

數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

Memorabilia Mathematica

數學家言行錄

〔美〕莫裏茲 編著
朱劍英 編譯



数学方法论丛书

数学家言行录

[美]R. E. 莫里兹 编著
朱 剑 英 编译

江苏教育出版社

1990·南京

(苏)新登字:

MEMORANDA OF MATHEMATICA
OR
THE PHILOMATH'S QUOTATION-BOOK
BY
ROBERT EDOUARD MORITZ, P.H.D., P.H.N.D.
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE
UNIVERSITY OF WASHINGTON
NEW YORK
THE MACMILLAN COMPANY
1914
All rights reserved

数学方法论丛书
数学家言行录
〔美〕R.E.莫里兹编著
朱剑英 编译

出版发行:江苏教育出版社
(南京中央路165号, 邮政编码:210009)
经 销:江苏省新华书店
印 刷:淮海印刷厂

开本 850 × 1168 毫米 1/28 印张 4.25 字数 92,500
1990年7月第1版 1992年3月第2次印刷
印数 2,501—7,530册

ISBN 7—5343—1100—4

G · 971

定价: 1.70 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误, 可向承印厂调换

《数学方法论丛书》顾问

王梓坤 胡世华 胡国定 程其襄

《数学方法论丛书》编辑委员会

主 编:徐利治

副主编:朱梧楨 萧文强

编 委:(按姓氏笔画为序)

王兴华 王鸿钧 朱梧楨 刘凤璞

吴学谋 吴望名 欧阳绛 郑毓信

赵振威 徐利治 唐复苏 萧文强

出版说明

如大家所知,数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问,已有很长的历史,而且内容极为丰富。16世纪以来,如笛卡尔(Deacartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincaré)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者,都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言,以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例,他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究,出版了一系列论著,并被译为多种文字,受到全世界的普遍重视,被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国,也有许多学者在各种不同的场合屡次指出:要在数学教材与教学过程中,注意对形成数学概念的认识过程的分析,努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段,特别是我国数学家徐利治教授,他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流,结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状,深感在教学与科研领域中,有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下,我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课,出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物,这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来,在现今的数学教育与数学教学过程中,主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练,对于如何教给学生以寻找真理和发现

真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的造创能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去，特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》（以下简称丛书），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其它两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年1月

目

录

一	数学的定义及其研究对象.....	1
二	数学的本性.....	6
三	对数学的评价.....	15
四	数学的价值.....	20
五	数学的教学.....	33
六	数学的学习与研究.....	40
七	现代数学.....	49
八	数学家.....	53
九	名人轶事.....	57
十	作为精巧艺术的数学.....	68
十一	作为语言的数学.....	73
十二	数学与逻辑.....	76
十三	数学与哲学.....	80
十四	数学与科学.....	83
十五	算术、代数、几何.....	91
十六	微积分及其相关的学科.....	105
十七	基本概念、时间与空间.....	115
十八	悖论与神奇.....	124
后记		127

一 数学的定义及其研究对象

1.1(101) 我认为数学这个词是专为科学的应用而设的，正像我们论及逻辑学、修辞学或音乐那样，数学也有它自身的专门含义与特性。——塞尔维斯脱(Sylvester, J.J.)

Presidential Address to the British Association, Exeter British Association Report(1869); Collected Mathematical Papers, Vol.2, p. 659.

1.2(103) 数学的研究对象就是数量之间的种种间接的度量关系，目的在于按照数量之间所存在的种种客观关系去决定它们的相对大小。——科姆特(Comte)

Positive Philosophy[Martineau], Bk.1, chap.1.

1.3(104) 从事数学研究的具体目的，就是为了去发现和表述那些待考虑的现象之间的种种数学规律的方程式；而这些方程式就是从某些已知量去获得另一些未知量的种种演算的起点。——科姆特(Comte)

Positive Philosophy[Martineau], Bk. 1, chap.2.

1.4(105) 数学是关于数量关系的科学，数量关系就是

某物与他物在量的侧面相等与否的种种关系，但二物相等系指在任一断言中，两者可以互相取代。——格拉斯曼，赫尔曼(Grassmann, Hermann)

Stücke aus dem Lehrbuche der Arithmetik, Werke (Leipzig, 1904), Bd. 2, p. 298.

