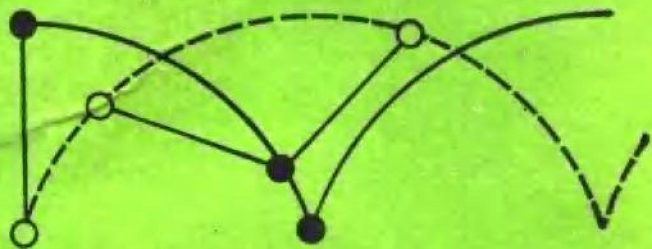


陈守吉 罗惟德 编



大学应用数学丛书

基础力学

复旦大学出版社

大学应用数学丛书

基 础 力 学

陈守吉 罗惟德 编

复旦大学出版社

基 础 力 学

陈守吉 罗惟德 编

复旦大学出版社出版

(上海国权路579号)

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张11 字数312,000

1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷

印数1—5,000

ISBN7-309-00192-3/O·44

定价: 2.80元

《大学应用数学丛书》

编 审 委 员 会

名誉主任 苏步青

主 任 谷超豪

委 员 (按姓氏笔划为序)

叶敬棠 李大潜 李立康

李训经 吴立德 汪嘉冈

俞文魮 欧阳邕 蒋尔雄

本书责任编辑 范仁梅

出版者的话

近年来,随着我国现代化建设事业的发展,许多高等学校创办了一大批重视数学理论和应用的专业和系科,如:应用数学、应用力学、计算数学、控制科学、信息科学、系统科学、运筹学、统计学、计算机科学、应用物理、管理科学等等。为了满足这类专业数学教学的需要,我们组织编写和出版了一套“大学应用数学丛书”。本书即为这套丛书中的一本。

“大学应用数学丛书”重视现代数学的基本理论,强调数学的实际应用,反映现代科技的先进成果,并便于课堂教学和自学。我们希望,这套丛书的出版将有助于我国应用数学教学与研究的展开,促进数学更好地为国民经济和现代化建设服务。

在组织编写这套丛书的过程中,我们曾得到陈开明、陈有根、柳兆荣、徐公权等同志的热情帮助,在此特表谢忱。

复旦大学出版社

1987年1月

序 言

本书是根据全国理科数学类理论力学教材会议(1986年,上海)的精神并参照原教育部有关的理论力学教学大纲编写的,是供理科大学数学类各专业(包括数学、应用数学、计算数学和运筹学等专业)二、三年级使用的教材,也可作为工科大学数学和力学专业的教学参考书。

力学是数学联系实际的重要桥梁。理科大学数学类各专业开设的“基础力学”课,可以扩大学生视野,认识自然界的规律,了解数学本身的实际背景,增强直观的思维能力,进一步掌握、运用数学理论解决实际问题的本领,从而有利于学好后继的自然科学课程。

本书内容包括两大部分。第一部分讨论质点和刚体,这是理论力学的内容,第二部分讨论弹性体,其中包括材料力学和弹性力学的基本内容。因为这两部分都是力学的基础,因此本书取名为《基础力学》。这是为了适应数学类“理论力学”课程改革的要求、扩大学生的知识面和增强力学的应用性。

本书把运动学列为第一章,便于与微积分学内容相衔接,同时为学好拉氏力学打下良好的基础。第二章静力学的内容较为简单,着重于受力分析和平衡方程,还介绍了便于在电子计算机上应用的矩阵方程。为了加强以拉氏方程为主要内容的分析力学,我们大量删减了牛顿三定律方面的内容,在第三章牛顿力学中只讲基本概念和普遍定理的综合应用,这样就可提前学习第四章拉氏力学,并在第五章中用牛顿法和拉氏法一起讨论各个动力学专题,使学生能熟练地掌握牛顿法和拉氏法两种解题方法,并能取长补短,灵活应用,提高准确、迅速解决实际问题的能力,这是本课程的基本要求之一。第六章是哈密顿力学基础,介绍了正则方程和哈密顿原理。第二部分是弹性体力学的入门介绍,着重于基本概念和基本方法。第八章和第九、十章的内容相对独立,根据各专业的要求和教学时数的多少,在先学第七章后可只教第八章或只

