初等数学综合训练

上　　册

熊大寅　陈昌祥　成应璟　陈纪绵
梁法驯　肖若朴　李伯粤　樊　恺
合　　编

湖北人民出版社

初等数学综合训练
上 册
熊大寅等合编
湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行
武汉市江汉印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 17.75印张 411,000字
1981年12月第1版 1981年12月第1次印刷
印数：1—20,100
统一书号：7106·1606 定价：1.41元

前　言

这是一本从国内外大量习题中筛选出来的初等数学题汇集．我们选编这本习题集，企图通过它来反映初等数学中基本训练与综合运用间的内在联系．

综合运用所学知识以分析问题和解决问题，这是现行中学教学大纲对数学教学提出的要求．本书正是从这一点着眼，来搜集和整理有关资料的．为了便于读者查阅，我们按照习惯把本书内容分为：代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何和杂题等六篇．在各篇中，充分注意了从加强基本训练入手，力求做到有关知识的相互沟通和相互渗透．

综合题不一定就是难题．它的主要特点在于运用知识的灵活性和技巧性．在习题次序的安排上和解法的选择上，我们尽可能注意初等数学知识的系统性和解题的规律性．但我们认为，和其他一切科学一样，学习数学也只有通过有目的的实践，才能使这种规律性成为自己的东西．而这种实践则正是牢固掌握和灵活应用基础知识所必需的．

为了适应读者的不同需要，我们对其中某些难度较大的习题加了必要的附注，目的在于介绍有关基础知识、解题思路，并给读者以一定启示．这类习题虽难度较大，但根据循序渐进的原则，有中学数学基础的同志，是可以理解和掌握的．

参加本书编写工作的有：熊大寅、陈昌祥、成应璪、陈纪绵、梁法驯、肖若朴、李伯粤、樊恺等八人．由于我们的水平有限，书中缺点错误在所难免，希望读者指正．

编　者

目　　录

上　册

一、代　　数

§ 1.1　数

1. 从 1，2，3，4，……100 中选 10 个数，使其倒数和等于 1.

解　$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$;

$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$;

……………………;

$\frac{1}{90}=\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$.

故　$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$

$=1-\frac{1}{10}$.

上式左边再加$\frac{1}{10}$，即得 1.

故　2，6，10，12，20，30，42，56，72 和 90 的倒数和等于 1.

2. 证明：任意正有理数可以表示为调和数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\cdots,\frac{1}{n},\cdots$不同项之有限和的形式.

证　设$\frac{a}{b}$是一个有理数，那么它可表示为调和数列的 a 个

重复项之和：

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\cdots\cdots+\frac{1}{b}.$$

使第一个被加项不变，而其余$(a-1)$个加项以下列恒等式作变换：

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

其次，再把这个恒等式应用到重复的加数上，并把这个过程继续到和的所有各项变成不同数为止.

例 $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$

$=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{57}+\frac{1}{3192}.$

3. 已知 $\lg 3=0.4771$，问 3^{100} 是几位数？它的个位数是几？为什么？

解 $\because$ $\lg 3^{100}=100\lg 3\approx 100\times 0.4771=47.71$，

$\therefore$ 3^{100} 共有 $47+1=48$(位).

又$\because$ $3^{100}=9^{50}=81^{25}$，而 81 的个位数是 1，25 个 1 相乘仍为 1，即 81^{25} 的个位数为 1.

$\therefore$ 3^{100} 的个位数是 1，即 3^{100} 有 48 位数字，个位数是1.

4. 试证明：如果 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ 中的 a，b，c 是有理数，那么 $a=b=c=0$.

证 记$\sqrt[3]{2}=z$，因此 $z^3=2$，已知的等式变形为

$$cz^2+bz+a=0. \qquad (1)$$

用 2 乘这个等式的两边，用 z^3 替换最后一项的 2，得

$$2cz^2+2bz+az^3=0.$$

或

$$az^2+2cz+2b=0. \qquad (2)$$

由(1)和(2)消去 z^2 项，得

$$(ab-2c^2)z+a^2-2bc=0. \tag{3}$$

若一次方程(3)的系数不等于 0，

则
$$z=\frac{2bc-a^2}{ab-2c^2}$$
是有理数，这是不可能的.

