \quad \frac{3}{2}$$

$$(4) \frac{(n-3)(5n-6)}{(4n+1)(6n+3)} \quad \frac{5}{24}$$

$$(5) 1 + (-1)^n \frac{1}{n} \quad -1$$

$$(6) (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{发散}$$

$$(7) (-3)^n \quad \text{发散}$$

2. 数列的收敛与发散(2)

问 题 判断通项由下式表示的无穷数列的收敛与发散性, 收敛时, 求其极限.

$$(1) \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$$

$$(3) \sin \frac{n\pi}{2} \quad \text{发散}$$

$$(4) \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{3} = 0$$

【技巧】 (1) 从形式上看来, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ 变为 $\infty - \infty$, 但因 ∞ 不是数, 故不能写成 $\infty - \infty = 0$. 因此, 按

关键: 根式的极限 $\rightarrow$ 考虑有理化

的方针处理, 在大多数情况下是有效的.

本题中, 分子、分母同乘以 $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$, 使分子有理化.

$\leftarrow$ 将原式看做分母为 1 的分数.

(3)、(4) 含有三角函数的式子的极限, 写出具体的数列, 或利用 $|\sin \theta| \leq 1$.

【解答】 (1)
$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}) = +\infty,$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (收敛)

(2)
$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1} + n}{(\sqrt{n^2+n+1} - n)(\sqrt{n^2+n+1} + n)}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+n+1} + n}{n^2+n+1-n^2}$$

← 考虑了分母有理化.

$$= \frac{\sqrt{n^2+n+1} + n}{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}{1 + \frac{1}{n}}$$

← 分子、分母同除以 n .

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ (收敛)

(3) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是

$$\sin \frac{\pi}{2}, \sin \pi, \sin \frac{3\pi}{2}, \sin 2\pi, \dots$$

此即

$$1, 0, -1, 0, \dots$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不定 (发散)

(4) 由 $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{3}$, $-1 \leq \sin \frac{2n\pi}{3} \leq 1$ 可知,

$$-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n},$$

而因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (收敛)

←这里应用了夹值法。

习 题 2

1. 判断通项由下式表示的各无穷数列的收敛与发散性，收敛时求其极限。

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ $\xrightarrow{\text{有理化}} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} = 1$

(3) $(-1)^n \cos \frac{n\pi}{2}$

(4) $\sin \left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

(5) $\frac{\cos n\pi}{n+1}$

3. 数列极限

问 题 求下列极限：

$\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 1}, \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}, \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3}, \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5}, \frac{5 \cdot 6}{4 \cdot 7}, \dots$

(2) 求下列极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [1 \cdot (2n-1) + 2 \cdot (2n-3) + 3 \cdot (2n-5) + \dots + n \cdot 1]$$

【技巧】求数列极限的基础是先求通项。

关键：数列极限 $\rightarrow$ 求其通项令 $n \rightarrow \infty$ 。

(2) 中, 由于分子为 $\sum_{k=1}^n k \cdot [2n - (2k - 1)]$

$$= (2n+1) \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k^2,$$

故可引用公式

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

【解答】 (1) 通项 $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n(2n-1)}$ $\leftarrow$ 分子、分母同除以 n^3 .

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{2 - \frac{1}{n}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

(2) 分子为 $\sum_{k=1}^n k[2n - (2k - 1)]$ $\leftarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$= (2n+1) \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= (2n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$- 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \leftarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

□ □ □