教第九、第十章的内容。

本书的基本内容大约可在 90 学时内教完(其中讲课 72 学时,习题 18 学时),如果只教理论力学部分(即前六章)的内容,则可减少到大约 72 学时(其中讲课为 54 学时,习题课为 18 学时)。

经典力学的重要性之一,在于它与人类每天的实践活动直接相联系,能深入地揭示日常现象的物理本质,因此在“基础力学”的教学过程中,在条件许可时,应组织学生进行参观活动(如游乐场中的新型游艺机等),引导学生自己对见到的力学现象作出解释;另外,通过计算机辅助教学软件,还可让学生在计算机上形象地演示有关教学内容。总之,要通过多种形式,加强“基础力学”课与社会、生活的联系,不断激发学生学习本课程的兴趣。

本书的第一部分主要由陈守吉编写,第二部分主要由罗惟德编写。

本书是在多年教学实践的基础上编写而成,本书的油印稿曾作为复旦大学数学系和统计运筹系各个专业的教材,参加教学的教师和一些同学对本教材提出了许多宝贵意见,编者趁这次出版之际,谨向他们表示衷心的感谢。由于编者的水平所限,书中一定有不少缺点和错误,恳请广大读者批评指正。

编 者

1987.9.

目 录

序 言

第一部分 质点和刚体

第一章 质点和刚体的运动学	1
§ 1.1 质点运动学.....	2
§ 1.2 刚体的基本运动和平面平行运动	15
§ 1.3 刚体的定点转动和一般运动	29
§ 1.4 质点和刚体的复合运动	39
习题.....	55
第二章 静力学	66
§ 2.1 静力学的基本概念	66
§ 2.2 受力分析	71
§ 2.3 平衡方程	77
§ 2.4 静定刚体系统的矩阵解法	90
习题.....	100
第三章 牛顿动力学	107
§ 3.1 牛顿理论.....	107
§ 3.2 基本概念.....	115
§ 3.3 质点系动力学普遍定理.....	122
§ 3.4 守恒定律以及普遍定理的综合应用.....	131
习题.....	135
第四章 拉格朗日力学	140
§ 4.1 分析力学的基本概念.....	140
§ 4.2 虚位移原理和达朗伯原理.....	149
§ 4.3 第二类拉格朗日方程.....	155
习题.....	173
第五章 牛顿法和拉氏法的应用	179

§ 5.1 刚体动力学·····	179
§ 5.2 相对运动动力学·····	196
§ 5.3 微振动·····	203
习题·····	211
第六章 哈密顿力学 ·····	216
§ 6.1 哈密顿正则方程·····	216
§ 6.2 哈密顿变分原理·····	222
习题·····	223

第二部分 弹 性 体

第七章 弹性力学的基本概念 ·····	225
§ 7.1 弹性力学的基本假设·····	225
§ 7.2 位移和变形·····	226
§ 7.3 内力和应力·····	229
习题·····	231
第八章 材料力学基础 ·····	233
§ 8.1 拉伸与压缩·····	233
§ 8.2 剪切·····	239
§ 8.3 扭转·····	241
§ 8.4 弯曲·····	245
习题·····	263
第九章 弹性力学的基本方程 ·····	267
§ 9.1 平衡方程和应力分析·····	267
§ 9.2 变形分析和几何方程·····	275
§ 9.3 物理方程(广义虎克定律)·····	282
§ 9.4 弹性力学问题的提法·····	284
§ 9.5 弹性力学的平面问题·····	290
习题·····	301
第十章 能量原理 ·····	304
§ 10.1 虚功原理·····	304
§ 10.2 应变势能·····	306
§ 10.3 最小势能原理及其应用·····	310

§ 10.4 位移变分法.....	312
§ 10.5 互等定理.....	316
习题.....	318
附 录	320
I 无限小转动是矢量.....	320
II 刚体角速度与基点选取无关.....	321
III 虚位移原理的证明.....	322
IV 变分法简介.....	323
参考文献	328
部分习题答案	329