1.5(107) 几何、理论算术和代数这类学科，都涉及到我们在外部世界中所观察到的一切对象及其变易情况；因此，对于这些数学关系的研究，就形成了各种处理自然现象的变易规律的学科；诸如天文学、光学和力学等等，并由此而使这些学科常被称为混合数学，其中之空间关系和数量关系，都是和那些从专门的观察中所概括出来的原理相结合在一起的；但几何或代数等学科却不包含直接经验，因而被称之为纯粹数学。——辉维尔，威廉(Whewell, William)

The Philosophy of the Inductive Sciences, Part 1, Bk. 2, chap. I, sect. 4. (London, 1858).

1.6(108) 高等数学乃是关于各种自然现象之间的数值关系的推理艺术，高等数学的各个部分，就是从各个方面探索和研究这些关系的不同方式。——梅洛尔(Mellor, J. W.)

Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics (New York, 1902), Prologue.

1.7(110) 整个数学被三种思想观念统治着，或者说有三个基本概念渗透在整个数学领域中，这三个基本概念就是数、序和空间。事实上，每个数学真理都或者涉及其中之一，或者同时涉及其中之两个，甚或是三者的组合。

算术的研究对象是抽象的数的性质。代数则可视作运算的科学,序在其中则是一个颇占优势的观念。而几何是关于空间与空间中之形体性质之演变的学科。——塞尔维斯脱(Sylvester, J. J.)

*A Probationary Lecture on Geometry,
York British Association Report(1984),
Part 2; Collected Mathematical Papers,
Vol. 2, P. 5.*

1.8(111) 纯粹数学的研究对象,是那些被包含在有序流形中的种种理想元素之间所建立的理性关系,流形中之序规律是必须经过严格挑选的,它们既可以是离散的,也可以是连续的。——帕泼列兹(Papperitz, E.)

*Über das System der Rein Mathematischen
Wissenschaften Jahresbericht der Deutschen
Mathematiker-Vereinigung, Bd. 1, p. 38.*

1.9(112) 纯粹数学并不涉及具体的数量,而仅仅是一种已经转变为机械运算的相对有序观念的学说。——努瓦列斯(Novalis)

*Schriften(Berlin, 1901), Zweiter Teil, p.
282.*

1.10(114) 纯粹形式科学,逻辑和数学,只处理对象的特殊内容或实质之间的关系,特别是那些包含着量、测度和数等等概念的对象之间的关系,它们都属于数学范畴。——汉克尔,赫尔曼(Hankel, Hermann)

*Theorie der Complexen Zahlensysteme,
(Leipzig, 1867), p. 1.*

1.11(116) 在严格的意义下说,数学是一种抽象的科学。它演绎地研究那些被蕴含在空间关系和数学关系中之原始概念中的论断。——莫雷(Murray, J. A. H.)

A New English Dictionary.

1.12(122) 在最广泛的意义上说,数学乃是各种形式的和必然的演绎推理的展开。——怀特黑德(Whitehead, A. N.)

Universal Algebra(Cambridge, 1898), *Preface*, p. vi.

1.13(123) 一般说来,数学基本上是一种自我证明的科学。——克莱因,菲里克斯(Klein, Felix)

Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie(Leipzig, 1902), p. 26.

1.14(125) 纯数学是假言判断的种种演绎理论的汇集。每一种理论都是由原始的不定义概念和符号,以及一系列不证自明的思想规定(通常称为公理)所组成的一个相容而确定的体系。它们都是可靠而又不借助于直觉的一种演绎过程,一种合理的逻辑推演过程。——费契(Fitch, G. D.)

The Fourth Dimension simply Explained
(New York, 1910), p. 58.

1.15(131) 数学是一门理性思维的科学。它是研究、了解和知晓现实世界的工具。复杂的东西可以通过这一工具简单的措辞去表达,从这一意义上说,数学可被定义为一种连

续地用较简单的概念去取代复杂概念的学科。——怀特，威廉(White, William F.)

