基本粒子译文集

第四集

（超对称性）

科学技术文献出版社重庆分社

[50] B. W. Lee, Phys. Rev D9 (1974) 933.
首次使用一般线性规范来做的是:
[51] G't Hooft, Nucl. Phys. B35 (1971) 167.
进一步的讨论在
[52] K. Fujikawa, B. W. Lee and A. I. Sanda, Phys. Rev. D6 (1972) 2923.

译后注：本文是E. S. Abers和B. W. Lee的规范理论（Phys. Rep. 9C №1，1973；中译本见本刊第二集）的续篇。限于写作年代，前文对规范场重整化的叙述是不充分的和不完整的，作者在本文中弥补了这一点，特别是由于采取了由BRS变换来导出 Slavnov 恒等式和重整化方程等技术，使得关于规范场重整化问题的叙述臻至完善了。这两篇文章对有关的研究生教师和专业工作者有参考价值。

［闫沐霖、鲍锡明译自“METHODS IN FIELD THEORY (Session 28 of Les Houches 1975)” p.80—139，］张荫起校．

基本粒子译文集 第四集
（超对称性）

中国科学技术情报研究所重庆分所	编辑
科学技术文献出版社重庆分社	出版
重庆市市中区胜利路91号	
四川省新华书店重庆发行所	发行
重庆印制一厂	印刷

开本：787×1092毫米1/16　印张：12¾　字数：33万
1981年6月第一版　1981年6月第一次印刷
科技新书目：3—259　印数：0001—1,700册

书号：13176·92　定价：1.35元

目　　录

勘　　误

本译文集第三集中第一篇文章的题目“量子色动力学”及其摘要误印在封三上，特此更正。

超场与费米-玻色子对称

Abdus Salam 和 J. Strathdee

对定义在 8 维空间的场实现超规范变换，该空间的点用 x_μ 和反对易 Majorana 旋量 θ_α 表示。定义协变导数，并把它应用到将超场分解为各个不可约手征部分和建立一个超对称的拉氏量的问题。此外，说明在拉氏量中如何引入内部对称（整体的与定域的）。讨论一个内部（整体的）对称自发破缺产生 Goldstone 粒子（包含费米子）超多重态的例子。证明当定域对称破缺时，Higgs 机制（对于玻色子与费米子）仍是有效的。对于定义守恒费米子的问题，提出一个可能的方案。

一、引言

近来费米子与玻色子之间的基本对称概念开始受到很大重视。这种对称性首先是在双关模型理论中形成的[1]。在二维模型中，它采取定域对称的形式，并且对于消除鬼粒子起着极其重要的作用。最近，Wess 和 Zumino[2],[3] 在建立四维时空整体费米-玻色对称方面迈出了决定性的一步。

我们处理整体费米-玻色超对称问题[4],[5] 的方法与 Wess 和 Zumino 有些不同。这包括考虑在 8 维空间中定义超场 $\Phi(x, \theta)$，该空间是普通时空与座标点用反对易 Majorana 旋量 θ_α 表示的四维空间的乘积[6]。本文的目的是更详细地讨论上述超场的性质及其乘积，并说明如何建立与定域内部对称相容的超对称的拉氏量。本文计划如下：

在第二节引进赝几何观点及定义超对称群对 x_μ 和 θ_α 空间的作用。这导致以自然的方式得到标量、旋量等超场的变换规则。扼要地讨论了上述表示的结构。在第三节引进协变微分的重要概念，并指出它在将超场分解为各个不可约部分的用法。在附录 A 中给出了协变导数的详细性质，其中包括一些恒等式。在第四节中作为一个例证我们给出了 Wess 和 Zumino 首先阐明的自耦标量超场的拉氏量。第五节专门论述超对称方案如何与内部对称结合的问题。这个问题对于整体型内部对称容易解决，因而过去只提到整体对称。现在主要问题是建立与超对称协调的定域（和特别非 Abelian 的）内部对称。这不是一件平凡的工作。尤其是，我们发现零质量"规范"旋量一定伴随着普通的矢量规范场[7]。第六节讨论 Goldstone 和 Higgs 机制，并且证明了当内部对称自发破缺时会产生 Goldstone 费米子。

在超对称方案中使人烦恼的问题之一是广泛利用了 Majorana 旋量。当费米子与玻色子结合成为一个单纯的多重态时，象电荷或者重子数这样一些量子数必定在该多重态的费米子与玻色子之间均分，而中性玻色子将与中性（即 Majorana）费米子合在一起，从表面上看，这似乎是不可避免的。然而这个困难不是不可避免的。在第五节的结尾给出一个反例，在这里说明如果允许规范场系统与无质量的标量多重态［属于一个内部对称（如 SU(n)）的伴随表示］相互作用，那么就出现一种新的对称性。规范系统的 Majorana 旋量能与物质超多重态的旋量结合成复 Dirac 旋量，它们具有费米子数守恒的拉氏量。

由于定域内部对称并入超对称的拉氏量的框架中和由于费米子数守恒，现在超对称拉氏量概念得到了充分发展，以便应用到弱相互作用，电磁相互作用和强相互作用的现实的统一理论中。

二、超 场 及 其 变 换

超场定义在 8 维空间上，该空间点用一对数（x_μ，θ_α）表示，其中 x_μ 表示普通的（实的）时空座标，θ_α 是 Majorana 旋量[8]。变量 θ_α 和通常的座标变量根本不同之处在于它们是反对易的，

$$\theta_\alpha\theta'_\beta+\theta'_\beta\theta_\alpha=0。$$

这里有一个重要的推论，即任一定域函数 $f(\theta)$ 必定是一个多项式。这可以从这样一个事实看出，即单项式

$$\theta_{\alpha_1}\theta_{\alpha_2}\cdots\cdots\theta_{\alpha_n}$$

一定是反对称的，因此 n＞4 的项都等于零。定域函数 $f(\theta)$ 完全由 16 个元素所确定，这 16 个元素是 $f(\theta)$ 按 θ 作幂次展开的展开系数。这些元素的一半是普通的数，而其余的是反对易的量。我们可以认为函数 $f(\theta)$ 是 16-矢量。不过把这样一些对象看成是定义在 4 维空间的函数是很有用的，以下将对这方面作进一步强调。

