高等学校规划教材

近代误差理论与数据处理

石金峰　编　刘光宗　审

煤炭工业出版社

高等学校规划教材

近代误差理论与数据处理

石金峰 编

刘光宗 审

煤炭工业出版社

（京）新登字042号

内 容 提 要

本书应用概率和数理统计原理，阐述了模型误差的统计检验及数据处理方法。内容包括：模型误差处理的不同发展阶段、测量平差中数学模型的发展、有偏估计、可靠性理论及稳健估计、模型误差的可区分性、顾及可靠性控制网优化设计方法。

本书可作为高等院校测量专业研究生必修课教材或本科生选修课教材，也可作为测绘工作者的参考书。

高等学校规划教材

近代误差理论与数据处理

石金峰 编

刘光宗 审

责任编辑：洪 镀

*

煤炭工业出版社 出版

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 787×1092mm 1/16 印张22 1/4

字数 532 千字 印数 1—1，245

1994年2月第1版 1994年2月第1次印刷

ISBN 7-5020-0888-8/TD·823

书号 3653 A0261 定价 10.30元

前　　言

近年来，随着电子计算机、现代统计理论以及最优化理论在测量平差中的广泛应用，使得测量平差从理论到方法都有了迅速的发展和更新。除在经典平差中只处理偶然误差外，又出现了同时处理偶然误差和系统误差，偶然误差和粗差，偶然误差、系统误差和粗差，形成了内容丰富的近代误差理论及数据处理方法。

本书的内容是以近代误差理论及其应用为主，特别是详细阐述了可靠性理论（亦称粗差理论）及其应用。阐述中密切结合工程测量，特别是矿山测量实际，解决了一些理论上和实践中的问题。同时也介绍了最小二乘法的当代进展。

为了便于学习和应用，本书取材广泛，语言通俗，论述详细，由浅入深，易于理解。在论证理论和介绍方法的同时，还列举了大量实例，以说明原理的应用及其计算步骤。

本书是在测量专业研究生、本科生各使用三届之后，经修改编写而成。故可作为测量专业研究生必修课教材，本科生选修课教材，亦可作为测绘工作者的参考书。

全书共分八章：前三章介绍了处理模型误差的不同发展阶段以及最小二乘法的近代发展；第四章介绍了模型误差处理的第二阶段及有偏估计；第五、六章介绍了模型误差处理的第三阶段及稳健估计；第七章介绍了模型误差处理的第四阶段及可区分性理论；第八章介绍了顾及可靠性控制网优化设计方法。

本书由石金峰副教授编写，刘光宗教授做了全面审阅和修改，李金柱、王家海、宋伟东三位同志也参加了部分编写工作。

由于编者的水平有限，加之时间仓促，书中缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1992.11

目　录

第一章 绪　　论

一、可靠性的由来与发展

可靠性是本世纪40年代初解决为战争需要设计的电子系统中一些问题的间接产物，当时在美国海、陆、空三军中各自建立了研究可靠性问题的委员会。1952年美国国防部又调整了这些力量，设立了电子设备可靠性问题顾问组。随后可靠性在工程设计中得到了发展，例如，美卡帕·兰伯森著了《工程设计中的可靠性》一书。近年来，可靠性已成为产品系统设计、研制和生产中的一个重要因素。在测绘领域，可靠性是由荷兰的巴尔达(Baarda)教授于60年代末提出来的，他从单个一维备选假设下研究可靠性理论，提出了著名的数据探测法。80年代由德国的斯图加特大学与Förstner合作，研究了具有附加参数的外部可靠性，并提出了两个多维备选假设下的可靠性理论。从此，可靠性理论在大地测量、摄影测量、精密工程测量以及变形测量中得到了应用。其中，摄影测量领域的理论研究及应用颇为深入，从模型到平差建立了一整套可靠性分析系统。在我国关于这一理论的研究及应用也有了一定的进展。但是在普通工程测量中研究较少，刚刚在起步。

