《中国工程物理研究院科技丛书》第009号

粘性消去法和差分格式的粘性

郭柏灵 著

科学出版社

《中国工程物理研究院科技丛书》 第009号

粘性消去法和差分格式的粘性

郭柏灵 著

科学出版社

1993

(京)新登字 092 号

内容简介

本书将系统地介绍耗散系统，双曲型守恒系统，非线性色散系统三类方程的特点及其研究方法，除了阐述基本的概念和方法之外，还介绍一些有关研究方向有特色的工作。主要内容包括：第一章 Sobolev 空间及其预备知识，第二章非线性发展方程的粘性消去法，第三章拟线性双曲型方程的粘性消去法，第四章物理粘性和差分格式的粘性，第五章 Lax–Friedrichts 格式和 Glimm 格式的收敛性.

本书读者对象为：高校有关专业的师生，科研人员和技术人员.

《中国工程物理研究院科技丛书》 第009号

粘性消去法和差分格式的粘性

郭柏灵著

责任编辑 林 鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

北京市人民文学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年3月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1993年3月第一次印刷 印张：19

印数：1—1 500 字数：511 000

ISBN 7-03-003285-3/O·593

定价：19.50 元

《中国工程物理研究院科技丛书》出版说明

中国工程物理研究院建院三十年来，坚持理论研究、科学实验和工程设计密切结合的科研方向，完成了国家下达的各项国防科研任务。通过完成任务，在许多专业学科领域里，不论在基础理论方面，还是在实验测试技术和工程应用技术方面，都有重要发展和创新，积累丰富的知识和经验，造就了一大批优秀科技人材。

为了扩大科技交流与合作，促进我院事业的继承与发展，系统地总结我院三十年来在各个专业领域里集体积累起来的经验，吸收国内外最新科技成果，形成一套系列科技丛书，无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科研工作的成果，内容涉及本院过去开设过的二十几个主要学科。现在和今后开设的新学科，也将编著出书，续入本丛书中。

这套丛书将在今后几年里陆续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍，经编委会审定后，也纳入本丛书系列。

谨以此套丛书献给三十年来为我国国防现代化而献身的人们！

《中国工程物理研究院科技丛书》编审委员会

1989 年 *1* 月 *25* 日

《中国工程物理研究院科技丛书》

编　审　委　员　会

《中国工程物理研究院科技丛书》

已 出 版 书 目

001 **高能炸药及相关物性能**

董海山主编　科学出版社　*1989*年*10*月出版

002 **光学高速摄影测试技术**

谭显祥编著　科学出版社　*1990*年*2*月出版

003 **凝聚炸药起爆动力学**

章冠人等编著　国防工业出版社　*1991*年*11*月出版

004 **线性代数方程组的迭代解法**

胡家赣编著　科学出版社　*1991*年*12*月

005 **映象与混沌**

陈世刚编著　国防工业出版社　*1992*年*2*月

006 **高温辐射物理与量子辐射理论**

陈世昌编著　国防工业出版社　*1992*年*3*月

007 **再入遥测技术（上册）**

谢铭勋编著　国防工业出版社　*1992*年*3*月

008 **再入遥测技术（下册）**

谢铭勋编著　国防工业出版社　*1992*年*3*月

009 粘性消去法和差分格式粘性

郭柏灵著　科学出版社　1993年3月

序 言

非线性发展方程，其中包括拟线性双曲型方程和方程组，非线性抛物型方程、方程组，特别包括具孤立子解的可积系统和具混沌解的非线性发展方程等，这些非线性偏微分方程具有重要的物理背景，它揭示了许多非线性现象的本质特性，是非线性科学的重要研究内容. 从偏微分方程定性研究的角度，这些方程的研究内容具有某些共同的特性. 例如，研究整体解的存在性、唯一性和光滑性，$t\to\infty$ 时解的渐近性质以及在有限时间内解的破裂性等等. 然而这些方程又具有许多不同的特性. 有人把这些方程概括为三类：一、耗散系统，其中以 Burgers 方程为代表；二、双曲型守恒系统，其中以拟线性双曲型方程 $u_t+uu_x=0$ 为代表；三、非线性色散系统 (可积系统), 以 KdV 方程为代表. 对这三类方程的研究方法也是不同的. 写这本书的主要目的是想对三类方程的特点和研究方法作一比较性的介绍，除了阐述最基本的概念和方法外，也介绍一些有关研究方向的有特色的工作、最近发展和最新成果，其中也包括作者和他的合作者最近十多年来的某些研究成果。由于对这些方程的研究方法很多，限于篇幅，我们这里只介绍粘性消去法在上述不同的非线性发展方程中的应用。众所周知，所谓粘性消去法，即抛物型正则化方法，即寻求具粘性近似方程的整体解 u_ε, 再利用 u_ε 及其某些导数的模关于小参数 ε 的一致有界性估计，令 $\varepsilon\to 0$ 即得到我们所需要的解。我们还将介绍这些具粘性的非线性方程的具体物理背景。