第一部分 质点和刚体

第一章 质点和刚体的运动学

运动学（主要是质点和刚体的运动）是理论力学中的一个重要部分，它不仅是动力学的基础，而且运动学本身在工程实际中也有着许多应用。例如，在设计传动机构时首先要作运动分析，特别在仪表设计中，由于零件受力较小，动力分析往往可不加考虑，运动分析就成为设计时的主要内容。

运动学是以研究质点和刚体这两个简化模型的运动为基础的。它通过位移、速度、加速度及角速度等物理量来描述和研究物体位置随时间的变化规律，而并不考虑导致物体位置和运动状态改变的原因，即不考虑作用在物体上的力。因为运动学中不涉及物体的质量，所以不妨把质点抽象成一个不计质量、没有大小的几何点，因此，常把质点运动学抽象为点的运动学。

本书的前六章是研究质点和刚体，只有掌握了这两类运动的规律，才能进一步研究变形体（弹性体等）的运动，这时要分别研究微元的刚体位移和变形位移。

为了描述运动，我们首先要搞清楚参考体、参考系和坐标系三个概念，它们之间既有联系，又有区别。

我们知道，物体的运动都是相对的。为了要描述某个物体的位置和运动，就要选取另外一个物体作为参考，这个作为参考的物体就称之为参考体。在理论力学中，常选取某个三维的、不变形的物体作为参考体。

为了讨论方便，我们还要把参考体抽象为参考系，即在参考体上安置一个固连的三维标架，用它代表这个参考体，这个标架就称之为参考

系。参考体总是一个大小有限的真实物体，而参考系则应理解为与参考体相固连的三维空间，它是无限的。例如，当我们选取地球为参考体时，可在地面上固连一个标架，其三个方向分别沿着当地的经线方向、纬线方向和指向天顶的方向，这样的标架称之为**地球参考系**，我们可在此参考系中讨论某个人造卫星的运动，虽然该卫星离地面有几万公里，但它仍在地球参考系的空间中运动。当然，在地球上各点，包括地心都可安置一个固连的标架，它们本质上是一样的，都代表地球，可认为是同一参考系。所以一个参考体对应于一个参考系。

有时候，参考系是更为抽象的，可能只有参考系而没有真实的参考体。例如，设想一个标架，该标架以地球中心为原点，三个方向分别指向三颗恒星，它的原点与地心一起运动，标架的三根轴在太阳系的指向不变，这也是一个参考系，称之为**地心参考系**。它与前述的地球参考系是不同的，地心参考系并没有固连在某个真实参考体上，而且在地心参考系中可观察到地球的自转。今后，我们不作特别声明时，总选取**地球参考系**。

在选定参考系后，对某一物体的运动的描述才有确定的意义。为了对物体的运动作数学描述，就要在参考系中建立坐标系，它可根据题目的要求和解题的方便自由选定。同一个参考系中可建立许多个不同的坐标系(原点可以不同，坐标轴的方向也可不同)，而且坐标系还有各种不同的形式(例如直角坐标系、平面极坐标系等等)。例如，当讨论人造地球卫星的运动时，在地心参考系的轨道平面中，建立以地心为极点的平面极坐标系是最方便的。

由于固连在参考系中的空间直角坐标系就是一个标架，因此常用直角坐标系代表参考系，它具有参考系和坐标系的双重意义。

§ 1.1 质点运动学

本节讨论点在某一选定的参考系中作任意运动时，该点的速度、加速度和轨迹的表达式，我们将用矢量法、坐标法和自然法分别加以描述。

1. 矢量法

矢量法的优点是表达简洁,而且对各种坐标系都适用,在理论推导和求证时常用此法。

假设我们已经选定了某个参考系,而 O 是其中一个固定点,则任一点 M 在参考系中的位置就可用 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ 来表示(图 1-1), $\vec{r}$ 称为 M 点的位置矢量,或称为**矢径**。

