高等学校教学用书

# 高等数学导引

吴迪光 编著

浙江大学出版社

## 内 容 简 介

本书基本上是根据教育部1980年制定的高等工业院校高等数学教学大纲的要求编写的，也是作者多年来在教学工作实践基础上形成的。

全书共八章：函数、极限、导数与微分、导数的应用、一元函数的积分学、多元函数的微分学、多元函数的积分学、无穷级数与含参变量积分等.

该书可作为高等院校工科和非数学专业的理科大学生、电大、函授大学有关专业和其他自学者复习高等数学的教学用书。

高等数学导引

吴迪光 编著

责任编辑 涂 红

* * *

浙江大学出版社出版

浙江大学印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

787×1092 16开本 17 印张 381千字

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

印数： 1—5000

ISBN 7-308-00037-0

O·015 定价：2.85元

（统一书号：13337·009）

# 前　言

高等数学是一门重要的基础课，理论性强，解题方法灵活多样。每当课程结束阶段，把内容前后联系起来，进行综合性的练习，使内容系统化、条理化，解题方法多样化，可以说是一个必不可少的步骤。编者希望本书能为读者学习高等数学联系前后内容，提供综合性的解题方法，加深对基础知识的认识和理解，

本书内容基本上符合高等工业院校适用的高等数学教学大纲，以及国家教育委员会研究生司1987年全国工学、经济学硕士生入学考试数学复习大纲所规定的要求。凡涉及非上述大纲要求的内容，皆标以星号，便于各学科对数学水平的不同要求进行选用。

本书每章按“本章内容轮廓”、“疑难内容浅析”、“解题方法选介”、“自我检查试题”四部分安排，书末附试题答案与提示。为了节约篇幅，凡教科书中常见的叙述性内容，不再一一列出，以便重点放在疑难内容的分析和解题方法的介绍上。自我检查试题这部分，约60%是基本内容，40%具有一定的综合性和灵活性的问题，以期读者理解、分析、应用、综合和评价所学内容，较全面地掌握知识，提高能力。

本书共分八章：函数、极限、导数与微分、导数的应用、一元函数的积分学、多元函数的微分学、多元函数的积分学、无穷级数与含参变量积分等。

全国高等学校工科数学教材编审委员会委员周茂清教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

对于书中不足之处，恳切地希望读者提出宝贵意见。

吴迪光

1987年3月

# 目　录

# 第一章　函　　数

## 1.1　本章内容轮廓

- 函　　数
  - 定义
    - 定义域
    - [illegible]
    - 对应规律
  - 表达方式
    - 表格法
    - 图形法
    - 解析式法
      - 按形式
        - 显函数
        - 隐函数
        - 参数式函数
      - 按结构
        - 初等函数
        - 非初等函数
      - 按自变量的个数
        - 单元函数
        - 多元函数
  - 几种性质
    - 单值性
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 反 函 数
    - 定义
    - 存在性定理

## 1.2 疑难内容浅析

### 1.2.1　函数概念

“函数”是高等数学的一个基本概念，它贯穿课程的始终，正确理解这个概念是非常重要的。现在国内外教科书中关于“函数”一词常有两种不同的说法，为了考察其差异所在，现从历史的角度浅析于下：

函数这个术语是莱布尼兹于1673年引入的，它用来表示一个量对另一个量的依赖关系，或者说，一个量的值由另一个量的值来确定的意思。在理论研究时，为了不必具体地写出函数式子，瑞士数学家欧拉提出用字母 $f$ 来表示一个函数，记号

$$y=f(x) \tag{2.1}$$

表达 $y$ 的值依赖于 $x$ 的值的意思.