Poincaré 群对 x 与 θ 空间的作用由下式给出：

$$\begin{aligned}&x_\mu\to\Lambda_{\mu\nu}x_\nu+b_\mu,\\&\theta_\alpha\to a_\alpha{}^\beta(\Lambda)\theta_\beta,\end{aligned}\tag{2.1}$$

式中 $a(\Lambda)$ 表示齐次 Lorentz 变换 Λ 的 Dirac 旋量表示。尤其是，空间反射与下述映射相联系

$$\theta_\alpha\to i(\gamma_0\theta)_\alpha。\tag{2.2}$$

在这里为了与对 θ 的 Majorana 约束相一致，因子 i 是必需的。

超规范变换对 x 与 θ 空间的作用由

$$\begin{aligned}&x_\mu\to x_\mu+\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta,\\&\theta_\alpha\to\theta_\alpha+\epsilon_\alpha,\end{aligned}\tag{2.3}$$

来定义，显然，式中参量 ϵ_α 是反对易的 Majorana 旋量。不难证明映射（2.1）与（2.3）具有群的性质。但是，或许应该强调我们的建立方式纯粹是形式上的。例如，时空平移 $\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta$ 就不是一组 x_μ 通常所取的四个普通的实数。这些数是幂零，$(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\theta)^5=0$。为了一致我们将认为座标 x_μ 也属于某一非平凡代数。也许有可能在 x 与 θ 空间建立严格的几何学[9]。

标量超场自然按变换

$$\Phi'(x',\ \theta')=\Phi(x,\ \theta)\tag{2.4}$$

来定义。推广到旋量与张量超场是同样自然的。例如旋量超场按下式变换

$$\Psi'_\alpha(x',\ \theta')=a_\alpha{}^\beta(\Lambda)\Psi_\beta(x,\ \theta)。$$

如上所述，θ 的任何一个定域函数一定是一个多项式。为了说明这点，我们给出标量超场的展开式

$$\begin{aligned}\Phi(x,\ \theta)=&\mathrm{A}(x)+\bar{\theta}\psi(x)+\frac{1}{4}\bar{\theta}\theta F(x)+\frac{1}{4}\bar{\theta}\gamma_5\theta G(x)\\&+\frac{1}{4}\bar{\theta}i\gamma_\nu\gamma_5\theta A_\nu(x)+\frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\chi(x)+\frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2D(x),\end{aligned}\tag{2.5}$$

式中系数 A、F、G、A_ν、D 是普通的玻色场，ψ 与 χ 是费米场。这些分量在 Poincaré 群作用下的行为是清楚的：A、F 和 D 是标量，G 是赝标量，A_μ 是轴矢量，ψ 与 χ 是Dirac 旋量。（在赝标量超场的情况下，内禀宇称都相反。）这些分量一般都是复的。但是，可以给超场加上一个实数条件。

$$\Phi(x,\theta)^*=\Phi(x,\theta),$$

式中复共轭应理解为颠倒反对易因子的次序。实标量超场具有实玻色分量和 *Majorana* 旋量的费米分量。

由(2.3)和(2.4)不难推导出各个分场在一个无穷小超规范变换下的行为：

$$\delta\Phi(x,\theta)=\bar{\epsilon}^\alpha\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}^\alpha}+\frac{i}{2}(\gamma_\mu\theta)_\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x_\mu}\right), \tag{2.6}$$

将$\Phi(x,\theta)$展开式代入，我们得到

$$\begin{aligned}
&\delta A=\bar{\epsilon}\psi,\\
&\delta\psi=\frac{1}{2}(F+\gamma_5 G+i\gamma_\mu\gamma_5 A_\mu-i\partial\!\!\!/ A)\,\varepsilon,\\
&\delta F=\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\chi-\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\partial\!\!\!/\psi,\\
&\delta G=\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma_5\chi-\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_5\partial\!\!\!/\psi,\\
&\delta A_\nu=\frac{1}{2}\bar{\epsilon}i\gamma_\nu\gamma_5\chi+\frac{1}{2}i\bar{\epsilon}\gamma_\mu i\gamma_\nu\gamma_5\partial_\mu\psi,\\
&\delta\chi=\frac{1}{2}(D-i\partial\!\!\!/ F-i\partial\!\!\!/\gamma_5 G-i\gamma_\nu\gamma_5 i\partial\!\!\!/ A_\nu)\epsilon,\\
&\delta D=-i\bar{\epsilon}\partial\!\!\!/\chi。
\end{aligned} \tag{2.7}$$

在某种情况下（将在第三节讨论），这个表示是可约的。

从考查无穷小代数能够更好地认清超对称表示的结构。为了得到这个代数，我们用一个对易算子表示无穷小变换对 $\Phi(x,\theta)$ 的作用，

$$\frac{1}{i}\delta\Phi(x,\theta)=[\Phi(x,\theta),\ \bar{\epsilon}S], \tag{2.8}$$

式中生成元 S_α 的分量本身构成一个 Majorana 旋量，

$$(\bar{\epsilon}S)^\dagger=\bar{\epsilon}S。 \tag{2.9}$$

考虑连续两次应用无穷小变换的作用及利用 Jacobi 恒等式，在一致性条件下我们得到

$$[\bar{\epsilon}_1 S,\ \bar{\epsilon}_2 S]=\bar{\epsilon}_1\gamma_\mu\epsilon_2 P_\mu, \tag{2.10}$$

式中 P_μ 是空间平移的生成元。事实上，从规则（2.3）看出，显然两次超规范变换是一次平移。在这一点上，必须假设无穷小参量 ϵ 与生成元 S 反对易。因而从（2.10）我们能得到反对易关系

$$\{S_\alpha,\ S_\beta\}=-(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta}P_\mu \tag{2.11}$$

（式中 C 是电荷共轭矩阵）。由于矩阵 $\gamma_\mu C$ 是对称的[8]，我们看到（2.11）式左边一定是一个反对易算子，因此假设 ϵ 与 S 反对易是必要的。