如果任一瞬时 t , M 点的矢径 $\vec{r}$ 都是已知的,则 $\vec{r}$ 是时间 t 的矢量函数,即

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.1)$$

(1.1)式就称为 M 点的**运动规律**。根据点的

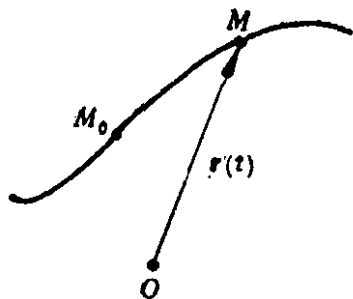


图 1-1

运动性质,可知 $\vec{r}(t)$ 是时间 t 的单值、连续函数,当 M 点运动时就在参考系中描出一条连续曲线,这条曲线称为 M 点的**轨迹**或**轨道**。而(1.1)式就是轨迹的参数方程(以 t 为参数)。根据轨迹的不同,可将点的运动分为空间曲线运动、平面曲线运动和直线运动等。

设 $\vec{r}(t)$ 关于 t 是二次可导的,根据矢量导数的定义,我们把 $\vec{r}(t)$ 的一阶导数 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ 称为 M 点在时刻 t 的瞬时速度矢量,简称**速度**,记作 $\vec{v}(t)$,我们用在字母 $\vec{r}$ 上加一点并用它来表示对时间的导数,则速度 $\vec{v}$ 与矢径 $\vec{r}$ 的关系是

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \quad (1.2)$$

显然,速度 $\vec{v}$ 沿着轨迹的切线方向。

再把速度矢量对时间求导一次,即 $\frac{d\vec{v}}{dt}$,称为 M 点在时刻 t 的瞬时加速度矢量,简称**加速度**,记作 $\vec{a}(t)$,则有

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \quad (1.3)$$

例 1.1 单位矢量的导数。设 $\vec{A}^0(t)$ 是平面上的一个单位矢量,即 $|\vec{A}^0(t)| = 1$,又设在时刻 t , $\vec{A}^0$ 与平面上固定直线 Ox 的夹角为 $\varphi(t)$ (图 1-2 a),试求导数 $\frac{d\vec{A}^0}{dt}$ 的表达式。