函数这个词的意义，经历了许多推广的阶段，现在常指的是：给定两个非空的集合 $A$ 与 $B$，函数是一个法则，对于 $A$ 中每一个元素 $x$，它确定 $B$ 中唯一的一个元素 $f(x)$，$f(x)$ 称为函数 $f$ 在 $x$ 处的值，或称在 $f$ 下 $x$ 的象. 集合 $A$ 称为 $f$ 的定义域，当 $x$ 在定义域 $A$ 中变化时，所有函数值 $f(x)$ 所成的集合，叫做 $f$ 的值域，可表示为

$$\{f(x)|x\in A\}\subseteq B.$$

函数还用如下记号：

$$f:\ A\to B,$$
$$x\mapsto y=f(x).$$

综上所述，对"函数"一词的两种不同说法中，一种是将(2.1)中因变量 $y$ 说成是 $x$ 的函数，这是沿用莱布尼兹早些时候的说法，它强调 $y$ 是依赖于 $x$ 的变量，在使用上有简便之处. 而另一种，函数是指对应法则(规律) $f$，不是指因变量 $y$，它强调了变量与变量间的对应(映射)思想,这是沿用了欧拉早些时候的说法,它有利于从几何上理解函数的意义.

### 1.2.2 函数的等同

函数完全由对应法则与定义域确定，至于自变量和因变量本身的具体意义，以及用什么记号来表示，在作一般性讨论中，那是无关紧要的，例如

$$f(x)=x^2 \quad 与 \quad g(t)=t^2$$

是同一个函数，而

$$y=\ln x^2 \quad 与 \quad y=2\ln x$$

由于它们的定义域不同，因此不能说这两个函数等同. 所谓两个函数 $f$ 与 $g$ 等同，是指定义域相同，且对定义域中每一个 $x$，都有 $f(x)=g(x)$.

例 1 求函数 $f(x)$ $(x\neq 0)$，已知对任意实数 $t\neq 0$，关系式

$$af(t)+bf\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{c}{t}$$

成立. 其中 $a,b,c$ 为常数，且 $|a|\neq|b|$.

解 由于 $t$ 可取任一不为零的实数，所以当 $x\neq 0$ 时，可分别令 $t=\frac{1}{x}$ 及 $t=x$，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \tag{2.2}$$

与

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \tag{2.3}$$

以 $b$ 乘(2.2)式减去 $a$ 乘(2.3)式，得

$$b^2f(x)-a^2f(x)=bcx-\frac{ac}{x}$$

所求

$$f(x)=\frac{bcx^2-ac}{(b^2-a^2)x}$$

问题 已知 $f(x^2+\frac{1}{x^2})=x^4+\frac{1}{x^4}$，求 $\int f(\ln x)dx$

### 1.2.3 实数的基本性质

本书中研究的函数是实函数，即其定义域与值域都是实数域。因此，了解实数的三个基本性质是必要的。

1. 有序性 任意两个实数$x$，$y$之间，必有且仅有下列三种关系之一：

$$x<y;\quad x=y;\quad x>y.$$

2. 稠密性 任意两个不同的实数$x$，$y$之间，有无数多个有理数或无理数。

3. 连续性 全体实数与数轴上的全体点之间有着一一对应关系，也就是说，实数充满整个数轴，而没有任何空隙(注)。实数可用数轴上的点来表示，据此，为便于应用，常把实数和点不加区别。

例 1 若$x$，$y$为实数，且$x<y$，则

$$x<\frac{x+y}{2}<y$$

即$\frac{x+y}{2}$就是$x$与$y$之间的一实数。

又若$a/b<c/d$，且$b$，$d$是正数，则

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

即$a+c/(b+d)$是$a/b$，$c/d$之间的一数。

例 2 试证 对$x$和$y$的一切实数值均满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{2.4}$$

唯一连续函数$f(x)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$是齐次线性函数$f(x)=ax$，式中$a=f(1)$是常数。

证 (1) 设$m$与$n$为正整数，由(2.4)有

$$\begin{aligned}f(mx)&=f[x+(m-1)x]=f(x)+f[(m-1)x]\\&=f(x)+f(x)+f[(m-2)x]\\&=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=mf(x).\end{aligned}$$

又 $$f(x)=f\left(n.\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)$$

故有 $$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x).$$

于是 $$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

又在(2.4)中，令$y=0$，得$f(x)=f(x)+f(0)$。故$f(0)=0$；又令$y=-x$，得$f(0)=f(x)+f(-x)$，故$f(-x)=-f(x)$。于是

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

综上所述，对任何有理数$c$，有$f(cx)=cf(x)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$。