二、可靠性理论与实践对国民经济发展的重大意义

可靠性理论对发展国民经济具有十分重要的意义。从广义上讲，评价一件产品的好坏，一般要从技术性能、经济指标和可靠性三个方面来考虑。即：好的产品不但要求性能好，成本低，而且要经久耐用，安全可靠。后两句就是指产品的可靠性。一般说来，可靠性是指产品在规定条件下和时间内所完成规定功能的能力。产品的可靠性差，它的技术性能再好也得不到充分发挥，成本再低也是一种浪费。例如，机器设备的可靠性差，就会经常出现故障，不仅造成停工、停产导致经济上的损失，而且也会降低产品及企业的信誉。所以可靠性是衡量产品质量的一个不可缺少的重要指标。从狭义上讲，测绘领域也是如此。一般而言，工程施工的基础是设计，一切设计资料都来源于测量，任何测量数据都要产生误差。因此，测量数据的好坏（误差大小）直接影响工程的施工和生产。以往，衡量观测成果的好与坏，一般从精度、成本等方面来考虑。但是，在观测数据中不但要存在误差，有时也会产生错误，这个错误的观测数据在测量中一般称为粗差。也就是说，观测数据中不但存在偶然误差，有时也会出现粗差。实践表明，对含有粗差的观测值只用精度去衡量其质量就不全面了。因此，目前从国外到国内，衡量观测成果的质量不仅仅用精度指标，而且还加入可靠性指标。这就是说，好的观测成果不但要求精度高，成本低，而且可靠性要好。综上所述，所谓测量领域的可靠性是指，一个平差系统发现模型误差（粗差、系统误差）的能力和不可发现的模型误差对平差结果的影响。观测数据不可靠，即使精度再高，平差结果也是不可信的。因为粗差对平差结果有扭曲的作用，用这样的数据施工必然要产生错误。例如，矿山隧道和井下贯通测量时，若观测数据中含有粗差，又不能及时发现和处理，就势必影响施工的质量，造成经济损失或更大的事故。因此，研究可靠性理论是有其现实意义的。

三、测绘领域可靠性研究的发展阶段

由上可知，可靠性指标主要是分析、研究粗差的一个指标，是指发现粗差的能力和不可发现粗差对平差结果的影响。关于如何发现粗差，以往传统的方法是在平差之前，即在规划测量工作和设计观测程序时，检测出粗差，并加以排除。例如，采取避免粗差的观测程序，增加多余观测以及利用几何条件闭合差等方法。尽管采取这些措施，有些粗差特别是小粗差仍然是难以避免的。随着计算机的问世和工程数学在测量中的应用，对粗差的分析研究更加深入了，于是提出了平差后检验粗差的方法，即可靠性理论。可靠性理论是建立在数理统计的假设检验基础上，是对粗差的一种验后检验法。在测量平差范畴内应用的这种方法首先是由荷兰的巴尔达教授在60年代末提出的，他是用经典的假设检验理论研究平差系统发现单个模型误差的能力，提出了著名的数据探测法。随后，由 Förstner等人将该理论推广至平差系统可发现多个模型误差的能力。

1983年Förstner 第一次提出了模型误差的可区分性，导出了可区分性本质上取决于检验量之间相关系数的结论。接着我国李德仁博士在这个基础上又提出了平差系统的可区分性和可靠性理论，为模型误差的分区和定位提供了理论基础。 粗差定位的方法

可靠性研究的另一个方面就是寻找粗差定位的可行方法。所谓粗差定位是指在平差的过程中自动剔除粗差的方法，也就是说具体指明哪一个或哪几个观测值有粗差，并将其剔除。粗差定位有两条途径，其一，从巴尔达可靠性理论出发，应用数据探测法，把粗差归入函数模型去发现和消除粗差；其二，把粗差归入随机模型，利用选择权迭代法实现粗差定位。

最小二乘平差的弊

应当指出，粗差剔除不是一件容易的事，因为，最小二乘平差的弊病就是掩盖了大的粗差，把粗差进行了分配，在平差后的V中只显示出其中的一部分，也就是说最大的V不一定是粗差的存在处。这样有许多问题还需要进一步研究。当然，随着实践不断向前发展，可靠性理论日趋完善将是无疑的。

四、测绘领域可靠性研究的必要性

自从计算机的问世并有效地应于测量领域之后，无论在大地测量控制网还是工程测量控制网平差中，较之过去都取得了突飞猛进的成就。摆脱了手工计算的束缚，导出了各类平差问题严格解求的数学模型及平差原则，继而使得控制网的最优化设计和计算成为现实，也为可靠性研究创造了条件。