所以，一次方程(3)的系数恒等于 0，

即 $ab-2c^2=0$，和 $a^2-2bc=0$，

由此可得 $ab=2c^2$ 和 $a^4=4b^2c^2$.

如果 $a\neq 0$ 和 $b\neq 0$，逐项用第一个式子除第二个式子，

得
$$a^3=2b^3. \tag{4}$$

即 $\frac{a}{b}=\sqrt[3]{2}$. 但 $\sqrt[3]{2}$ 不等于有理数 $\frac{a}{b}$，因此，除非 $a=0$ 和 $b=0$ 以外，等式(4)不能成立. 而这时 $c=0$.

5. 试证 $\lg\frac{6}{7}$ 是一个无理数.

证 $\lg\frac{6}{7}<0$，若 $\lg\frac{6}{7}$ 是一个有理数. 设

$\lg\frac{6}{7}=-\frac{n}{m}$. ($m$、$n$ 为正整数)

则
$$10^{-\frac{n}{m}}=\frac{6}{7},$$
$$10^n=\left(\frac{7}{6}\right)^m,$$
$$10^n\cdot(2\cdot 3)^m=7^m,$$
即
$$2^{m+n}\cdot 3^m\cdot 5^n=7^m.$$

但上式左边含有质因数 2、3、5，而右边只含有质因数 7，不可能相等，所以 $\lg\frac{6}{7}$ 不可能是有理数，一定是无理数.

6. 证明：对于任意一个正整数 n，数 $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$

都不能是一个完全平方数.

证 因为 $(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2<n^4+2n^3+2n^2+n+1$

$$<n^4+2n^3+3n^2+2n+1=(n^2+n+1)^2,$$

因此，题中的数在两个连续平方数之间，所以它不能是一个完全平方数.

7. 数 11111 在哪种进位制中是一个完全平方数?

解 设进位制的底数是 B，而 $B>1$.

那么，数 11111 可以写成 $B^4+B^3+B^2+B+1$ 的形式，其次

$$\left(B^2+\frac{B}{2}\right)^2<B^4+B^3+B^2+B+1<\left(B^2+\frac{B}{2}+1\right)^2,$$

如果中项是一个完全平方数，那么应该满足等式

$$\left(B^2+\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=B^4+B^3+B^2+B+1,$$

从而 $\dfrac{B^2}{4}-\dfrac{B}{2}-\dfrac{3}{4}=0$ 即 $(B-3)(B+1)=0$

所以 $B=3$，这时 $11111=(102)^2$.

8. 在十进制中以如下的方式构成一个数 $x=x_0.x_1x_2x_3\cdots$. 其中 $x_0=1$，而 x_n 是 $x_0+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}$ 被 9 除时所得的最小余数. 试证明 x 是有理数.

证 由题设条件有等式

$$9n+x_k=x_{k-1}+x_{k-2}+\cdots+x_1+x_0=x_{k-1}+x_{k-1}+9m$$

即 $9n+x_k=2x_{k-1}+9m$

由这个递推关系式可以导出

$$9n+x_k=2^{k-1}x_0+9p$$

这个等式表示 x_k 是 $2^{k-1}x_0(=2^{k-1})$ 被 9 除时的余数. 因为不同余数的个数最多只有 9 个，所以余数所组成的数列 $\{x_k\}$ 中，至少存在两个相等的元素 x_k 和 x_{k+q}. 因此

$$x_{k+j}=2^jx_k+9l=2^jx_{k+q}+9l=x_{k+q+j}+9r$$

其中 $j=0,1,2,\cdots,q-1$.
由此推出等式 $x_{k+j}=x_{k+q+j}$,

因为 $0\leqslant x_k\leqslant 8$，所以数 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ 由有 q 个数字的重复循环节组成，故它是有理数.