其余的无穷小代数用同样方法推导。除 Poincaré 变换的生成元之间的对易算子的一般

规则外，我们还有

$$\begin{aligned}&[S_\alpha,\ P_\mu]=0\\&[S_\alpha,\ J_{\mu\nu}]=\frac{1}{2}\ (\sigma_{\mu\nu}S)_\alpha,\end{aligned}\tag{2.12}$$

其中 S_α 变换象 Dirac 旋量。

规则（2.11）与（2.12）是基本的。建立这种“代数”的不可约表示及发展将不可约表示乘积的分解的规则是超对称理论的中心问题。我们决定把这个系统看成是空间点变换的连续群的无穷小代数，该空间的一些座标是反对易数 C。但是，在缺乏严格的 x 与 θ 空间几何学的情形下，这种观点对人们的直觉仅仅是启发性的。

我们从下述考虑着手建立各种表示，即规范变换必须保持有确定 4-动量的态流形不变，其原因是 S_α 与 P_μ 对易。对于这样的流形，反对易算子（2.11）成为一个固定的数的集合，并且我们看到算符 S_α 生成 Clifford 代数。由于这个代数正好具有 16 个独立的生成元，它的一个而且是唯一的一个有限维不可约表示是用 4×4 矩阵表示的[10]。（也必定存在无限维表示，但在这里我们不考虑它们。）因此具有确定 4-动量的态流形通过超规范变换的作用约化为 4 维不变的子空间。但是，对于 Wigner 转动这些子空间一般不是保持不变的。这些变换把流形约化为（$2\mathscr{T}+1$）维不变子空间。对于超规范变换和 Wigner 变换都不变的子空间是 $4(2\mathscr{T}+1)$ 维。

用 Wigner 的方法建立代数（2.11）与（2.12）的幺正不可约表示已在别处论述[5]。这些表示用质量，自旋（$\mathscr{T}$）和内禀宇称（η）来表征。Poincaré 群的四个不可约表示包含在这些表示之中。其（自旋）$^{\text{宇称}}$分别是$\left(\mathscr{T}-\frac{1}{2}\right)^\eta$，$\mathscr{T}^{i\eta}$，$\mathscr{T}^{-i\eta}$，$\left(\mathscr{T}+\frac{1}{2}\right)^\eta$，其中 η 取 $\pm i$（对于整数 $\mathscr{T}$）或 ±1（对于半整数 $\mathscr{T}$）。静质量是共同的。$\Big[$类光表示是 4 维表示，当 λ 固定时，其螺旋度为 $\pm\lambda$ 与 $\pm\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Big]$。

现在我们简略地叙述一下建立场的不可约多重态的方法（非幺正表示）。在 γ_5 是对角的基中，生成元 S_α 就变成一对手征旋量 S_A 与 $S_{\dot{A}}$ $(A=1,2)$，它们满足代数

$$\begin{aligned}&\{S_A,\ S_B\}=0,\\&\{S_{\dot{A}},\ S_{\dot{B}}\}=0,\\&\{S_A,\ S_{\dot{B}}\}=i\partial_{A\dot{B}}。\end{aligned}\tag{2.13}$$

所以我们可以把 S_A（或 $S_{\dot{A}}$）看成“提升算符”，把 $S_{\dot{A}}$（或S_A）看成“下降算符”。设最低分量 $U(x)$ 属于正规 Lorentz 群的某一个有限维表示 $D(j_1,\ j_2)$。连续应用 S_A 就得到多重态的两维新分量，

$$\begin{aligned}&S_AU(x)=M_A(x),\\&S_AS_BU(x)=\epsilon_{AB}V(x)\end{aligned}\tag{2.14}$$

（式中 ϵ_{AB} 表示两维的排列符号）而且根据（2.13）式，三个未打点算符的乘积一定等于零，所以不可能有别的新分量。不难得到完全的结果：

$$\begin{aligned}&S_AU(x)=M_A(x),\ S_{\dot{A}}U(x)=0,\\&S_AM_B(x)=\epsilon_{AB}V(x),\ S_{\dot{A}}M_B(x)=-i\partial_{\dot{A}B}U(x),\\&S_AV(x)=0,\ S_{\dot{A}}V(x)=-i\partial_{\dot{A}}{}^BM_B(x)。\end{aligned}\tag{2.15}$$

把 $S_{\dot{A}}$ 看成提升算符，可以得到类似的结果 [(2.15) 的宇称变换]。把这两个多重态合起来，就能引入空间反射[11]。

具有 $4(2j_1+1)(2j_2+1)$ 维的 (2.15) 型的表示一般是可约的。因而，如果 $j_1 \geqslant j_2$，通过与算符 $\partial/\partial x_\mu$ 的 $2j_2$ 幂次的收缩，我们就能把最低分量 $U(x)$ 约化成 $D(j_1-j_2,0)$ 中的一个张量。这样我们对于这个分量就建立了一个 $4[2(j_1-j_2)+1]$ 维的表示。这种收缩正是从一个矢量 V_μ 中分解出纵向部分 $\partial_\mu V_\mu$ 这样一个方法在超对称情况下的类推。在建立局域作用原理中，我们通常发现有必要采用在这个意义上是可约的场。

为了结束这一节，值得指出的是 Majorana 约束对限制多重态的大小是很有效的。如果我们把 S_α 与 $\bar{S}^\alpha$ 当成独立的生成元处理，例如，用一组

$$\{S_\alpha,\ S_\beta\}=0,\ \{\bar{S}^\alpha,\ \bar{S}^\beta\}=0,$$
$$\{S_\alpha,\ \bar{S}^\beta\}=(\gamma_\mu)_\alpha{}^\beta P_\mu$$

代替 (2.11)，那么基本表示将是 16 维而不是 4 维。这个基本表示含矢量以及标量和旋量分量。把生成元扩充到带有一个内禀量子数，比如同位旋时，也会出现同样情况。在文献[5]中讨论了这种类型的扩充。