---

注：关于用集合的语言描述实数的连续结构见《数学分析》，复旦大学编，上海科技出版社。

(2) 再证对任何无理数$c$，有$f(cx)=cf(x)$。由有理数的稠密性，取一串有理数$c_n$，使当$n\to\infty$时，$c_n\to c$。于是由(1)的结论

$$f(c_n x)=c_n f(x),\ n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{2.5}$$

令$n\to\infty$，在(2.5)式两边取极限，注意到$f$在点$cx$处连续，于是

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n x)=f(cx)$$

从而，对任何无理数$c$有 $f(cx)=cf(x)$。

因此，对任何实数$x$和$c$有$f(cx)=cf(x)$。

由(1)与(2)，对任何实数$x$，有

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax$$

式中$a=f(1)$。证毕。

注：本题如将条件稍作变动，则证明方法完全不同。

设$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内有定义且在点$x=0$处连续，对$x$和$y$的一切实数值均满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

又设$f'(0)=a$（常数），则$f(x)$是齐次线性函数。

事实上，令$x=y=0$，有$f(0+0)=f(0)+f(0)$，故$f(0)=0$。

对任意$x\in(-\infty.\ +\infty)$，由

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]=\lim_{h\to 0}[f(x)+f(h)-f(x)]=\lim_{h\to 0}f(h)=f(0)=0$$

故$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内连续。

又由于 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)=a$$

故$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$可导，且$f'(x)=a$，于是

$$f(x)=ax+c \qquad (c\text{为任意常数})$$

由$f(0)=0$，故$c=0$。因此所求函数为

$$f(x)=ax.$$

问题1 对$x$和$y$的一切实数值均满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 的唯一不恒为零的连续函数$f(x)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，问$f(x)$取什么形式？

问题2 对$x$和$y$的一切实数值均满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的唯一不恒为零的连续函数$f(x)$，$x\in(0,\ +\infty)$，问$f(x)$取什么形式？

### 1.2.4 分段函数

若一个函数在其定义域内，需用两个或两个以上的解析式来分段表示，这种函数叫做分段函数。

例 设$\varphi(x)$，$x\in[a,\ c)$；$\phi(x)$，$x\in[c,\ b]$均是初等函数，则

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{当}x\in[a,c);\\ \phi(x), & \text{当}x\in[c,b]\end{cases}$$

是一个分段函数，它系用两个解析式分段表达而成，不能因此误解它是两个函数。函数$f(x)$的性质，在区间$[a,\ c)$和$[c,\ b]$内按初等函数进行研究，但在分段点$x=c$处，需对

该点左右两侧：$(c-\delta, c)$，$(c, c+\delta)$，$(\delta>0)$分别进行研究后，再综合考虑．例如：为了考虑在$x=0$处$f(x)=|\sin x|$的连续性与可导性，需考查在$x=0$的一个$\delta(\delta<\frac{\pi}{2})$邻域，

由
$$f(x)=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\delta;\\ -\sin x, & -\delta<x<0.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sin x=0;\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-\sin x)=0.$$

因此，
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0.$$

又
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1.$$

因此，$f'_+(0)\neq f'_-(0)$．

综上所述，$f(x)=|\sin x|$，在$x=0$处连续但不可导．

### 1.2.5 复合函数

设函数$y=f(u)$，$u\in E$，及$u=\varphi(x)$，$x\in D$，且当$x\in D$时，相应的$u=\varphi(x)\in E$，这时构成复合函数

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in D$$

这个复合函数的定义域与函数$\varphi$的定义域相同，是因为假定了$\varphi$的值域不超过$f$的定义域．如果当$x\in D$时，对应的$u$值有一部分超出了$f$的定义域$E$，这时必须适当地限制$x$的变化范围，使相应的$u$值完全落在$E$中，方能定义出复合函数．