A Scrap-book of Elementary Mathematics, (Chicago, 1908), p. 215.

1.16(133) 数学研究理想结构(通常应用于实际问题), 并在这种研究中去发现各种结构之间的未知关系。——裴尔斯(Peirce, C.S.)

Century Dictionary, Article "Mathematics."

1.17(134) 数学是智能的一种形式。利用这种形式, 我们可以把现象世界中的种种对象, 置之于数量概念的控制之下。——霍维逊(Howison, G.H.)

The Departments of Mathematics, and their Mutual Relations, Journal of Speculative Philosophy, Vol. 5, p. 164.

1.18(135) 数学是关于函数规律与变换的一门学科。它能使我们把形象的外延与规定的运动转换成数。——霍维逊(Howison, G.H.)

The Departments of Mathematics, and their Mutual Relations, Journal of Speculative Philosophy, Vol. 5, p. 170.

二 数学的本性

2.1(203) 思维的经济原则在数学中得到了高度的发挥。数学是各门科学在高度发展中所达到的最高形式的一门科学，各门自然科学都频繁地求助于它。^{〔*〕}然而令人奇怪的是，数学的力量却在于它避免了一切不必要的思想而采取了最为经济的思维方式。序号被称之为数，这就已经形成了一种奇妙、简单而又经济的系统。当我们进行数的乘法运算时，对于乘法表的利用，就使我们能以利用先前已完成的结果，而不必每一次都去作重复的运算。又如当我们利用对数表时，同样也是利用已完成的计算去取代新的数值计算。再例如，当我们利用行列式去解方程组时，以及当我们把新的积分表达式分解成其它已知表达式的时候，我们都可看到拉格朗日(Lagrange)或柯西(Cauchy)的智力活动，他们总是以军事司令官的敏锐识别力，统帅着所有已完成的运算的“军队”，并由此而去执行新的运算任务。——马赫 (Mach, E)

Populär-wissenschaftliche Vorlesungen

(1903), pp. 224—225.

〔*〕 数学的现代发展表明，各门社会科学也已同样地不断求助于数学了。——译者注

2.2(205) 数学的本质就在于它的自由。——康托，乔治(Cantor, George)

Mathematische Annalen, Bd. 21, p. 564.

2.3(206) 数学沿着它自己的道路而无拘无束地前进着,这并不是因为它有什么不受法律约束之类的种种许可证,而是因为数学本来就具有一种由其本性所决定的、并且与其存在相符合的自由。——汉克尔,赫尔曼(Hankel,Hermann)

*Die Entwicklung der Mathematik inden
letzten Jahrhunderten (Tübingen, 1884),
p.16.*

2.4(208) 在逻辑矛盾的限度内,数学家们有权自由选择他们自己所喜欢的路线去达到他们的目的。——亚当斯,亨利 (Adams, Henry)

*A Letter to American Teachers of His-
tory (Washington, 1910), Introduction, p.v.*

2.5(210) 数学不是规律的发现者,因为它不是归纳。数学也不是理论的缔造者,因为它不是假说。但数学却是规律和理论的裁判和主宰者,因为规律和理论都要向数学表明自己的主张,然后等待数学的裁判。如果没有数学上的认可,则规律不能起作用,理论也不能进行解释。——裴尔斯,彭加敏 (Peirce, Benjamin)

*Linear Associative Algebra, American
Journal of Mathematics, Vol. 4 (1881), p. 97*

2.6(211) 数学是一种连绵不断地发展着的科学。它不同于某些政治事件或工业事件,数学的成长和发展伴随着宇宙的欢呼。——怀特(White, H. S.)