三、协　变　导　数

虽然在 θ 空间定义积分是不容易的，但对于微分肯定没有问题。普通的导数由

$$f(\theta+\delta\theta)=f(\theta)+\delta\bar{\theta}^\alpha\frac{\partial f}{\partial\bar{\theta}^\alpha}$$

来定义，式中无穷小 $\delta\bar{\theta}$ 位于 $\partial f/\partial\bar{\theta}$ 的左边（由于这些量可以反对易，因此固定它们的次序是很重要的）。

下面微分算符

$$D_\alpha=\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha}-\frac{i}{2}(\gamma_\mu\theta)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{3.1}$$

起着重要作用，我们称它为协变导数。这个算符在这种意义上是协变的，即它在 Lorentz 变换下是一个 Dirac 旋量，而对于超规范变换 (2.6) 是一个不变量。

除了下面两点重要之处外，协变导数具有微分算符的一般性质。第一点，当它作用在两个超场乘积上时，其作用按照规则

$$D_\alpha(\Phi_1\Phi_2)=(D_\alpha\Phi_1)\Phi_2\pm\Phi_1(D_\alpha\Phi_2)$$

进行分配，其中当 Φ_1 是玻色场（费米场）时，即当 $\delta\bar{\theta}$ 与 Φ_1 对易（反对易）时，用 $+(-)$ 号。第二点是，协变导数既不对易也不反对易。它们的反对易算子由下式给出：

$$\{D_\alpha,\ D_\beta\}=-(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta}i\frac{\partial}{\partial x_\mu}。 \tag{3.2}$$

算符 D_α 基本上是一个 Majorana 旋量。因为这个原因，定义另一种形式

$$\bar{D}^\alpha=(C^{-1})^{\alpha\beta}D_\beta \tag{3.3}$$

是有用的，这无非是把这些分量重新标记了一下。从而可以用三个等价形式

$$\{D_\alpha,\ D_\beta\}=-(\not{p}C)_{\alpha\beta},$$
$$\{D_\alpha,\bar{D}^\beta\}=(\not{p})_\alpha{}^\beta,$$
$$\{\bar{D}^\alpha,\bar{D}^\beta\}=(C^{-1}\not{p})^{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

给出基本的反对易算子。（在动量空间常常更方便。）显然，算符 D_α 生成与超代数 (2.11)

同构的 Clifford 代数。

鉴于代数结构（3.4），仅有的 16 个独立的算符可以从 D_α 的乘积得到。最有用的一组是

$$1, D_\alpha, \bar{D}D, \bar{D}\gamma_5 D, \bar{D}i\gamma_\mu\gamma_5 D, \bar{D}DD_\alpha, (\bar{D}D)^2。$$

含有 5 个或更多因子的乘积必定能够约化。例如

$$(\bar{D}D)^2 D_\alpha = -2\bar{D}D(\not{p}D)_\alpha 。$$

另外两个重要的恒等式是

$$\bar{D}\gamma_\mu D = 2p_\mu$$

和 (3.5)

$$\bar{D}\sigma_{\mu\nu}D = 0$$

在附录 A 中给出了一些有用的恒等式和乘法规则。

如前所述，在某种意义上，标量超场（2.5）是可约的。通过加上条件

$$(\tfrac{1}{2}(1+i\gamma_5)D)_\alpha \Phi \equiv D_{L\alpha}\Phi = 0 \tag{3.6}$$

可以达到约化的目的。显然，这些线性微分方程是协变的（排除空间反射）。（3.6）的通解包含 8 个独立（实的）分量，而与此相反，一般标量超场却有 16 个分量。这个解可以表示成如下形式：

$$\Phi_-(x,\theta) = \exp\left(\tfrac{1}{4}\bar{\theta}\not{\partial}\gamma_5\theta\right) \times \left(A_-(x) + \bar{\theta}\psi_-(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\,\frac{1-i\gamma_5}{2}\theta F_-(x) \right), \tag{3.7}$$

式中 A_- 和 F_- 是复玻色场，ψ_- 是右手 Dirac 旋量，$i\gamma_5\psi_- = -\psi_-$。同样地，微分方程

$$D_{R\alpha}\Phi \equiv (\tfrac{1}{2}(1-i\gamma_5)D)_\alpha \Phi = 0 \tag{3.6$'$}$$

适合于定义左手超场，

$$\Phi_+(x,\theta) = \exp\left(-\frac{1}{4}\bar{\theta}\not{\partial}\gamma_5\theta\right) \times \left(A_+(x) + \bar{\theta}\psi_+(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\,\frac{1+i\gamma_5}{2}\theta F_+(x) \right)。 \tag{3.7$'$}$$

Φ_- 与 Φ_+ 的复共轭相等是可能的（虽然没有这种必要性），即

$$A_- = A_+^*,\quad \psi_- = \psi_+^c,\quad F_- = F_+^*。 \tag{3.8}$$

（因而 ψ_+ 与 ψ_- 分别看作同一个 Majorana 旋量的左手与右手分量。）

手征超场的分量在无穷小超规范变换下按

$$\begin{aligned} \delta A_\pm &= \bar{\epsilon}\,\psi_\pm, \\ \delta\psi_\pm &= \frac{1+i\gamma_5}{2}(F_\pm - i\not{\partial}A_\pm)\epsilon, \\ \delta F_\pm &= -\bar{\epsilon}\,i\not{\partial}\psi_\pm \end{aligned} \tag{3.9}$$