例　函数$\varphi(x)=\ln x$的定义域是$x>0$，$f(u)=\sqrt{u}$的定义域是$u\geqslant 0$，则复合函数

$$f[\varphi(x)]=\sqrt{\ln x}$$

的定义域是$x\geqslant 1$．这里对函数$\varphi$的定义域作了限制，舍去了$0<x<1$的部分．

对于分段函数的复合函数，问题要复杂些．

例　设　$\varphi(x)=\begin{cases}x^3, & \text{当}x\leqslant 0,\\ x, & \text{当}x>0;\end{cases}$　$\phi(x)=\begin{cases}2, & \text{当}x\leqslant 0,\\ -x^2, & \text{当}x>0.\end{cases}$

试求　$\varphi[\phi(x)]$．

解　当$x\leqslant 0$时，$\phi(x)=2>0$，$\therefore \varphi[\phi(x)]=\varphi(2)=2$．

当$x>0$时，$\phi(x)=-x^2<0$，于是$\varphi[\phi(x)]=\varphi(-x^2)=(-x^2)^3=-x^6$，故

$$\varphi[\phi(x)]=\begin{cases}2, & \text{当}x\leqslant 0;\\ -x^6, & \text{当}x>0.\end{cases}$$

在本题中，请读者求$\phi[\varphi(x)]$，并问这两个函数$\varphi$与$\phi$的复合，是否与次序有关？

### 1.2.6 函数的单调性和反函数

对于定义域$E$中每一个$x$的值，只确定一个$y$值的函数就是单值函数，否则是多值函数．如1.2.1所述，高等数学中使用“函数”一词均指单值函数．应加注意的是，一个单

值函数的反函数不一定是单值函数。例如

$f(x)=2^x$，它的反函数$f^{-1}(x)=\log_2 x$是单值函数；

$f(x)=\sin x$，它的反函数$f^{-1}(x)=\mathrm{Arcsin}x$是多值函数。

由于研究中通常限于单值函数，对多值函数都拆成若干个单值分支，分别讨论。例如，$y=\mathrm{Arcsin}x$的主值$y=\arcsin x$（$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$）便是它的一个单值分支，而其他各支与这一支有关系式

$$\mathrm{Arcsin}x=(-1)^k\arcsin x+k\pi,\qquad（k\text{为整数}）.$$

一个函数在什么条件下，其反函数必存在？回答是：严格单调增（减）的函数必有严格单调增（减）的单值反函数（反函数存在的充分条件）。前面叙述的$f(x)=2^x$在其定义域内是严格单调增加的，它的反函数$f^{-1}(x)=\log_2 x$在其定义域内也是单值严格单调增加的。

判定函数的单调（增或减）性，一般方法是利用拉格朗日中值定理，按导数的符号来进行判定；在简单情况下，按函数单调性定义直接考察。基本初等函数在它的定义区间内，或它的定义区间的某一部分具有单调性。

单调函数具有如下性质：

1. 两个单调增（减）函数之和是单调增（减）函数；
2. 两个正的单调增（减）函数之积是单调增（减）函数；
3. 若$u=\varphi(x)$在$[a,\ b]$上单调增（减），$y=f(u)$在$[\varphi(a),\ \varphi(b)]$（$[\varphi(b),\ \varphi(a)]$）上单调增（减），则$y=f[\varphi(x)]$在$[a,\ b]$上单调增；
4. 设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$为单调增函数，且$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，则
$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)].$$

### 1.2.7 函数的周期性

对于周期函数$f(x)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，成立关系式

$$f(x+T)=f(x),\quad（\text{常数}T\neq 0）. \tag{2.6}$$

当$T$是它的周期，那么$nT$（$n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots$）也是它的周期，通常函数的周期$T$，指的是最小（正）周期。应当指出：并非每一个周期函数，都有最小（正）周期。

例如，任何实数$a>0$都是函数$f(x)=C$（$C$为常数）的周期，所以它没有最小周期。

又如 狄里克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

它是一个周期函数，任何有理数$r$都是$D(x)$的周期。事实上，若$x$为有理数，那么$x+r$也是有理数，故$D(x+r)=1=D(x)$；若$x$是无理数，那么$x+r$也是无理数，故$D(x+r)=0=D(x)$。可见$r$为$D(x)$的周期。但是，它没有最小周期。

对于一个函数，若找不到符合(2.6)式中的正数$T$，则不是一个周期函数。

例如 $\sin(x^2)$的相邻二零点间的距离

$$d=\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}\xrightarrow{k\to+\infty}0,$$

故零值点不呈周期分布，也就找不到符合(2.6)式的正数$T$，

又如　$\operatorname{tg}\sqrt{x}$的相邻二零点间的距离

$$d=(k+1)^2\pi^2-k^2\pi^2=\pi^2(2k+1)\xrightarrow{k\to+\infty}+\infty,$$

故二者都不是周期函数.