和粘性消去法相对应，对于非线性发展方程的离散化求数值解，我们研究相应的有限差分方法的粘性问题，其中包括人为粘性和差分格式离散化本身带来的粘性效应。众所周知，1949 年著名数学家 J. von Neumann 和 R. D. Richtmyer 对于一维具拉格朗日形式的流体力学方程组的数值计算，引进一个人工粘性项 (耗散项), 取得了巨大的成功，此后在拟线性双曲组广义解的差分计算中，广为引用，并形成所谓“人为粘性法”。另外，Годунов, Lax-Friedrichs 等守恒差分格式在双曲型方程的计算中也占重要的位置，这些差分格式虽然不加人为粘性，但它却隐含了粘性。我们对差分格式的各种粘性进行了认真的考察，在定性上和数值计算上都作了分析和比较，这些研究成果大部分没有发表过，我

要特别感谢周毓麟教授，在那艰难的岁月里他给予具体的指导和帮助。

作者希望这本书的问世，将有助于读者从浩瀚的著作和文献中，理出一些虽然比较粗但却足够明晰的线条，从而当读者对某一方面的问题发生兴趣时，就可在查阅有关参考文献的基础上开展研究工作。

由于篇幅所限，我们在书中未能对粘性消去法本身存在的局限性进行讨论。另外，限于作者的水平，就粘性消去法本身的介绍也难免存在不妥或错误之处，敬请读者予以指正。

最后，我还要特别感谢肖玲和水鸿寿教授，他们对编写本书给予始终如一的关心和热情帮助，并提出了许多宝贵的意见，也要感谢《中国工程物理研究院科技丛书》和科学出版社的编辑同志们的辛勤劳动。

郭柏灵
1992年春节于北京

目 录

第一章　Sobolev 空间及其他预备知识

这一章是为以后各章作准备的，主要介绍 Sobolev 空间及其插值理论、紧致性原理以及不动点原理等. 由于这章中的不少内容可参阅其他文献，因此有关这些内容只写出结论，不予证明. 对于一些鲜见于其他文献而又比较重要的定理，则予以简单地证明. 本章的内容可参考 [1–5,49], 其中插值不等式的证明见 [91].

§1.　基本符号和函数空间

1.1　基本符号

R^n 表示 n 维 Euclid 空间，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 R^n 中的任意点. Ω 为 R^n 中的有界区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，$D^\alpha u(x)$ 表示函数 $u(x)$ 形如 $\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ 的导数，其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标，$\alpha_i\geq 0, |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ 是导数的阶.

1.2　基本函数空间的定义

$L_p(\Omega)$ 表示由所有在 Ω 上可测、关于 Ω 为 $p\geq 1$ 次可积的函数组成的 Banach 空间，其中的模由等式

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}=\Big(\int_\Omega |u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

定义. 如 $\boldsymbol{u}(x)$ 为向量函数，$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_N)$, 则

$$\|\boldsymbol{u}(x)\|_{L_p(\Omega)}=\Big(\sum_{i=1}^N\|u_i\|_{L_p}^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=\infty$ 时，$L_\infty(\Omega)$ 为在 Ω 上所有可测和本质有界的实函数所组成的空间，它是一个 Banach 空间，具有模

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}\text{ess}\,|u(x)|.$$

当 $p=2$ 时，$L_2(\Omega)$ 为一具内积

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx,$$

的 Hilbert 空间，其中 $\overline{v(x)}$ 表示函数 $v(x)$ 的复数共轭.

Sobolev 空间 $W_p^m(\Omega)$ 表示由 $D^l u(x)\in L_p(\Omega)$ $(0\le |l|\le m)$ 所组成的函数空间. 它是一个 Banach 空间，具有模

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)}=\Big(\sum_{|j|\le m}\|D^j u\|_{L_p(\Omega)}^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=2$ 时，$W_2^m(\Omega)=H^m(\Omega)$ 为 Hilbert 空间.

$\mathcal{D}(\Omega)$ $(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$ 表示具有含于 $\Omega(\overline{\Omega})$ 内紧致支集的无穷可微函数的空间.