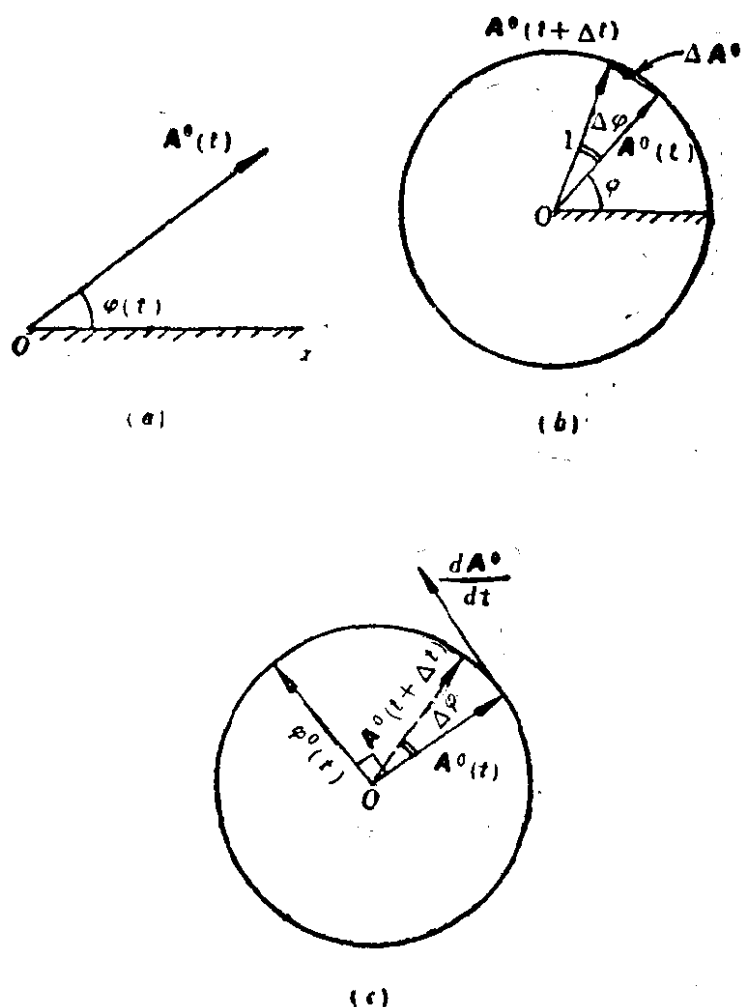


图 1-2

【解】 本例说明矢量导数的求法。

我们分别求矢量 $\frac{d\mathbf{A}^0}{dt}$ 的方向和大小。

先求方向。因 $|\mathbf{A}^0(t)| = 1$, 即 $(\mathbf{A}^0)^2 = 1$, 两边对 t 求导数得

$$\mathbf{A}^0 \cdot \frac{d\mathbf{A}^0}{dt} = 0$$

即矢量 $\frac{d\mathbf{A}^0}{dt}$ 的方向与单位矢量 $\mathbf{A}^0$ 本身垂直。这是一个经常用到的性质, 它对于空间的单位矢量同样成立。

再求 $\frac{d\mathbf{A}^0}{dt}$ 的大小 $\left| \frac{d\mathbf{A}^0}{dt} \right|$ 。设经 Δt 后, 单位矢量 $\mathbf{A}^0(t+\Delta t)$ 转过

角度 $\Delta\varphi$, 根据矢量导数的定义和图 1-2b, 有

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}^0}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}^0(t + \Delta t) - \mathbf{A}^0(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{A}^0}{\Delta t} \\ \left| \frac{d\mathbf{A}^0}{dt} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{A}^0|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left| 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right|}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| \\ &= |\dot{\varphi}| \end{aligned}$$

现设 $\varphi^0(t)$ 为垂直于 $\mathbf{A}^0(t)$ 的单位矢量, 且沿着 φ 增大的方向为正(图 1-2c), 则单位矢量的导数公式为

$$\frac{d\mathbf{A}^0}{dt} = \dot{\varphi} \varphi^0$$

2. 坐标法

对实际的力学问题, 常要求出物体速度、加速度的具体大小和方向, 以及轨迹方程等, 这时可选用合适的坐标系, 将速度或加速度在该坐标系中投影, 写出各分量的表达式后再进行运算, 这就称为坐标法。

必须指出的是, 由于矢量法和坐标法都要作微分运算, 所以必须要列出任意时刻(非特殊位置)的位置或速度的表达式, 才能求导。

常用的坐标系有直角坐标系、平面极坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系等, 下面将分别讨论之。

(1) 直角坐标系。这是大家熟悉的, 设 $Oxyz$ 为笛卡尔右手系, 沿坐标轴的单位矢量分别为 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 。点 M 的坐标为 (x, y, z) , 则矢径 $\mathbf{r}(\overrightarrow{OM})$ 为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.4)$$

要求得速度和加速度在直角坐标系中的各分量, 则只要根据定义(1.2)和(1.3)式, 将(1.4)式对时间求导数即可,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (1.6)$$

而 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{a}$ 在直角坐标系中的分量表达式为

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \quad (1.7)$$

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z} \quad (1.8)$$

读者可由此自行求出 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{a}$ 的大小及方向(由方向余弦给出)的表达式。

例 1.2 半径为 R 的轮子沿直线轨道无滑动地滚动(称为纯滚动), 已知轮子转角 φ (轮子上半径与空间固定的一直线间的夹角, 如图 1-3 所示) 的运动规律为 $\varphi = \varphi(t)$, 试求轮子边缘上一点 M 的轨迹、速度和加速度。