如果一个函数具有周期性，可将问题简化在一个周期内进行讨论，其他地方的性质，可由关系$f(x+T)=f(x)$直接推出.

周期函数具有如下性质：

1. 设$f(x)$的周期为$T_1=k_1T$，$g(x)$的周期为$T_2=k_2T$（$k_1$，$k_2$为整数，$T$为$T_1$，$T_2$的公约数），于是$f(x)+g(x)$与$f(x)\cdot g(x)$的周期为$k_1k_2T$.

2. 可导的周期函数其导数仍是周期函数，它们具有相同的周期.

3. 可积的周期函数的原函数，不一定是周期函数，仅当

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \text{ 满足} \int_a^{a+T} f(t)dt=0$$

时，才是周期函数. 事实上

$$F(x+T)=\int_a^{x+T} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+T} f(t)dt$$
$$=\int_a^x f(t)dt+\int_a^{a+T} f(t)dt=F(x)+\int_a^{a+T} f(t)dt.$$

当$\int_a^{a+T} f(t)dt=0$时,$F(x+T)=F(x)$，即$F(x)$是周期函数.

问题 1　若实数$x=n+r$，其中$n$为整数，而$0\leqslant r<1$，则定义$[x]=n$，$[x]$就是不超过$x$的最大整数. 试考察函数

$$f(x)=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$$

是否是周期函数？如果是，能否确定它的最小周期.

问题 2　设函数$f(x)$，如果对于定义域内任何值$x$，都有$f(2a-x)=f(x)$，则称函数$y=f(x)$对称于$x=a$. 试证，若函数$y=f(x)$对称于$x=a$，也对称于$x=b$（$a\neq b$），那么函数$y=f(x)$是周期函数.

### 1.2.8　函数的奇偶性与延拓

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于$Oy$轴对称. 因此，如果我们知道函数$f$在区间$(-l,\ l)$上具有奇偶性，就可将问题简化在$(0,\ l)$上进行讨论，因为在$(-l,\ 0)$上的情况完全可以由对称性推出.

设$f(x)$为定义在$(-\infty,\ +\infty)$内的任何函数，则$G(x)\equiv f(x)+f(-x)$是偶函数；而$H(x)\equiv f(x)-f(-x)$是奇函数.

在实际应用中，有时会遇到把一个函数按照某种对称性进行延拓.

例　将函数

$$\varphi(x)=x,\quad x\in[0,\ 1]$$

延拓成整个实轴上周期为 2 的偶函数.

解　先将函数$\varphi$偶延拓到$(-1,\ 0)$，得

$$f(x)=\begin{cases} x, & 当x\in[0,1]; \\ -x, & 当x\in(-1,0). \end{cases}$$

然后再将函数$f(x)$作周期为 2 的延拓，得

$$F(x)=\begin{cases} x-2n, & 当2n\leqslant x\leqslant 2n+1; \\ -[x-2(n+1)], & 当2n+1<x<2(n+1) \end{cases}$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\ \cdots.$$

还可概括写成 $F(x)=\left|x-2\left[\frac{x+1}{2}\right]\right|,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