$W_{0,p}^m(\Omega)$ 表示 $\mathcal{D}(\Omega)$ 依模 $W_p^m(\Omega)$ 的闭包，当 $p=2$ 时，

$$W_{0,2}^m(\Omega)=H_0^m(\Omega).$$

$L_p(a,b;X)$ 表示从 (a,b) 到 Banach 空间 X 的 L_p 函数空间，它是一个 Banach 空间，具有模

$$\|f\|_{L_p(a,b;X)}=\Big(\int_a^b\|f(t)\|_X^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

类似有 $L_p(0,T;W_m^p(\Omega))$, $W_m^p(0,T;L_r(\Omega))$ 等函数空间. 当 $p=\infty$ 时，$L_\infty(a,b;X)$ 表示从 (a,b) 到 X 的一切可测和本质有界的函数空间，它是一个 Banach 空间，具有模

$$\|f\|_{L_\infty(a,b;X)}=\sup_{t\in(a,b)}\text{ess}\,\|f(t)\|_X.$$

类似地，当 $-\infty<a<b<+\infty$, 我们表示 $C([a,b];X)$ 为 $[a,b]$ 到 X 的所有连续函数所形成的空间，$C^k([a,b];X)$, $k\in\mathbb{N}$, 为从 $[a,b]$ 到 X 的 k 次连续可微函数空间，它们是 Banach 空间，分别具有模

$$\|f\|_{C([a,b];X)}=\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^k([a,b];X)}=\sum_{j=0}^k\Big\|\frac{d^j f}{dt^j}\Big\|_{C([a,b];X)}.$$

$C^l(\Omega)$ 表示函数 $u(x)$ 在 Ω 内具有直到 l 阶连续可微的函数空间.

$$C^{(n,\lambda)}(\overline{\Omega}) = \Big\{u(x)|u(x) \text{ 具有适合 } \lambda \text{ 阶 Hölder 条件的 } n \text{ 阶导数}\Big\},$$

其中

$$\|u(x)\|_{C^{(n,\lambda)}(\overline{\Omega})} = \|u(x)\|_{C^n(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=n} H_\lambda(D^\alpha u)$$

$$H_\lambda(\varphi) = \max_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

1.3 几个常用的简单不等式

(1) Cauchy 不等式

$$|a_{ij}\xi_i\eta_j| < \sqrt{a_{ij}\xi_i\xi_j}\sqrt{a_{ij}\eta_i\eta_j}.$$

它对任意非负二次型 $a_{ij}\xi_i\xi_j$, $a_{ij}=a_{ji}$ 以及任意实数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 成立.

(2) 带 ε 的 Cauchy 不等式

$$ab < \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

它对任何 $\varepsilon>0$ 和任意非负的 a,b 成立.

(3) Young 不等式

$$ab \le \frac{1}{p}(\varepsilon_1 a)^p + \frac{1}{p'}\Big(\frac{b}{\varepsilon_1}\Big)^{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ \varepsilon_1>0.$$

(4) Hölder 不等式

$$\Big|\int_\Omega u(x)v(x)dx\Big| \le \Big(\int_\Omega |u(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega |v(x)|^{q'}dx\Big)^{\frac{1}{q'}},$$

其中 $q\ge 1$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$. 更一般的不等式

$$\Big|\int_\Omega \prod_{i=1}^s u_i(x)dx\Big| \le \prod_{i=1}^s\Big(\int_\Omega |u_i|^{\lambda_i}dx\Big)^{\frac{1}{\lambda_i}},$$

其中 $\lambda_i \geq 1$, $\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\lambda_i} = 1$.

(5) Cauchy 不等式

$$\Big|\int_\Omega \sum_i u_i v_i dx\Big| \leq \Big(\int_\Omega \sum_i u_i^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega \sum_i v_i^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(6) Gronwall 不等式. 设 $u(x)$ 和 $h(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数, $C \geq 0$ 是常数. 若对 $0 \leq x \leq 1$,

$$u(x) \leq C + \int_0^x h(t)u(t)dt,$$

则对 $0 \leq x \leq 1$ 有

$$u(x) \leq C \exp\Big(\int_0^x h(t)dt\Big).$$

(7) Jensen 不等式. 设 Φ: $R \to R$ 的下凸函数, $f \in L_1[a,b]$, 则

$$\Phi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(f(t))dt.$$

§2. 广义导数及其性质, $W_p^m(\Omega)$ 和 $H^{j,p}(\Omega)$ 空间

定义 2.1 设 $\Omega \subset R^n$ 为一有界开集, 函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 Ω 上局部可积. 若对一切 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$\int [uD^\alpha\varphi + (-1)^{|\alpha|+1}\varphi(x)v(x)]dx = 0, \tag{2.1}$$

其中 $D^\alpha\varphi = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi}{\partial x^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha_i \geq 0$ 为整数, 则称 $v(x)$ 为 $u(x)$ 的 α 阶广义导数, 记作 $v(x) = D^\alpha u(x)$.