1. 误差的来源 粗差的重要性

由测量平差基础教材可知，测量数据中含有误差是不可避免的。按误差性质可分为三类，即偶然误差、系统误差和粗差。这就是说，观测值中同时含有这三种误差是客观的。由于受平差理论和计算工具的局限，在测量平差基础教材中有一个假设，即观测值中仅仅含有偶然误差，一并存在的其它两种误差在平差之前已经处理，而且不占主导地位，然而处于次要地位的系统误差和粗差，特别是粗差，随着现代化测量方法和数字记录方法的发展，面对所获得的庞大信息，用人工凭经验挑出并加以处理的方法变得越来越无能为力了。实践表明，若粗差和系统误差不能在平差中正确地被发现、被消除，它势必会损坏平差结果。即便是不显著，对高精密测量来说，也无法实现其预期的精度。因此，研究平差系统的可靠性就变得十分必要和紧迫了。

2、精度和可靠性的关系

举例

用一个例子来说明：对于一个前方交会来说（图1-1），若其交会角为90°，则交会精度必然很高，然而却不可靠，因为观测值中出现粗差，无法发现，因此可靠性为零。为了提高可靠性，应加测角或边，如图1-2所示。

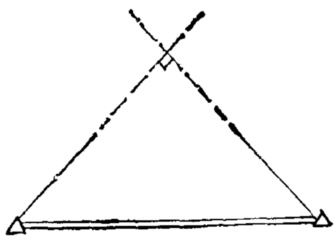
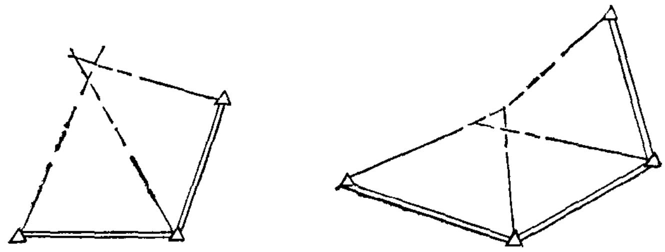


图 1-1



(a)　　(b)

图 1-2

举例

在图1-2中，当增加两个角，出现了两个多余观测，由交会误差三角形可发现存在粗差，但无法判断哪一个观测值含有粗差。若再增加一个观测值，就出现了三个多余观测，此时不仅能发现粗差，而且能指明哪个观测值上含有粗差。即粗差是可以定位的。

由上例可知，可靠性与多余观测有关。

1）在无多余观测的情况下，精度虽高，但可靠性最差。

2）多余观测乃是探测粗差的关键，多余观测越多可靠性越好。

3）在有多余观测的条件下，多余观测个数与抵抗粗差的能力成正比。正像文献〔2〕中所说，多余观测的目的在于：（1）为了提高观测成果的质量；（2）同时也为了检查和及时发现观测值中有无错误存在。这两者是相辅相成的，不保证第二者，再提高第一者也是没有意义的。因为对不可靠的成果讨论其精度只能是一种表面的虚假的理论精度，是毫无用处的。因此，同时考虑精度和可靠性，才是全面、真实评价质量的标准。也就是说、引进可靠性是非常必要的。

第二章　测量平差中误差处理的发展阶段

§2-1　数　学　模　型

一、模型

定义

所谓模型是指研究对象所涉及的理论抽象，它既是对客观现实的一种描述，也是对客观现实的一种抽象，这样一来就便于研究其共性，从而有助于解决实际问题。

分类

模型的种类很多，有形象模型（如建筑模型等）、抽象模型（如地图），在抽象模型中又包含模拟模型、概念模型和数学模型。在测量平差中大部分内容属于数量问题，因此所考虑的总是数学模型。所谓数学模型是指，用字母、数字和其它数学符号所建立起来的等式以及图表框图等来描述客观事物的特征及其内在联系的模型。

建模

模型比现实容易操作，也易于理解、研究和分析，所以研究实际问题，总是通过抽象和概括，构造出与实际相适应的数学模型。例如，测量平差中所要研究的是如何利用客观母体中取得的一组观测值去估计表征客观母体的有关未知参数。这在数理统计中称之为参数估计，在测量学中称之为平差。为此需要首先建立一个反映观测值和待求参数之间关系的数学模型。