问题 1　在对称于原点的区间内有定义的函数，能否既是奇函数又是偶函数？试说明理由。

问题 2　设$f(x)$是具有二阶连续导数的偶函数，并且$f''(0)\neq 0$。证明：点$x=0$是$f(x)$的极值点。

### 1.2.9　显函数、隐函数、参数方程表示的函数（参数式函数）

一元函数中，因变量 $y$ 能用含自变量 $x$ 的算式

$$y=f(x)$$

表示的函数是显函数。凡能用二元方程

$$F(x,\ y)=0 \tag{2.7}$$

确定的函数$y=y(x)$或$x=x(y)$称为隐函数．什么条件下，(2.7)能够肯定 $x$ 与 $y$ 之间的确存在函数关系？这个问题是隐函数存在性定理回答的，即$F(x,\ y)$满足在区域$D$：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$上$F'_x$，$F'_y$连续，且$F(x_0,y_0)=0$，如果$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则在点$(x_0,\ y_0)$的某一邻域内，$F(x,y)$可唯一地确定一个函数 $y=y(x)$．同理，如 $F'_x(x_0,y_0)\neq 0$，可以确定一个函数$x=x(y)$。由于 $x$ 与 $y$ 的对应关系是唯一确定的，这就保证了 $x=x(y)$ 是函数 $y=y(x)$的反函数。

应当指出，隐函数存在性定理只是保证在一定条件下，二元方程(2.7)规定了$y$对 $x$ 的依赖关系$y=y(x)$（或 $x$ 对 $y$ 的依赖关系$x=x(y)$），而并没有保证将这种依赖关系用$x$（或 $y$）的具体表达式按显函数的形式表示出来．正是由于这一点，通常将由(2.7)所确定的函数$y=y(x)$或$x=x(y)$称为隐函数。

例　从理论天文学中归结出来的开普勒方程

$$x+\varepsilon\sin y-y=0,\quad x\in(-\infty,\ +\infty).$$

式中 $\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$是行星轨道的离心率，$x$ 与 $y$ 分别表示行星的平近点角和偏近点角。

这时，设$F(x,\ y)=y-\varepsilon\sin y-x$，于是

$$F'_y=1-\varepsilon\cos y>0,$$

所以 $y$ 对于 $x$ 的隐函数肯定是存在的，但不能用显函数的形式$y=y(x)$表示出来。隐函数的理论在微分方程和几何学中有重要的作用。

与上述情况不同，若 $y$ 对 $x$ 的关系不是直接给定，而是由 $x$ 及 $y$ 对于第三个辅助变量（参变量）的关系所给定时，

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases} \qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta \tag{2.8}$$

对于参变量 $t$ 的每一数值，由(2.8)确定坐标平面$Oxy$上一点$(x, y)$，这点随着 $t$ 的变动在平面上画出一曲线。(2.8)称为这曲线的参数方程式。

如果$x=\varphi(t)$有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，将此反函数代入$y=\phi(t)$，得复合函数

$$y=\phi[\varphi^{-1}(x)] \tag{2.9}$$

这里，$t$ 是中间变量。从而 $y$ 用 $x$ 的显式表示出来。方程(2.8)所表达的 $y$ 对 $x$ 的函数关系，称为参数方程表示的函数$y=y(x)$，简称为参数式函数。

用参数式表示的函数的最大好处是常常可将多值函数化为单值函数来讨论。

例 由圆的方程$x^2+y^2=a^2$确定的隐函数$y=y(x)$是多值函数，将它改写为参数式

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \qquad 0\leqslant t<2\pi$$

就避免了讨论多值函数的困难。

在物理学中，质点的运动方程常用参数方程表示。如一质点沿半径为 $a$ 的圆周作等角速度 $\omega$ 运动，运动方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \end{cases} \tag{2.10}$$

这里，$t$ 表示时间.只要知道质点运行的时间 $t$，就可确定质点所在的位置$(x, y)$坐标.也就是说，由(2.10)可以掌握该质点运动过程中何时位于何地.这也是参数式函数的优越之处.

### 1.2.10 初等函数与非初等函数

由基本初等函数经过有限多次四则运算（加、减、乘、除）以及有限多次复合步骤所构成的函数，统称为初等函数。这是一类最常见的函数，它有许多好的性质，例如：它在定义区间上是连续的，因而也是可积的。只要利用基本初等函数的导数公式及导数运算法则，就能求出任何一个初等函数的导数。但非初等函数一般不具有上述初等函数的性质。例如一个无穷级数的和函数，只有在一致收敛的条件下，才能保证它的连续性和可积性。因此，对非初等函数不要简单地套用初等函数的性质，而应根据它特有的性质进行研究。