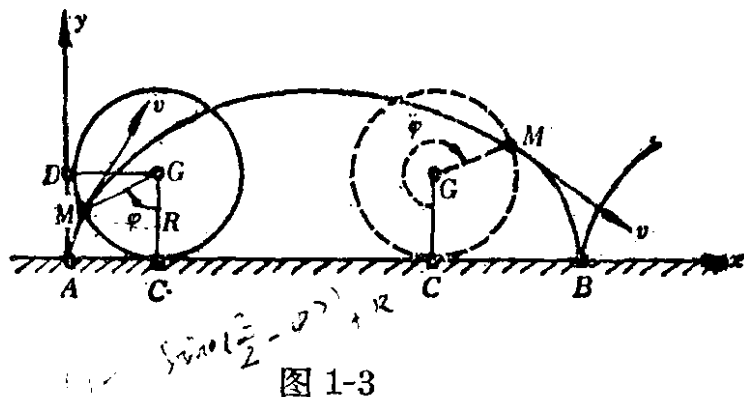


图 1-3

【解】 取轮缘上的 M 点为动点(研究对象)。在轮子滚动的平面上建立直角坐标系 Axy , 原点 A 是轮子滚动中 M 点的某个最低位置, Ax 轴沿滚轮的直线轨道, 在任意时刻 t , 轮子位置如图 1-3 所示, G 为轮心, C 是轮缘与轨道的接触点, $\angle CGM = \varphi(t)$ 。

由于轮子只有滚动而没有滑动, 所以 $AC = \widehat{CM} = R\varphi$ 。这样可得 M 点的坐标为:

$$\begin{cases} x = \overline{AC} - \overline{GM} \sin \varphi = R(\varphi - \sin \varphi) \\ y = \overline{GC} - \overline{GM} \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

因为 $\varphi(t)$ 是已知的, 所以(1)式就是 M 点的运动规律, 也是 M 点轨迹的参数方程。容易看出, 这是一条旋轮线, 滚轮是它的母圆。

由(1)式即可求出 M 点速度的直角坐标分量为

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = R\dot{\varphi}(1 - \cos \varphi) \\ v_y = \dot{y} = R\dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

速度的大小为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ &= |\dot{\varphi}| \left(2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right) = |\dot{\varphi}| \overline{MC} \end{aligned}$$

它的方向沿轨迹的切线。由此可以证明旋轮线的一个重要性质如下：

由图 1-3 可知

$$\overrightarrow{CM} = -R \sin \varphi \mathbf{i} + R(1 - \cos \varphi) \mathbf{j}$$

由(2)式, $\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$, 所以旋轮线上任一点 M 的切线方向与连线 MC 相垂直(C 是母圆上与轨道的接触点), 或者说, 旋轮线上 M 点的主法线

方向是沿着 $\overline{MC}$ 的, 由此可方便地画出旋轮线上任一点的速度方向。

又当 M 点在最低位置 A 点, B 点($y=0$), 即 $\varphi=0, 2\pi$ 时, 由(2)式可

知, $\dot{x} = \dot{y} = 0$, 所以轮子作纯滚动时, 轮缘接触点的瞬时速度为零。

由(2)还可求得加速度 $\mathbf{a}$ 的分量为

$$\begin{cases} a_x = R\ddot{\varphi}(1 - \cos \varphi) + R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ a_y = R\ddot{\varphi} \sin \varphi + R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \end{cases} \quad (3)$$

值得指出的是, 当 M 点在最低位置, 即 $\varphi=0, 2\pi$ 时, $a_x=0$, $a_y=R\dot{\varphi}^2$, 所以在滚轮与轨道的接触点 C 处, 加速度的方向指向轮心 G , 而其大小却与 $\ddot{\varphi}$ 无关。

(2) 平面极坐标系。当已知点作平面曲线运动时, 有时(例如人造地球卫星的运动)采用极坐标系比用直角坐标系更方便。现在就来导出极坐标下速度和加速度的表示式。

在平面极坐标系中, 设点 M 的位置由极坐标 (r, φ) 给出, 点 M 的运动将由运动规律 $r=r(t)$ 和 $\varphi=\varphi(t)$ 来描述。今沿矢径 $\overrightarrow{OM}$ 方向取径向单位矢量 $\mathbf{r}^0$ (图 1-4); 再取另一个横向单位矢量 $\boldsymbol{\varphi}^0$, 它由 $\mathbf{r}^0$ 沿着 φ 角增加的方向转过 $\frac{\pi}{2}$ 而得到, 所以 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 与 $\mathbf{r}^0$ 互相垂直。与直角坐标