二、测量平差中的数学模型

测量平差中的数学模型分为两类：函数模型和随机模型。

定义

函数模型：描述观测值数学期望的模型。即待估参数与观测值数学期望之间或待估参数之间所建立的数学表达式，称为函数模型。

随机模型：描述观测值精度特性的模型，即观测值的先验精度及观测值之间可能的随机相关性的模型，称为随机模型。通常用协方差阵表示。

举例

例如，高斯-马尔柯夫模型为

函数模型：
$$E(L)=BX \tag{2-1-1}$$

随机模型：
$$\Sigma=\sigma_0^2P^{-1} \tag{2-1-2}$$

式中L为观测向量，X为未知参数向量，B为X的系数矩阵，Σ为L的协方差矩阵，σ_0^2为单位权方差，P^{-1}为观测向量L的权逆阵。

注释

该数学模型实际上就是测量平差中间接平差的函数模型。由式（2-1-1）可以看出，函数模型中包括两种变量，观测值向量L和未知参数向量X，未知参数是待求的，观测向量是已知的。设函数模型中有t个独立的未知参数，有n个观测值，为了确定t个未知参数，要求

$$n\geqslant t \tag{2-1-3}$$

当$n=t$时，为必要观测，不存在平差问题。为了提高观测值的精度，检验观测值的可靠性，通常要求$n>t$，即要进行多余观测，其个数为

$$r=n-t \tag{2-1-4}$$

因此，平差的前提应具有多余观测，但多余观测的目的不仅仅是为了平差。平差的目的是

由一组观测值来求出未知参数的估值，并评定其质量。

应当指出，一个平差问题可建立不同的函数模型，但同一平差问题，无论建立何种函数模型，其必须的函数独立的未知参数的个数总是一定的。实际平差中遇到非线性的函数模型，线性化后的函数模型是一个近似的式子，因为舍去了二次以上的高阶项，为了保证线性模型有足够的精度，观测值L及未知参数的近似值X^0应尽量接近$E(L)$、X。对于L来说问题不大，因为观测值都有足够的精度，对X^0的取用必须格外小心，因为它没有事先给定的值。随着科学的发展，不论是函数模型还是随机模型都大大扩展了，对这些扩展的模型，本书将分别进行讨论。

三、误差

误差是指不准确性，一般定义为某量与该量真值的差异。误差所涉及的领域很广，就测量平差来说，所谓平差就是平去差异。然而测量平差范畴都涉及到哪些误差呢？这得由平差的基本问题来确定。所谓的平差基本问题是指：观测值、数学模型、平差准则和质量评定。在这些问题中都有误差存在，故可分类如下：

1．统计学意义的误差（模型误差）与假设检验

从统计学的意义讲，所谓模型误差可定义为（包括函数模型和随机模型）所建立的模型与客观实际的差异，例如函数模型中含有系统误差和粗差，随机模型中权定的不准确等。用公式表示为

$$G_1 = N - K \tag{2-1-5}$$

式中 G_1——真模型误差；

N——所采用的数学模型；

K——未知的客观实际，且$N \neq K$。

假设检验的理论是把数学模型视为相对于客观实际的一个零假设，即在模型确定时人们的出发点是使模型误差为零。对于零假设还需要定义一个或多个备选假设，备选假设通常总是企图使所建立的模型扩展得更加精确，从而减小模型误差。

由于客观实际K是未知的，人们只好用一个尽可能扩展和精化了的数学模型来代替它。于是把所利用的模型N与扩展精化了的模型M之间的差异定义为似真模型误差

似真模型

$$G_2 = N - M \tag{2-1-6}$$

这对实际研究是有意义的。

在假设检验中要统计检验的是所利用的模型N（零假设H_0）和一个扩展了的模型M_1（备选假设H_1）之间的差异是否显著，若$N = M$，则该模型是不可检验的。

2．测量学意义的误差（观测误差）及分类

长期以来在测量领域，人们按误差的性质一般把误差（观测误差）分为三大类，即偶然误差、系统误差和粗差，即

$$\Delta = \Delta_G + \Delta_s + \Delta_N \tag{2-1-7}$$

式中 Δ——总观测误差；

Δ_G——粗差；

Δ_s——系统误差；

Δ_N——偶然误差。

对上述三类误差，尽管已习惯如此分类，但从统计学观点，并不存在一个普遍而明确

的定义，我们只能从不同的侧面来加以分析和研究。

这三类误差均可视为模型误差，并用下列的数学模型描述：

$$\Delta_G = H_G \nabla L,\ \nabla L \sim M(\widetilde{\nabla L},\ D_{GG}) \tag{2-1-8}$$

$$\Delta_s = H_s s,\ s \sim M(s_0,\ D_{ss}) \tag{2-1-9}$$

$$\Delta_N = E\Delta_n,\ \Delta_n \sim M(0,\ D_{NN}) \tag{2-1-10}$$

其中$M(\mu,\ D)$表示期望为μ、方差-协方差阵为D的任意分布，而H_G、H_s、E决定粗差、系统误差和偶然误差对观测值的影响，而这三个系数矩阵的特性是各不相同的。