变化。这些表示是不可约的。一般的标量超场还包含（非手征的）部分 Φ_1，Φ_1 可利用非线性微分条件

$$\bar{D}\,\frac{1\pm i\gamma_5}{2}D\Phi_1 = 0 \tag{3.10}$$

挑选出来。分解

$$\Phi = \Phi_+ + \Phi_- + \Phi_1 \tag{3.11}$$

能通过投影算符

$$E_+ = -\frac{1}{\partial^2}\bar{D}\,\frac{1-i\gamma_5}{2}D\bar{D}\,\frac{1+i\gamma_5}{2}D,$$

$$E_{-}=-\frac{1}{\partial^2}\bar{D}\frac{1+i\gamma_5}{2}D\bar{D}\frac{1-i\gamma_5}{2}D, \tag{3.12}$$

$$E_1=1+\frac{1}{4\partial^2}(\bar{D}D)^2$$

得到。利用（2.5）式中的分量，分解（3.11）显式为

$$\begin{aligned}
&A=A_{+}+A_{-}+A_1,\\
&\psi=\psi_{+}+\psi_{-}+\psi_1,\\
&F=F_{+}+F_{-},\\
&G=iF_{+}-iF_{-},\\
&A_\mu=i\partial_\mu A_{+}-i\partial_\mu A_{-}+A_{1\mu},\\
&\chi=-i\partial\!\!\!/\psi_{+}-i\partial\!\!\!/\psi_{-}+i\partial\!\!\!/\psi_1,\\
&D=-\partial^2A_{+}-\partial^2A_{-}+\partial^2A_1,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

式中 $A_{1\mu}$ 是横场，$\partial_\mu A_{1\mu}=0$。如果所得结果的分量是定域场，那么这种分解法对于建立定域场理论是有用的。只有当（2.5）的固有分量 χ 与 D 本身分别是定域场的一阶与二阶导数时，才出现上述情况。如果是这样，我们可以说超场是“定域可约的”。否则，不是。

因为由线性微分条件（3.6）或（3.6′）定义手征超场，所以对于乘法它们是封闭的。也就是说，我们有

$$\Phi_{1+}\Phi_{2+}=\Phi_{3+}$$

和 (3.14)

$$\Phi_{1-}\Phi_{2-}=\Phi_{3-}$$

这个显著的性质在构造拉氏量时是很重要的。另一方面，混合乘积 $\Phi_{1+}\Phi_{2-}$ 是一般的超场，它不是定域可约的。详细情况在附录 B 中给出。

旋量超场 $\Psi_\alpha=D_\alpha\Phi_{+}$ 对于旋量指标 α 是左手的，但在它的分量场组态中是非手征的（Φ_1）类型。相反，旋量 $\Psi_\alpha=D_\alpha\Phi_1$ 是左手和右手手征超场的混合（看附录 B）。

四、一个简单的拉氏量

作为超场表示法在一个简单的动力学系统中的应用，这里我们考虑 Wess 和 Zumino[3] 所给出的标量多重态的拉氏量。这个拉氏量，$\mathscr{L}(\Phi_{+},\Phi_{-})$，本身必须象一个标量超场那样变换。为了使运动方程是超协变的，作用积分必须是一个不变量，

$$\begin{aligned}
\delta\int dx\,\mathscr{L}&=\int dx\,\bar{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}+\frac{i}{2}(\gamma_\mu\theta)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\mathscr{L}\\
&=\bar{\epsilon}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\int dx\,\mathscr{L}+\text{表面项}\\
&=0\ 。
\end{aligned}$$

如果作用量不依赖于 θ，那末作用量将是不变的（允许相差一个变化的无意义的表面项）。这表示在 $\mathscr{L}(\Phi_{+},\Phi_{-})$ 中每一个依赖于 θ 的项必定具有时空发散的形式。**应用足够次数的协变算符 D_α 总能得到这样一种形式：对于手征的或定域约化超场，应用两次，对于一般超场，应用四次。**

考虑拉氏量

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8}(\bar{D}D)^2(\Phi_+\Phi_-)-\frac{1}{2}\bar{D}D[V(\Phi_+)+V(\Phi_-)]$$

$$=\frac{1}{2}\bar{D}D\left[\frac{1}{4}\Phi_+\bar{D}D\Phi_-+\frac{1}{4}\Phi_-\bar{D}D\Phi_+-V(\Phi_+)-V(\Phi_-)\right],\tag{4.1}$$

式中 $\Phi_-=\Phi_+^*$，V 是光滑函数（典型的多项式[12]）。这个表达式的时空积分肯定是不变量。令 $\theta=0$，则得到主要的部分。对于这部分，借助于附录的公式，我们求出

$$\mathscr{L}=\partial_\mu A_+\partial_\mu A_-+F_+F_-+\frac{1}{2}\bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi+[V'(A_+)F_++V'(A_-)F_-]$$

$$-\frac{1}{2}\left(V''(A_+)\bar{\psi}\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi+V''(A_-)\bar{\psi}\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi\right),\tag{4.2}$$

式中 $V'(A)=dV/dA$ 等等。运动方程是

$$\begin{aligned}
&\partial^2A_\pm=V''(A_\mp)F_\mp-\frac{1}{2}V'''(A_\mp)\bar{\psi}\frac{1\mp i\gamma_5}{2}\psi,\\
&F_\pm=-V'(A_\mp),\\
&i\partial\!\!\!/\psi=V''(A_+)\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi+V''(A_-)\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi\text{。}
\end{aligned}\tag{4.3}$$

拉氏量（4.2）和运动方程（4.3）可以很容易用实标量场 A，F 和赝标量 B，G 来表示，其中 A，F 和 B，G 由

$$A_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A\pm iB),\qquad F_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(F\pm iG)$$

来定义，但是这样做没有多大优越性。

根据（4.3），在树图近似下，真空期望值必须满足方程

$$0=V''(\langle A_\pm\rangle)V'(\langle A_\mp\rangle),\tag{4.4}$$

即在真空中因子 V'，V'' 总有一个必须等于零。我们考虑几种可能性。如果 $\langle V'\rangle=0$，则 $\langle V''\rangle$ 等于多重态的（共同的）质量。另一方面，如果 $\langle V''\rangle=0$，则费米子是无质量的。这是一个 Goldstone（费米子）解。但是，这个解是不稳定的，其原因是玻色场方程形式为

$$\partial^2A_\pm=-\langle V'\rangle\langle V'''\rangle(A_\mp-\langle A_\mp\rangle)$$
$$+\text{相互作用},$$