9. 证明：①对于任何自然数 n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 是既约分数；

②无论 a 为任何整数，分数 $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ 是不可约的.

证法一 ①在给定的分数中，分子大于分母，我们将它化为整数和真分数的和：

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}.$$

若给定的分数可约，那末真分数 $\frac{7n+1}{14n+3}$ 也必可约，从而其倒数 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 同样应该可约. 但是

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1},$$

而 $\frac{1}{7n+1}$ 是不可约的，所以原来的分数也不可约.

证法二 对 $21n+4$，$14n+3$ 作辗转相除法：

$$\begin{array}{r|r|r|l} 1 & 21n+4 & 14n+3 & 2 \\ & 14n+3 & 14n+2 & \\ \hline & 7n+1 & 1 & \end{array}$$

由于 $21n+4$，$14n+3$ 的最大公约数为 1，所以 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约.

②**证法一** $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}=\frac{a^2+3}{(a^2+3)^2+(a^2+3)-1}.$

若分子可被整数 K 整除，那么分母不可能被整数 K 整除，

这是因为分母的前两项可被 K 整除，但第三项却不能，故已知分数是不可约的.

证法二 分数$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$和它的倒数$\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}$是同时可约或者不可约的.

但 $$\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}=a^2+4-\frac{1}{a^2+3},$$

这样，原分数也就同时和分数$\frac{1}{a^2+3}$或者可约或者不可约，但$\frac{1}{a^2+3}$无论 a 为何整数值是不可约的，所以原分数也是不可约的.

10. 求证：不存在这样两个既约分数，它们的乘积与它们的和均为整数.

证 设$\frac{m_1}{n_1}$和$\frac{m_2}{n_2}$是两个既约分数(m_1、m_2、n_1、n_2 是整数)，且有

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=p, \quad \frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=q,$$

这里，p、q 是整数.

此时，$\frac{m_1}{n_1}$和$\frac{m_2}{n_2}$即为二次方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根.

但由 $$\frac{m_1^2}{n_1^2}-p\cdot\frac{m_1}{n_1}+q=0,$$

就有 $$\frac{m_1^2}{n_1}=pm_1-qn_1.$$

上式左边不是整数，而右边是整数，这是不可能的.

同样，$\frac{m_2}{n_2}$也不可能是 $x^2-px+q=0$ 的根.

所以，不存在两个既约分数，它们的乘积与它们的和均为

整数.

11. 已知对于自然数 n，$f(n)=5^{3n}+5^{2n}+5^{n}+1$，

①求证：当 n 不是 4 的倍数时，$f(n)$ 能被 13 整除；

②当 n 是 4 的倍数时，求 $f(n)$ 被 13 除的余数.

解 $f(n)=(5^{n}+1)(5^{2n}+1)$

①当 n 不是 4 的倍数时，$n=4m+2$ 或 $2m+1$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$

当 $n=4m+2$ 时：

$$5^{n}+1=5^{4m+2}+1=25^{2m+1}+1$$
$$=(25+1)(25^{2m}-25^{2m-1}+\cdots-25+1)$$
$$=2\times13\times(25^{2m}-\cdots\cdots+1),$$

当 $n=2m+1$ 时：

$$5^{2n}+1=25^{2m+1}+1=2\times13\times(25^{2m}-\cdots+1)$$

所以 $f(n)$ 能被 13 整除.

②当 n 是 4 的倍数时，$n=4m(m=1, 2, \cdots)$

$$f(n)=(5^{4m}+1)(5^{8m}+1)=(25^{2m}+1)(25^{4m}+1)$$
$$=(25^{2m}-1+2)(25^{4m}-1+2).$$

又因 $25^{2m}-1=(25^{2}-1)(25^{2m-2}+25^{2m-4}+\cdots+1)$

$$=48\times13\times(25^{2m-2}+\cdots+1)$$
$$=13N\ (N\text{ 为自然数}),$$

同理 $25^{4m}-1=13M$ (M 为自然数).