H_G为稀疏占有阵，通常每一列只有极少数几个非零元素，即

$$H_G = (e_{i+1},\ e_{i+2} \cdots\cdots e_{i+p}) \tag{2-1-11}$$

式中：

$e_i^T = (0,\ 0,\ \cdots\cdots 0,\ 1,\ 0 \cdots\cdots 0)$，仅第$i$个元素为1；

H_s为完全被占有或一组组地占有，通常所有的分量为非零元素；

E为单位矩阵。

对于协方差矩阵，偶然误差，D_{NN}为非零矩阵，这是大家所熟知的。系统误差可视为函数模型的误差（$s = s_0$，$D_{ss} = 0$）或视为随机模型误差（$s = 0$，$D_{ss} \neq 0$），也可同时作为模型误差来处理〔见式（2-1-9)〕。粗差，作为检验可视为函数模型误差（$\nabla L \neq 0$，$D_{GG} = 0$），而粗差定位最好视为随机模型误差来考虑。

在经典平差中，通常假定在观测值中只含有偶然误差，即

$$\Delta_G = 0,\ \Delta_s = 0 \tag{2-1-12}$$

系统误差不可除.

$$\Delta = \Delta_N \tag{2-1-13}$$

事实上在平差之前完全剔除和消除系统误差的影响是不可能的，随测量精度的不断提高，解决这一问题就显得格外重要了，这就是本书的宗旨。

3. 计算意义上的误差（计算误差）及分类

众所周知，测量平差一般可分为两个阶段，一是外业，观测阶段，此时所产生的误差称为观测误差，已作介绍；二是内业，数据处理阶段，此时所产生的误差称为计算误差。在计算误差中根据误差产生的原因可分为：凑整误差也称舍入误差，是在计算过程中由于数值的舍或入所引起的；截断误差，是在计算过程中由近似解所引起的，如线性化舍去二次以上的高阶项，这个高阶项就是截断误差，其大小取决于近似值的精度；病态误差，是由病态方程所引起的；初始值误差等等。这些误差对解及残差都有影响，即便有了计算机也是很可观的，它不利于粗差的检验，后面我们将作讨论。

计算误差

四、描述观测误差特性的指标

在文献〔2〕中已对精度指标作了详细地讨论，它只是描述偶然误差特性的指标，因为文献〔2〕所讨论的误差只是偶然误差。然而前面已说过，当观测值中含有粗差时只用精度指标去衡量观测质量就不全面了。因此有必要把描述误差特性的指标再强调一下。

含粗差时

1）精密度　精密度是指对一个量重复观测值彼此之间接近或一致的程度，即观测结果与其数学期望的接近程度。它表征了测量的重复性，也称离散度。它描述了偶然误差的特性，习惯上也称精度，用σ或m表示。若$\sigma(m)$小，说明离散度小，重复性好，亦精度高，反之亦然。

2）准确度　一般简称准度，它是指一个观测值与其真值的接近或一致的程度。它不仅

受偶然误差的影响，而且还会受到没有剔除的粗差和系统误差的影响。

3) 精确度　它是指精度与准度的综合，当观测值中不含粗差和系统误差时，精度和准度是一致的，此时只用精度评定观测质量就可以了。否则它们是不一致的，也就是说精度高不一定意味着准度高。图2-1就形象地说明了它们的关系。