这意味着有一个玻色分量一定是快子(tachyon)。当考虑量子修正时，这种情况会改变[13]。

五、定　域　对　称

自然要问，超对称是否与通常的整体的和定域的内部对称不矛盾？我们发现事实上是：能够很容易合并整体内部对称；但定域对称要困难得多[7]。

首先考虑整体情况。例如，假设超场 Φ_+ 和 Φ_- 变换象 SU(2) 的双重态，

$$\begin{aligned}
&\Phi_+(x,\theta)\to\Omega\Phi_+(x,\theta),\\
&\Phi_-(x,\theta)\to\Omega\Phi_-(x,\theta),
\end{aligned}\tag{5.1}$$

式中 Ω 是一个 SU(2) 矩阵（不依赖于 x 与 θ）。拉氏量

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{8}(\bar{D}D)^2(\Phi_+^\dagger\Phi_++\Phi_-^\dagger\Phi_-)$$

$$-\frac{1}{2}M\bar{D}D\,(\Phi_-^\dagger\Phi_+ + \Phi_+^\dagger\Phi_-) \tag{5.2}$$

既是超对称（相差一个表面项）的，又是SU(2)不变的量。不巧，这个系统的最简单 SU(2) 不变相互作用

$$\mathscr{L}_1 = g\bar{D}D[\,(\Phi_-^\dagger\Phi_+)^2 + (\Phi_+^\dagger\Phi_-)^2]$$

是不可重正的。为了有一个可重正的（即三线性的）相互作用，有必要引进单态和（或）三重态超场。因而，如果 $\Phi_\pm$ 按

$$\Phi'_\pm \to \Omega\Phi'_\pm\Omega^{-1} \tag{5.3}$$

变换，那么下式

$$g\bar{D}D(\Phi_-^\dagger\Phi'_+\,\Phi_+ + \Phi_+^\dagger\Phi'_-\Phi_-) \tag{5.4}$$

给出一个可重正的和 SU(2) 不变的相互作用。

作为第二个例子，假设 Φ_+ 是超场的一个 3×3 矩阵，它属于 SU(2)×SU(2) 的（实的）(3，3) 表示，则

$$\Phi_+ \to R_1\Phi_+R_2^T, \tag{5.5}$$

式中 R_1 与 R_2 是正交矩阵。此外，假设 $\Phi_- = \Phi_+^*$，则

$$\Phi_-^T \to R_2\Phi_-^T R_1^T. \tag{5.6}$$

那么，下式

$$\mathscr{L} = \frac{1}{8}(\bar{D}D)^2 Tr(\Phi_-^T\Phi_+) - \frac{1}{4}\bar{D}D Tr(\Phi_+^T\Phi_+ + \Phi_-^T\Phi_-)$$
$$+ g\bar{D}D\,(\det\Phi_+ + \det\Phi_-) \tag{5.7}$$

给出一个可重正化的和不变的拉氏量。这个拉氏量将在第六节中进一步研究。

建立与超对称相容的**定域**对称的问题是更为有趣的。首先，如果出现在（5.1）的矩阵 Ω 依赖于 x，那么它也一定依赖于 θ，事实上，它必须是一组手征型超场，

$$\Phi_\pm(x,\theta) \to \Omega_\pm(x,\theta)\Phi_\pm(x,\theta), \tag{5.8}$$

因为如果变换后的场具有和原来场同样数目的独立分量，那么变换后的场一定是手征的。(5.8) 的自洽性依赖于手征超场在乘法下的封闭性（3.14）。

用展开式

$$\Phi_+(x,\theta) = \exp\left(-\frac{1}{4}\bar{\theta}\partial\!\!\!/\gamma_5\theta\right)\left[A_+(x) + \bar{\theta}\psi_+(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}(1+i\gamma_5)\theta F_+(x)\right],$$

$$\Omega_+(x,\theta) = \exp\left(-\frac{1}{4}\bar{\theta}\partial\!\!\!/\gamma_5\theta\right)\left[U_+(x) + \bar{\theta}V_+(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}(1+i\gamma_5)\theta W_+(x)\right]$$

来表示二重态 $\Phi_+(x,\theta)$ 与矩阵 Ω，则变换规则 (5.8) 的显式为

$$A_+(x) \to U_+(x)A_+(x),$$
$$\psi_+(x) \to U_+(x)\psi_+(x) + V_+(x)A_+(x),$$
$$F_+(x) \to U_+(x)F_+(x) - \bar{V}_+(x)\psi_+(x) + W_+(x)A_+(x).$$

矩阵 U_+，V_+ 和 W_+ 是复的，而 V_+ 带有一个 Dirac 旋量指标[14]。

有可能把 Ω_- 看成是与 Ω_+ 完全独立的，或者，我们可以加约束条件

$$\det\Omega_\pm = 1,\quad \Omega_+^\dagger = (\Omega_-)^{-1} \tag{5.9}$$

在下面我们将采用这个条件。这表示超对称质量项

$$\bar{D}D(\Phi_-^\dagger\Phi_+ + \Phi_+^\dagger\Phi_-) \tag{5.10}$$

是一个定域对称的不变量。

主要问题是构造一个二重态 $\Phi_{\pm}$ 的规范不变的动能。由于 $\Omega_{+}^{\dagger}\Omega_{+}\neq 1$，表达式（5.2）肯定不能令人满意。有必要引进一些规范场。Wess 和 Zumino 解决了使超对称与一个定域 $U(1)$ 对称相容的问题[7]。我们仿效他们的办法，来处理在定域内部对称 SU(2) 情况下的相容性问题［事实上，可以推广 SU(2) 到定域内部对称 SU(n)情况］。

规范场 Ψ 是一般的（非手征的）赝标量厄米矩阵超场，对于定域对称它按照规则

$$e^{g\Psi}\to\Omega_{-}\,e^{g\Psi}\,\Omega_{+}{}^{-1} \tag{5.11}$$

变换。借助于这个场，动能项就能表示成 SU(2) 下不变的和超对称的形式

$$\frac{1}{8}(\bar{D}D)^{2}(\Phi_{+}^{\dagger}e^{g\Psi}\Phi_{+}+\Phi_{-}^{\dagger}e^{-g\Psi}\Phi_{-}) \tag{5.12}$$