所以 $f(n)=(13N+2)(13M+2)$

$$=13(13MN+2M+2N)+4$$

因此，余数为 4.

12. 证明三个连续自然数的立方和可被 9 整除.

证法一 $1^{3}+2^{3}+3^{3}$ 显然可被 9 整除.

假定 $k^{3}+(k+1)^{3}+(k+2)^{3}$ 可被 9 整除，

下面需要进一步证明

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ 也可被 9 整除.

$\because\quad (k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$

$=[(k+1)^3+(k+2)^3+k^3]+9(k^2+3k+3)$,

第一项 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ 可被 9 整除,

第二项 $9(k^2+3k+3)$ 也可被 9 整除,

所以其和也可被 9 整除.

证法二 $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$

$$=9k^2+9+3k(k^2+5) \tag{1}$$

如果 k 可被 3 整除，显然等式(1)的右边部分就可被 9 整除;

如果 k 不可被 3 整除，那么 k 可写成 $k=3m+1$ 或 $k=3m-1$,（m 是正整数或 0）. 但

$k^2+5=(3m+1)^2+5=9m^2+6m+6$

$=3(3m^2+2m+2)$,

或 $k^2+5=(3m-1)^2+5=9m^2-6m+6$

$=3(3m^2-2m+2)$.

这两种情况 k^2+5 都可被 3 整除，因此，等式(1)的右边部分也都可被 9 整除.

13. 证明：若 n 是不能被 2 和 5 整除的自然数，那么总可以找到全由 1 组成的数，能被 n 整除.

证 设 $a_1=1$, $a_2=11$, ……, $a_{n+1}=\overbrace{111\cdots\cdots1}^{n+1\text{个}}$.

用 n 依次除 a_1, a_2, ……, a_{n+1}, 得到

$$a_1=q_1n+r_1 \tag{1}$$

$$a_2=q_2n+r_2 \tag{2}$$

$$a_3=q_3n+r_3 \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n+1}=q_{n+1}n+r_{n+1} \qquad (n+1)$$

这里，$r_i<n$，$i=1$，2，……，$n+1$. 即 r_i 只能取 0，1，2，……，$n-1$ 这 n 个数值. 故 $n+1$ 个余数 r_1，r_2，……，r_{n+1} 里，至少有 2 个余数相等. 我们不妨假定

$$r_s=r_k(s>k).$$

由 (s) 式减去 (k) 式，得

$$a_s-a_k=(q_s-q_k)\cdot n.$$

但 $$a_s-a_k=\overbrace{11\cdots\cdots1}^{s个}-\overbrace{11\cdots\cdots1}^{k个}=\overbrace{11\cdots\cdots1}^{s-k个}\ \overbrace{00\cdots\cdots0}^{k个}$$

$$\therefore\quad \overbrace{11\cdots\cdots1}^{s-k个}\ \overbrace{00\cdots\cdots0}^{k个}=(q_s-q_k)\cdot n$$

即 $$\overbrace{11\cdots\cdots1}^{s-k个}\times 10^k=(q_s-q_k)\cdot n$$

由题设，n 和 10^k 互质，因此 $\overbrace{11\cdots\cdots1}^{s-k个}$ 必能被 n 整除. 事实上，不仅 $\overbrace{11\cdots\cdots1}^{s-k个}$ 能被 n 整除，而且 $\overbrace{11\cdots\cdots1}^{2(s-k)个}$，$\overbrace{11\cdots\cdots1}^{3(s-k)个}$，$\overbrace{11\cdots\cdots1}^{4(s-k)个}$，……都能被 n 整除，也就是说，这样的数有无限多个.