## 1.3 解题方法选介

本节介绍各种解析式表达的函数及某些运算方法，使对有关函数的解题方法有一个概括的了解。

### 1.3.1 简单函数

例 1 设$f(\cos x)=\cos 17x$，试求$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

解 由于 $f(\sin x)=f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos 17\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{2}-17x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-17x\right)=\sin 17x.$$

因此
$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\sin 17x dx=-\frac{1}{17}\cos 17x\Big|_0^{\pi}$$
$$=-\frac{1}{17}(\cos 17\pi-\cos 0)=-\frac{1}{17}[(-1)^{17}-1]=\frac{2}{17}.$$

例 2　设$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))$，$k=1,2,\cdots$. 试证
$$\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)dx=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\qquad(n\to\infty)$$

证　先求出$f_n(x)$。由于当$n=2$时
$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

设$n=k$($k$为大于 1 的正整数)时，$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，

则当$n=k+1$时，有
$$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

由数学归纳法，对任何自然数$n$，有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

于是
$$\int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)dx=\int_0^{\sqrt{n}}\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}dx=\frac{1}{2n}\int_0^{\sqrt{n}}(1+nx^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+nx^2)$$
$$=\frac{2}{2n}(1+nx^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{n}}=\frac{1}{n}(\sqrt{1+n^2}-1)$$
$$=\frac{1}{n}\left[n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\xlongequal{\text{泰勒公式}}\frac{1}{n}\left[n\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1\right]$$
$$=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).(n\to\infty)\qquad \text{证毕}$$

### 1.3.2　极限函数

当$t\to\infty$时，二元函数$f(x,t)$对每一固定的$x$的值，若极限
$$\lim_{t\to\infty} f(x,t)$$
存在，则其极限值是$x$的函数，它称为极限函数，记为
$$f(x)=\lim_{t\to\infty} f(x,t).$$

例 1　设　$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$，　求$f(x)$.

解 注意到当$t\to+\infty$时，指数函数$e^{tx}$的极限与$x$的符号有关，因此，将$x$的值分别固定在$(-\infty,\ 0)$，$(0,\ +\infty)$，以及$x$取0时三种情况进行考虑．求得

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=\begin{cases}x, & \text{当}x<0;\\ \frac{1}{2}, & \text{当}x=0;\\ 1, & \text{当}x>0.\end{cases}$$

例2 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[\lim\limits_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m]$，求$f(x)$．

解 当$x$为有理数时，记$x=\frac{q}{p}$($p$，$q$互为质数)，当$n\geqslant 2|p|$时，$n!\pi x$就是$2\pi$的整数倍，$\cos(n!\pi x)=1$．因而，当$m\to\infty$时$(\cos n!\pi x)^m$的极限也是1．当$x$为无理数时，对每一固定的$n$，都有$|\cos(n!\pi x)|<1$，故当$m\to\infty$时，$(\cos n!\pi x)^m$的极限是0．从而，当$n\to\infty$时，它的极限也是0．即得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}[\lim_{m\to\infty}(\cos n!\pi x)^m]=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数};\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}.\end{cases}$$

这就是前面讲到过的狄里克雷函数，它通过初等函数用二次极限来表示．

### 1.3.3 定积分是变上限的函数

设$f(x)$在含有点$x=a$的某区间$E$上连续，对任一点$x\in E$，积分

$$\int_a^x f(t)dt,\quad x\in E$$

定义了一个变上限$x$的函数，记为

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in E.$$

且$F(x)$在区间$E$上是可导的，即有

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x).$$

例1 设函数$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$内连续，且

$$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$$

证明 1. 若$f(x)$为偶函数，则$F(x)$也是偶函数；

2. 若$f(x)$为非增，则$F(x)$为非减．

证 1 由 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$，于是

$$F(-x)=-x\int_0^{-x}f(t)dt-2\int_0^{-x}tf(t)dt$$

$$\overset{\text{令}t=-u}{=\!=\!=}-x\int_0^x f(-u)d(-u)-2\int_0^x(-u)f(-u)d(-u)$$

$$\overset{f(-u)=f(u)}{=\!=\!=\!=}x\int_0^x f(u)du-2\int_0^x uf(u)du=F(x)$$

即$F(x)$是偶函数．