虽然一般说来这不是一个多项式，不存在一个对于 $n\geqslant 3$，$\Psi^{n}=0$ 的特殊规范，但是在这里(5.12)定义了一个可重正化的相互作用。下面我们还要回到这个问题。

引进了与物质场 $\Phi_{\pm}$ 系统的规范耦合后，我们发现现在有必要求出对 Ψ 规范不变的动能项。利用 $\Omega_{\pm}$ 的手征性质，

$$((1\mp i\gamma_{5})D)_{\alpha}\Omega_{\pm}(x,\theta)=0,$$

我们可以证明用

$$V_{\mu}=-\frac{1}{g}\left(C^{-1}\gamma_{\mu}\frac{1+i\gamma_{5}}{2}\right)^{\alpha\beta}D_{\alpha}(e^{-g\Psi}D_{\beta}e^{g\Psi}) \tag{5.13}$$

定义的矢量超场 V_{μ} 在定域对称下象 Yang-Mill 规范场一样变换，

$$V_{\mu}\to\Omega_{+}V_{\mu}\Omega_{+}^{-1}+\frac{2i}{g}\,\Omega_{+}\partial_{\mu}\,\Omega_{+}^{-1}。 \tag{5.14}$$

厄米共轭按

$$V_{\mu}^{\dagger}\to\Omega_{-}V_{\mu}^{\dagger}\Omega_{-}^{-1}+\frac{2i}{g}\Omega_{-}\partial_{\mu}\Omega_{-}^{-1}$$

变换。组合

$$\left(\frac{1-i\gamma_{5}}{2}D\right)_{\alpha}V_{\mu}$$

和

$$\left(\frac{1+i\gamma_{5}}{2}D\right)_{\alpha}V_{\mu}^{\dagger}$$

是齐次变换，即象场强。而且我们可以证明这些场强是手征的，

$$\left(\frac{1-i\gamma_{5}}{2}D\right)_{\alpha}\left(\frac{1-i\gamma_{5}}{2}D\right)_{\alpha}V_{\mu}=0 \tag{5.15}$$

（对于 $V_{\mu}^{\dagger}$ 也同样如此）。这意味着表达式

$$-\frac{1}{32}\bar{D}DTr\left[\left(C^{-1}\frac{1-i\gamma_{5}}{2}\right)^{\alpha\beta}(D_{\alpha}V_{\mu})(D_{\beta}V_{\mu})\right.$$
$$\left.+\left(C^{-1}\frac{1+i\gamma_{5}}{2}\right)^{\alpha\beta}(D_{\alpha}V_{\mu}^{\dagger})(D_{\beta}V_{\mu}^{\dagger})\right]$$

是一个定域对称的不变量，并且是超对称的。它可以作为规范场的拉氏量。利用恒等式

(5.15) 以及舍弃变化的无意义的表面项，我们可以把这个拉氏量化成简便的形式

$$\frac{1}{128}(\bar{D}D)^2 Tr(V_\mu V_\mu+V_\mu^\dagger V_\mu^\dagger)。\tag{5.16}$$

把 (5.10)，(5.12) 和 (5.16) 项集中在一起，我们就得到规范不变的和超对称的拉氏量

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8}(\bar{D}D)^2\left[\frac{1}{16}Tr(V_\mu V_\mu+V_\mu^\dagger V_\mu^\dagger)+(\Phi_+^\dagger e^{g\Psi}\Phi_++\Phi_-^\dagger e^{-g\Psi}\Phi_-)\right]$$

$$-\frac{1}{2}M\bar{D}D(\Phi_-^\dagger\Phi_++\Phi_+^\dagger\Phi_-),\tag{5.17}$$

其中 V_μ 由 (5.13) 定义。

明显地用分量场写出拉氏量 (5.17) 是一件复杂的和不值得做的工作。幸而，存在一个显著的规范[7]，对于这个规范拉氏量采取多项式形式。对 Ψ 的最低阶，变换规律 (5.11) 的无穷小形式是

$$\delta\Psi=\delta\Omega_-\Psi-\Psi\delta\Omega_++\frac{1}{g}\delta\Omega_--\frac{1}{g}\delta\Omega_+ 。\tag{5.18}$$

这表示 Ψ 的一半分量可通过变换消掉，使它成为特殊形式

$$\Psi=\frac{1}{4}\bar{\theta}i\gamma_\nu\gamma_5\theta A_\nu+\frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\gamma_5\lambda+\frac{1}{16}(\bar{\theta}\theta)^2D_5,\tag{5.19}$$

式中 A_ν 是横场。在 SU(2) 空间，矩阵 A_ν，$\overline{\theta}\gamma_5\lambda$ 和 D_5 是厄米的和无迹的。在这个特殊规范下，V_μ 由下式

$$V_\mu^k=\bar{D}\gamma_\mu\frac{1+i\gamma_5}{2}D\Psi^k-\frac{ig}{2}\epsilon^{klm}\left(\bar{D}\Psi^l\gamma_\mu D\Psi^m+2\Psi^l\bar{D}\gamma_\mu\frac{1+i\gamma_5}{2}D\Psi^m\right)\tag{5.20}$$

给出。经过冗长的计算后，我们求出

$$\frac{1}{128}(\bar{D}D)^2Tr(V_\mu V_\mu+V_\mu^\dagger V_\mu^\dagger)=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^k-\partial_\nu A_\mu^k+g\epsilon^{klm}A_\mu^l A_\nu^m)^2$$

$$+\frac{1}{2}i\bar{\lambda}^k\gamma_\mu(\partial_\mu\lambda^k+g\epsilon^{klm}A_\mu^l\lambda^m)+\frac{1}{2}(D_5^k)^2,\tag{5.21}$$