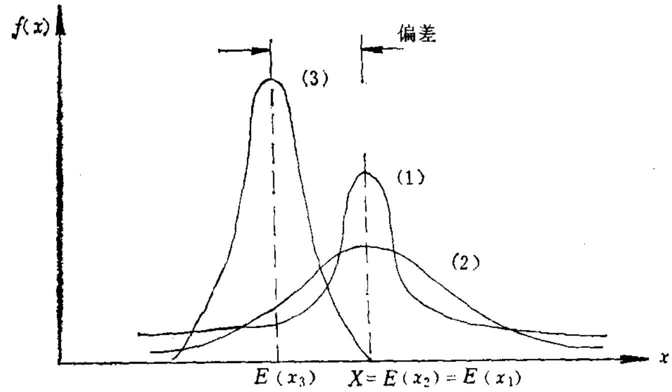


图 2-1

由图 2-1 可知，x_2 的精度最低，x_3 的精度最高，而x_1和x_2不含粗差和系统误差，其数学期望等于真值X，可谓准度高。但它不如x_3的精度高，然而x_3是不准确的，准度低。这就看出，只用精度去衡量观测质量有时会造成错误，因为 x_3 是虚假的理论精度。为此对观测质量要做出正确评价，还需引进准确度的概念。但是，由于参数的真值一般不可能得到，因此准度不便于实际应用，为此引入了可靠性概念，用它来描述粗差和系统误差影响程度。如上图中的 x_3 可靠性差，其成果是不可靠的。因此，可靠性是衡量观测质量的又一新指标。关于可靠性问题将在第五章进行详细讨论。

§2-2　测量平差中处理不同类型误差的发展阶段

误差理论研究的主要内容是测量误差的分布、传播、检验及其估计。近一二十年来，随着测量先进技术的应用，计算机的普及和高精度的要求，误差理论无论从广度和深度上都有很大进展。这些进展主要表现在：从研究测量中的偶然误差扩展到研究系统误差和粗差；从研究精度扩展到考虑准确性及探讨可靠性；从常规的定权方法扩展到权的统计估计及各种误差的检验等等。因此，在平差中不但要考虑偶然误差还要研究系统误差和粗差，以便更好地评定观测质量。然而，对这三种误差如何处理，李德仁博士把它划分为四个阶段。

第一阶段　假定　$\Delta_s=0$，$\Delta_G=0$，$\Delta_N\neq0$。

以此为出发点，$E(\Delta)=0$，平差的主要任务是：（1）寻找严密解，求最或然值；（2）研究平差结果的理论精度，优化设计；（3）估计观测值的精度特性，方差-协方差分量估计。关于这一阶段的发展与展望将在第三章叙述。

应当强调指出，在第一阶段，粗差和系统误差必须在平差之前予以消除。消除方法，对于粗差前面已叙述，不再重述；对于系统误差，测前检校仪器，测中注意观测方法，测

后加入必要的改正数。

第二阶段 假定 $\Delta_G=0$，$\Delta_s\neq 0$，$\Delta_N\neq 0$。

该阶段不含粗差，平差中同时处理偶然误差和系统误差。由此出发，平差中要研究偶然误差和系统误差的联合影响，系统误差的各种假设检验，系统误差的定量分析以及顾及系统误差的平差方法。

第三阶段 假定 $\Delta_s=0$，$\Delta_G\neq 0$，$\Delta_N\neq 0$。

此阶段不含系统误差，平差中同时处理偶然误差和粗差。这一阶段的主要任务，其一，在理论上研究平差系统的可靠性，即发现粗差的能力和不可发现的粗差对平差结果的影响；其二，研究在平差过程中有效地、自动地进行粗差定位的方法。这方面内容将在第五、六章叙述。顺便指出，通过对平差系统可靠性的研究，为矿区优化设计提供了许多有益的要求与建议，这方面内容在第八章叙述。

第四阶段 假定 $\Delta_s\neq 0$，$\Delta_G\neq 0$，$\Delta_N\neq 0$。

这意味着在平差过程中同时处理可能出现的三种误差。这个假定是客观的，但现在只处于理论研究阶段，应用甚少。这一阶段李德仁博士提出了不同模型误差的可区性理论及其可靠性理论，这将在第七章叙述。

第三章　测量平差中数学模型的发展

§ 3-1　最小二乘法的近代发展

一、经典平差法

自1794年高斯创立最小二乘法以来，在测绘领域得到了广泛的应用，许多测量学者对平差理论和方法进行了大量的研究，提出了许多整体平差的基本方法。在最小二乘准则下这些基本方法都归结为解算法方程组的问题。在计算机出现之前，一个主要问题是大量法方程的解算问题，因为解算大量的法方程，不但要花费较多的时间，而且解算精度也不易保证。因此，以往经典平差研究的主要方向是如何少解一些法方程，许多学者为此又进行大量的研究，寻找捷径，简化方法以及合并计算步骤。自18世纪70年代相继提出了许多解决上述问题的方法。例如，史赖伯法则、克吕格分组平差、博尔兹扩展法及赫尔默特分区法等。从而使得平差方法有了较大进展，至今还在被广大测量工作者所应用。