*Congress of Arts and Sciences (Boston
and New York, 1905), Vol. 1, p. 455.*

2.7(213) 数学仅考虑那些具有确切不变之名称的清晰事物，^(*)并以少数几条公理作为前提，研究这些公理的特性，并由此而不断地引出结论。数学也建立少数的假设，但这些假设都是高度合理而不为任何人所拒绝的。数学也确立某些易被人们所了解和接受的目标，并保留了最为精确的次序，每一命题都紧接在先前已假定的和已证明的命题之后。数学将拒绝所有不能被推导和演绎的事物，不管这些事物是如何貌似合理和真实。——巴罗，依萨克(Barrow, Isaac)

Mathematical Lectures(London), 1734, p.66

〔•〕就当今意义而言，由于模糊数学的诞生和发展，此处所说“数学”只能指精确性的经典数学。——译者注

2.8(216) 在大多数科学中，后一代人往往撕毁了前一代人所建立的成就，^(*)但在数学中，每一代人都是在老的结构上建立新的成果。^(*)——汉克尔，赫尔曼(Hankel, Hermann)

*Die Entwicklung der Mathematik in den
Letzten Jahrhunderten (Tübingen, 1884),
p.25.*

〔•〕此处摘录黑格尔(Hegel)的名言，以供对照参考。黑格尔说：“一般地驳斥……体系，并不是意味着抛弃它，而是进一步发展它，不是用其他的，片面的对立物去代替它，而是把它包含在某种更高的东西中。”(列宁，《哲学笔记》，人民出版社(1974)177)——译者注。

2.9(217) 数学是确定性和清晰性的女术士。(请参阅2.7条之^(*))——赫巴特(Herbart, J.F.)

*Werke[Kehrbach](Langensalza, 1890), Bd.
1, p.171.*

2.10(218) ……数学分析与自然界一样地广阔，它可以定义所有可了解的关系、测量时间、空间、力和温度。这是一门形成缓慢而又艰深的学科。它小心地保留了每一条必需保留的原则；在人类思维的变易与错误中，数学分析不断地增长而且变得愈来愈强大有力。——傅立叶(Fourier, J.)

Théorie Analytique de la Chaleur, Discours Préliminaire.

2.11(220) 分析与自然哲学都把它们的最重要的发现归功于归纳法这一卓越工具的运用。牛顿(Newton)也把他的二项式定理及万有引力原理的发现归功于归纳法的运用。——拉普拉斯(Laplace)

A Philosophical Essay on Probabilities
[Truscott and Emory](New York 1902),
p.176.

2.12(221) 算术计算和代数计算的每一个步骤中，都有从事实到事实的归纳和推理，还有那些乔装打扮的归纳步骤，这就是概括性和语言表述上的普遍性。——密尔(Mill, J.S.)

System of Logic, Bk.2, chap.6,2.

2.13(224) 几何、理论算术和代数，这些学科除了定义和公理之外，没有其它原则，除了演绎以外，没有其它证明过程。但就在这一过程中，却已综合了简单性、复杂性、严密性和一般性，这一特性是不为其它学科所具有的。

——辉吾尔(Whewell, W.)

The Philosophy of the Inductive Sciences,
Part 1, Bk.2, chap.1, Sect.2(London, 1858).

2.14(229) ……数学知识有三个不同于其它知识的主要特征：其一是数学知识比其它知识更清晰地使其结果具有真理性；其二是数学知识乃是获得其它正确知识的必经的第一步；其三是数学知识的获得并不依赖于其它知识。——肖伯特(Schubert, H.)

Mathematical Essays and Recreations
(Chicago, 1898), p. 35.

2.15(234) 数学家毫不顾及声明或猜想，他们仅仅根据定义和公理，并用论证和推理来演绎每一件事。事实上，现在把那些仅由猜想或假说建立起来的理论称之为科学是不正确的，因为猜想往往求助于某种见解或主张，因而它不能由此而产生知识。——雷德，汤姆斯(Reid, Thomas)

Essays on the Intellectual Powers of Man, Essay 1, chap. 3.

2.16(238) 任何可靠的推理过程，都不可能产生不包含在前提中的结果。——梅洛尔(Mellor, J. w.)

Higher Mathematics for Students of Chemistry and physics(New York, 1902),
p. 2.

2.17(241) 在数学中，若把每一件事都简化为直觉知识，则其证明就会变得极其冗长。因此数学家总是聪明地把困难加以分解，进而分别地去证明一系列中间命题，其中当然包含着许多技巧。中间定理(通常称为引理)往往可用多种方法去设计，为了便于理解和记忆，最好选择那些证明过程简短易行的结果作为中间定理。但应指出，要想论证所有的公