14. 试证：$2222^{5555}+5555^{2222}$ 可被 7 整除。

证明 $$2222^{5555}+5555^{2222}=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-4^{2222}).$$

考虑三个括弧内的数字：

第一个括弧内的数可被 $2222+4=2226=7\times318$ 整除（因当 n 为奇数时 a^n+b^n 可被 $a+b$ 整除）；第二个括弧内的数可被

$5555-4=5551=7\times793$ 整除；第三个括弧内的数可写成

$$4^{2222}(4^{3333}-1)=4^{2222}(64^{1111}-1),$$

显然它可被 $64-1=63$ 整除.

由此可得到原数可被 7 整除.

15. 设 a_1，a_2，……a_n 为 n 个正整数（不论有无相等）. 试证明：必能在其中取出若干个数，如 a_i，a_{i+1}，……，a_j $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，使得 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j$ 为 n 的倍数.

证 在 $n+1$ 个数：0，a_1，a_1+a_2，……，$a_1+a_2+\cdots+a_n$ 中必有对 n 同余的数（即用 n 除时所得小于 n 的非负余数相同）. 于是，取这两个数相减，即得一形如 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j$ 之数，它为 n 的倍数.

16. 证明：不存在这样的三个连续奇数，使得其中每个数是两个非零平方数之和.

证 每个整数可用下列形式之一表示：$4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$，因此，整数的平方可以表示为 $4k$ 或 $4k+1$，从而两个整数的平方之和有 $4k$ 或 $4k+1$ 或 $4k+2$ 的形式. 但任一奇数有 $4k+1$ 或 $4k+3$ 的形式，因此，不但在三个，甚至在两个连续奇数之间，一定有一个数不能表示为两个平方数之和的形式.

17. 求所有的三位数，使其中每一个数除以 11 所得的商等于被除数的数字的平方和.

解 当数字的交错和（即偶位数字的和与奇位数字的和之差）$a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^na^n$，$(n=0, 1, 2, \cdots)$ 等于零，或者被 11 整除时. 数 $z=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\cdots+a_210^2+a_110^1+a_0$. 能被 11 整除.

设被 11 整除的三位数为 $z=100a+10b+c$，其中 a，b，c 为这个数的数字，且 $1\leqslant a\leqslant9$，$0\leqslant b\leqslant9$，$0\leqslant c\leqslant9$. 故有

$$a-b+c=0 \qquad (1)$$

或 $$a-b+c=11 \tag{2}$$

因为 $a-b+c$ 最多只能等于 18. 所以 $a-b+c=22$ 是不可能的.

根据题设的条件所求之数的数字必须满足方程:

$$100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2) \tag{3}$$

下面分两种情形进行讨论:

情形 Ⅰ: 由 (1) 得出 $b=a+c$, 代入 (3) 得

$$100a+10a+10c+c=11(2a^2+2ac+2c^2)$$

即 $$10a+c=2(a^2+ac+c^2) \tag{4}$$

$\therefore$ $10a+c$ 应为偶数, 因此 c 也是偶数.

由 (4) 得 $$a^2+(c-5)a+c^2-\frac{c}{2}=0 \tag{5}$$

解之得:

$$a_{1,2}=-\frac{c-5}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2-10c+25}{4}+\frac{c}{2}-c^2}$$

即 $$a_{1,2}=\frac{5-c}{2}\pm\sqrt{\frac{-3c^2-8c+25}{4}}$$

$$=\frac{5-c}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{25-8c-3c^2}.$$

$\because$ c 为偶数, $\therefore$ 必须对 $c=0$, $c=2$, $c=4$, $c=6$, $c=8$ 分别进行讨论.

$$c=0;\ a_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\frac{5}{2},$$

$a_1=5$, $a_2=0$, a_2 不是解.

$c\geqslant 2$ 时, a 是虚数, 不合题意.

对于 $a=5$, $c=0$, 我们得到数 550, 经检验知它满足题设条件.