二、最小二乘法的近代发展

随着测量工程的逐渐精密，测量技术的不断现代化，特别是电子计算机、矩阵代数、泛函分析、最优化理论以及概率统计在测量平差中的广泛应用，对测量平差的理论和实践均产生了深刻的影响，扩展了经典平差的数学模型，使测量平差，从经典平差进入近代平差，提出了一些称为近代平差的平差方法。

经典的高斯-马尔柯夫模型为

函数模型：
$$L = BX + \Delta \tag{3-1-1}$$

随机模型：
$$E(\Delta) = 0 \tag{3-1-2}$$

$$\Sigma = \sigma_0^2 \cdot Q = \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \tag{3-1-3}$$

式中，B为参数X的列满秩系数阵，P为观测值权矩阵，为对角阵。

1. 对随机模型的扩展

1）当式（3-1-3）中的P由对角阵扩展为满秩非对角方阵时，这便是由田斯特拉提出的相关平差法。相关平差的出现，观测值的概念广义化了，不仅随机独立的直接观测值可作为平差对象，而且由它的导出量，即随机独立观测值的函数或任何一种初步平差的结果，均可作为平差的对象。它的出现，对测量平差理论研究有重大的促进作用，推动了测量平差的发展。它的出现，使得最小二乘产生了分解，出现了最小二乘分解法。它包括阶段平差、分组（区）平差、序贯平差，这些平差都是由相关平差原理导出的。也就是说，这几种方法都是由前一次的平差结果作为下一次的平差对象，按此递推的平差方法，在下一节将作详细叙述。

2）当式（3-1-3）中的Q由满秩阵扩展到奇异阵时，即$|Q| = 0$。此时将经典平差推广到具有奇异权逆阵的最小二乘平差。引起权逆阵Q奇异有如下两种原因：

（1）观测向量L中线性相关，即一些分量是其它分量的线性组合。

（2）观测向量L中的一些分量没有误差。

设
$$\underset{n\cdot 1}{L}=\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix},\quad \underset{n\cdot n}{Q}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{3-1-4}$$

a．令$\underset{r\cdot 1}{L_1}$的权逆阵Q_{11}为非奇异，则有
$$rk(Q)=rk(Q_{11})=r<n \tag{3-1-5}$$
$$L_2=cL_1 \text{ 或 } v_2=cv_1$$

b．令L_2无误差，则
$$\underset{n\cdot n}{Q}=\begin{bmatrix} \underset{r\cdot r}{Q_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-1-6}$$

对于情况*a*，当*A*为列满秩时，可按
$$V^{T}Q^{-}V=\min \tag{3-1-7}$$
$$V^{T}Q^{+}V=\min \tag{3-1-8}$$
或
$$V_1^{T}Q_{11}^{-1}V_1=\min \tag{3-1-9}$$
进行平差，式中，Q^{-}、Q^{+}为Q广义逆和伪逆。

可以证明按式（3-1-7）～（3-1-9）进行平差所得的结果是相同的。

对于情况*b*，可按常规方法，将L_2作为起算数据处理。

3）式（3-1-3）中的权由验前确定扩展到验后估计方差，即通过平差估计方差，称为随机模型的验后估计，又称方差-协方差分量估计，它的出现，对于合理定权，提高具有多类观测值时平差结果的精度是很有益处的。为边角网、导线网恰当的精度匹配提供了理论依据。

4）当式（3-1-2）不等于零即$E(\Delta)\neq 0$时，在这种情况下，近年来又提出了顾及模型误差的平差方法。经典的最小二乘法通常假定没有模型误差，但是在实践中这种假设是不符合实际的。也就是说，许多平差问题还含有模型误差，如函数模型中含有系统误差和粗差，随机模型中方差-协方差不准确等。