由此定义, 不难验证:

(1) 普通连续导数是广义导数;

(2) 广义导数不重合于几乎处处存在的普通导数;

(3) 存在高阶广义导数, 但不一定有低阶广义导数;

(4) 广义导数是唯一的 (在几乎处处意义下);

(5) 如果 $u(x)$ 具有广义导数 $D^\alpha u$, $D^\alpha u$ 又具有广义导数 $D^\beta(D^\alpha u)$, 则 u 具有广义导数 $D^{\beta+\alpha}u$, 且

$$D^{\beta+\alpha}u = D^\beta(D^\alpha u); \tag{2.2}$$

(6) 设 u 具有低于和等于 m 阶的广义导数, $v(x) \in C^m(\Omega)$, 则 uv 在 Ω 上具有 m 阶广义导数, 且有

$$D^\beta(uv) = \sum_{\alpha\le\beta} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} D^\alpha u D^{\beta-\alpha} v, \quad 0 \le |\beta| \le m; \tag{2.3}$$

(7) 设 $f \in C^1(R)$, $f' \in L_\infty(R)$, $u \in W_1^1(\Omega)$, 则复合函数 $f \circ u \equiv f(u(x)) \in W_1^1(\Omega)$, 且

$$D(f \circ u) = f'(u)Du. \tag{2.4}$$

证. 由于 $u \in W_1^1(\Omega)$ 及强、弱 (广义) 微商的一致性, 可知有 $C^\infty(\Omega)$ 中的函数列 $\{u_m\}(m = 1, 2, \cdots)$, 使 u_m 与 Du_m 在 $L_{\text{loc}}(\Omega)$ 中分别收敛于 u, Du. 因此, $\forall\, \Omega' \subset \Omega$, 有

$$\int_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)|dx \le \sup_R |f'| \int_{\Omega'} |u_m - u|dx \to 0, \quad m \to \infty,$$

$$\int_{\Omega'} |f'(u_m)Du_m - f'(u)Du|dx \le \sup |f'| \int_{\Omega'} |Du_m - Du|dx$$
$$+ \int_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)||Du|dx.$$

由 $\{u_m\}$ 可选出子列, 使它在 Ω' 上几乎处处收敛于 u, 这子列仍记为 $\{u_m\}$. 因为 f' 连续, $f'(u_m)$ 也在 Ω' 上几乎处处收敛于 $f'(u)$. 由控制收敛定理, 上式右端趋于零, 因此

$$Df(u) = f'(u)Du. \qquad \square$$

定义 2.2 设 $\Omega \subset R^n$ 为有界开集, 则由一切函数 $C^j(\Omega)$ 组成的且具有限模

$$|u|_{j,p} = \left\{ \sum_{|\alpha|\le j} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

的线性赋范空间记为 $C^{j,p}(\Omega)$, 其中 j 为非负整数， p 为实数，$1 \le p \le \infty$. 我们称 $C^{j,p}(\Omega)$ 依模 (2.5) 的完备化空间为 $H^{j,p}(\Omega)$, 且记 $H^{j,2} = H^j$.

引理 2.1 $W_p^j = H^{j,p}$.

引理 2.2 设 $u(x) \in L_p(\Omega)$, 且序列 $\{u_k\} \in W_p^j(\Omega)$, $\{u_k\}$ 依模 $W_p^j(\Omega)$ 是有界的， $\{u_k\}$ 依 $L_p(\Omega)$ 弱收敛于 $u(x)$, 则

$$u(x) \in W_p^j(\Omega)$$

且 $\{D^\alpha u_k\}$ 依 $L_p(\Omega)$ 弱收敛于 $D^\alpha u$, $0 \le |\alpha| \le j$.

引理 2.3 设 Ω 为一有界区域, $\partial\Omega \in C^2$, j 为一正整数, $p \ge 1$ 为实数，则存在一个常数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega, p, j) > 0$, 对任何 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, 存在常数 $c = c(\Omega, p, j, \varepsilon)$ 使得不等式

$$|u| \le \varepsilon |u|_{j,p} + c|u|_{0,p} \tag{2.6}$$

对一切 $u \in C^j(\overline{\Omega})$ 成立.

§3. Sobolev 嵌入定理与内插公式

定义 3.1 设 $\Omega \subset R^n$ 为一有界区域. 如果存在正数 α 和 h 使得对任何 $x \in \Omega$, 能构造一个以 x 为顶点、余角为 α 、高度为 h 的正球锥 V_x 位于 Ω 内，则称区域 Ω 具有锥性质.

例 1 如 $\partial\Omega \in C^1$, 或 Ω 为凸区域，则 Ω 具有锥性质.

定理 3.1 设 Ω 为具有锥常数为 α, h 的锥性质有界区域. 设 $u(x) \in C^m(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$ $(p > 1)$, 如 $m > n/p$, 则

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \le C\|u\|_{W_p^m(\Omega)}, \tag{3.1}$$

其中常数 C 仅依赖于 α, h, m, p.