情形 Ⅱ: 由 (2) 得出 $b=a+c-11$ 代入 (3) 得

$$100a+10a+10c-110+c=11[a^2+(a+c-11)^2+c^2]$$

即 $$10a+c=131+2(a^2+c^2+ac-11a-11c) \tag{6}$$

故　$10a+c$ 应为奇数，而 $10a$ 为偶数，所以 c 应为奇数.

由(6)得　$a^2+(c-16)a+c^2+\frac{131}{2}-\frac{23c}{2}=0$　　　　(7)

解之得

$$a_{1,2}=-\frac{c-16}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2-32c+256}{4}-\frac{131}{2}+\frac{23c}{2}-c^2}$$
$$=\frac{16-c}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-6+14c-3c^2}$$

因此，必须对于 $c=1$，$c=3$，$c=5$，$c=7$，$c=9$ 分别进行讨论.

当 $c=1$ 时，a 不是一自然数.

$c=3$ 时，$a_{1,2}=\frac{13}{2}\pm\frac{3}{2}$，

$\therefore$　$a_1=8$，$a_2=5$，a_2 不是解，
因为这时 $b<0$.

$c\geqslant5$ 时，a 为虚数，不合题意.

所以对于 $a=8$ 和 $c=3$ 得到数 803，经检验知道，它也满足题设条件.

故所求的三位数只有 550 和 803.

18. 如果今天是星期天，问 $10^{10^{10}}$ 天后是星期几?

解　$10^6=7\times142857+1$，$10^4=7\times1428+4$，

$$\begin{aligned}10^{10^{10}}&=10^{9999999996}\times10^4\\&=(10^6)^{1666666666}\times10^4\\&=(7\times142857+1)^{1666666666}\times(7\times1428+4)\\&=[(7\times142857)^{1666666666}\\&\quad+1666666666(7\times142857)^{1666666666}\\&\quad+\cdots\cdots+1](7\times1428+4).\end{aligned}$$

展开后除以 7 余 4，即星期日后第 $10^{10^{10}}$ 天是星期四.

19. 求出 2^{999} 的最后两个数字.

解 要找 2^{999} 的末二位数字是什么，只须找出 2^{999} 被 100 除所得的余数.

首先，我们证明 2^{1000} 被 25 除余数为 1，事实上

$$2^{10}+1=1024+1=1025$$

可被 25 整除；

$$10^{20}-1=(10^{10}-1)(10^{10}+1)$$

亦可被 25 整除；而 $2^{1000}-1=(2^{20})^{50}-1$ 可被 $10^{20}-1$ 整除，因此 $2^{1000}-1$ 亦可被 25 整除，即 2^{1000} 被 25 除余数为 1.

由此可知，2^{1000} 的末二位数字可能为 01，或 $01+25=26$，或 $01+50=51$，或 $01+75=76$，但 2^{1000} 为 4 的倍数，故 2^{1000} 的末二位数字只能为 76，而 2^{999} 为 2^{1000} 除以 2 所得的商，因此 2^{999} 的末二位数字可能为 38 或 88，但 2^{999} 亦为 4 的倍数，故 2^{999} 的末二位数字只能为 88.

20. 试找出下面的数被 7 除后，所得的余数：$10^{10}+10^{10^2}+\cdots+10^{10^{10}}$.

解 我们知道 $10^6-1=999999=7\times142857$ 可被 7 整除.

由此可得，若 $N=6k+r$，则 10^N（N 为任意正整数）被 7 除所得的余数，与 10^r 被 7 除所得的余数相同. 这是因为

$$10^N-10^r=10^{6k+r}-10^r=10^r(10^{6k}-1)$$

而 $10^{6k}-1=(10^6)^k-1$ 可被 10^6-1 整除，因而也为 7 的倍数，故 10^N-10^r 可被 7 整除，也就是说，10^N 与 10^r 被 7 除所得余数相同.

其次，我们知道原题中每一项的幂被 6 除皆余 4，而由前面讨论知 10^{6k} 与 10^6 都能被 7 整除，因而可将原题中每一项含有可被 7 整除的因数略去，因而