随机模型误差可用上面提到的随机模型验后估计的方法来解决。函数模型误差可分两步解决，对于系统误差，提出了附加系统参数的平差，通过平差消除系统误差对平差结果的影响，在摄影测量中称为自检校平差。在这个基础上又提出了有偏估计，即参数估值$\hat{X}$的期望不等于参数向量X的估计，即
$$E(\hat{X})\neq X \tag{3-1-10}$$
有偏估计的种类很多，其中主要有岭估计、广义岭估计、主成份估计和特征根估计等。这将在第四章作简单介绍。对于粗差，人们又提出了数据探测法和稳健估计法，这些方法对检验粗差、消除粗差的影响是有效的。这将在第五、六章重点介绍。

2．对函数模型的发展

（1）将式（3-1-1）加以扩展，便得最小二乘配置模型为
$$\underset{n\cdot 1}{L}=\underset{n\cdot t}{B}\,\underset{t\cdot 1}{X}+\underset{n\cdot(n+g)}{G}\,\underset{(n+g)\cdot 1}{Y}+\underset{n\cdot 1}{\Delta} \tag{3-1-11}$$

式中，L为观测向量，Δ为观测误差向量，又称噪声向量，B为非随机参数向量X的系数阵
$$G=\begin{pmatrix} \underset{n\cdot n}{E} & \underset{n\cdot g}{0} \end{pmatrix} \tag{3-1-12}$$

$$Y=\begin{pmatrix} \underset{n\cdot 1}{S} \\ \underset{r\cdot 1}{S'} \end{pmatrix} \tag{3-1-13}$$

式中，Y称之为信号，S称为已测点信号，S'为未测点信号，均是随机的。

模型式（3-1-11）是一个既包括非随机参数，又含有随机参数的模型，在这个模型中Δ是由随机变量组成的向量，S、S'是由随机函数组成的向量，这个随机函数是指平稳的具有各态历经性的随机函数。显然，这个模型是既含有随机变量又含有随机函数的新的平差模型。

当$G=0$或$Y=0$时，式（3-1-11）就是式（3-1-1）。即

$$L=BX+\Delta$$

当$B=0$或$X=0$时，则式（3-1-11）变为

$$L=GY+\Delta \tag{3-1-14}$$

这是一个无系统参数X的配置模型，又称滤波和推估模型。

当$S'=0$时，则式（3-1-14）变为

$$L=S+\Delta \tag{3-1-15}$$

为滤波模型。可见，最小二乘配置模型既包括了经典的最小二乘平差，也包括了近代平差方法，是一种广义平差法。详见文献〔18〕。

（2）将式（3-1-1）中的B矩阵由列满秩扩展到列降秩，从而提出了秩亏自由网平差法。我们知道，经典平差必须有必要的起算数据（平差基准），使平差结果强制符合在起算数据上。此时B为列满秩阵，按最小二乘原理解出的未知数是唯一的。当网中没有起算数据或必要起算数据不足时，系数矩阵B是奇异，按最小二乘原理求解未知数不可能得唯一解，为了得到唯一解，还需增加新的求解条件，根据加入的条件的不同，秩亏自由网平差的方法也不同，如加权秩亏网平差、普通秩亏网平差及拟稳平差等。

综上所述，高斯-马尔柯夫模型式（3-1-1）～（3-1-3），既适用于B列满秩或列降秩，也适用于Q奇异或非奇异的情形，故有人把它称为广义高斯-马尔柯夫模型。

此外，测量平差引进泛函分析后，提出了最小二乘平差的近代方法，使得公式推导、书写较矩阵代数还要简单，具有明显的几何意义。因此，进一步研究H空间理论在最小二乘平差中的应用是非常有意义的。详见文献〔31〕。

§3-2 观测数据的分期处理

一、概述

对观测数据的处理是测量平差研究的主要内容之一。根据观测误差性质的不同，在第二章对不同误差的处理大体上分为四个阶段。在这四个阶段中，除第一阶段外都是同时处理两种误差，进而又提出了一些相应的数据处理方法，在上一节我们作了简述，其中分期平差就是有效的方法之一。第一期是指平差检验，第二期是平差计算。

分期平差又称阶段平差，它可把某一个复杂的平差问题，根据相关平差原理，分成若干个阶段（期），而每个阶段（期）都可视为一个独立的平差问题，进行分期（或阶段）平差。分期平差理论上是严密的，可以证明，它的结果与整体平差结果完全相同。

分期平差的基本要求是，各分期的观测数据要在统计上相互独立（每期中各观测值之