也就是与 Majorana 旋量 λ^k 的三重态相互作用的 Yang-Mill 场 A_μ^k的拉氏量。在拉氏量 (5.17) 中的物质项约化为

$$\frac{1}{8}(\bar{D}D)^2(\Phi_+^\dagger e^{g\Psi}\Phi_++\Phi_-^\dagger e^{-g\Psi}\Phi_-)-\frac{1}{2}M(\bar{D}D)(\Phi_-^\dagger\Phi_++\Phi_+^\dagger\Phi_-)$$

$$=\left(\partial_\mu A_+^\dagger+\frac{1}{2}igA_+^\dagger A_\mu\right)\left(\partial_\mu A_+-\frac{1}{2}igA_\mu A_+\right)$$

$$+\left(\partial_\mu A_-^\dagger+\frac{1}{2}igA_-^\dagger A_\mu\right)\left(\partial_\mu A_--\frac{1}{2}igA_\mu A_-\right)$$

$$+F_+^\dagger F_++F_-^\dagger F_-+i\bar{\psi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu-\frac{1}{2}igA_\mu\right)\psi$$

$$+M(A_-^\dagger F_++A_+^\dagger F_-+F_-^\dagger A_++F_+^\dagger A_--\bar{\psi}\psi)$$

$$+\frac{1}{2}g(A_+^\dagger D_5 A_+ - A_-^\dagger D_5 A_-)$$

$$+\frac{ig}{\sqrt{2}}A_+^\dagger\bar{\lambda}\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi+\frac{ig}{\sqrt{2}}A_-^\dagger\bar{\lambda}\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi$$

$$-\frac{ig}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\frac{1+i\gamma_5}{2}\lambda A_- -\frac{ig}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\frac{1-i\gamma_5}{2}\lambda A_+, \tag{5.22}$$

式中 $A_\mu = A_\mu^k \tau^k$，$\lambda=\lambda^k\tau^k$，$D_5=D_5^k\tau^k$。如果这是所要求的，我们可以用有确定宇称的组合

$$A_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(A\pm iB),\quad F_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(F\pm iG)$$

代替手征组合 $A_\pm$ 和 $F_\pm$（记住 A，B，F 和 G 都是同位旋二重态）。对于物质场的三重态

$$\Phi_\pm=\Phi_\pm^k\tau^k[\Phi_-^k=(\Phi_+^k)^*]$$

规范不变的动能项是

$$\frac{1}{16}(\bar{D}D)^2 Tr(\Phi_- e^{g\Psi}\Phi_+ e^{-g\Psi})=(\partial_\mu A_-^k+g\epsilon^{klm}A_\mu^l A_-^m)(\partial_\mu A_+^k+g\epsilon^{klm}A_\mu^l A_+^m)$$

$$+F_-^k F_+^k+\frac{1}{2}\bar{\psi}^k i\gamma_\mu(\partial_\mu\psi^k+g\epsilon^{klm}A_\mu^l\psi^m)$$

$$-g\epsilon^{klm}\left(\sqrt{2}A_+^k\bar{\lambda}^l\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi^m+\sqrt{2}A_-^k\bar{\lambda}^l\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi^m-iA_+^k A_-^l D_5^m\right)。\tag{5.23}$$

这个表达式特别有意义，因为（5.23）与规范拉氏量（5.21）之和具有一个新的对称性，也就是说

$$\begin{aligned}\lambda^k&\to\lambda^k\cos\alpha-\psi^k\sin\alpha\ ,\\ \psi^k&\to\lambda^k\sin\alpha+\psi^k\cos\alpha\ ,\end{aligned}\tag{5.24}$$

而所有的玻色分量都当作标量处理。换言之，如果我们引进复 Dirac 场

$$\chi^k=\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^k+i\psi^k),\tag{5.25}$$

则拉氏量的费米部分采取下面形式

$$\overline{\chi^k}i\gamma_\mu(\partial_\mu\chi^k+g\epsilon^{klm}A_\mu^l\chi^m)+ig\epsilon^{klm}\left(\sqrt{2}A_+^k\overline{\chi^l}\frac{1-i\gamma_5}{2}\chi^m+\sqrt{2}A_-^k\overline{\chi^l}\frac{1+i\gamma_5}{2}\chi^m\right),\tag{5.26}$$

显然，对于相位变换

$$\chi^k\to e^{-i\alpha}\chi^k,\quad \overline{\chi^k}\to e^{i\alpha}\overline{\chi^k}\ ,\tag{5.27}$$

这是不变的。这个新的对称性可能和一个仅为费米子所具有的守恒量(例如重子数或轻子数)相联系[16]。为了保持这种对称性，物质多重态必须没有质量。

在结束这一节之前，值得注意，在单圈近似下，规范超多重态对 Callan-Symanzik 函数 $\beta(g)$ 的贡献等于 $-(g^3/16\pi^2)(3C_2(G))$，而物质超多重态的贡献等于 $+(g^3/16\pi^2)C_2(G)$，其中 $C_2(G)$ 是内部对称群的伴随表示的二阶 Casimir 算符的值。如果我们引进三个物质超多重态（象下节所做的那样），则在单圈近似下 $\beta(g)=0$，因而 g 的电荷重正化是有限的。

六、Goldstone 与 Higgs 现象

头等重要的是说明自发对称破缺机制在超对称体系中的有效性。已经指出，在标量多重态自相互作用情况下，超对称的自发破缺不能发生（至少在树图近似下）。另一方面，我们现在的目的是证明，即使把内部对称嵌入超对称方案中，内部对称也能自发破缺。这表示有可能建立可重正化的超对称拉格朗日模型，在这种模型中，规范粒子（矢量与旋量）是有质量的。

对于考查自发破缺，一个合适的系统是 SU(2)×SU(2) 不变的拉氏量（5.7），首先我们把它作为整体对称处理，从而得到一个稳定的具有剩余的 SU(2) 对称的 Goldstone 解。（这只是很多可能解中的一个。）然后我们将继续考虑 $SU(2)_{定域}\times SU(2)_{整体}$对称，并证明 Higgs 机制是有效的，

标量多重态 $\Phi^{i\,a}_{\pm}$ 属于 SU(2)×SU(2) 的实表示 (3,3)，且满足实数条件 $\Phi^{i\,a}_{-}=(\Phi^{i\,a}_{+})^{*}$。利用分量场，则拉氏量（5.7）采取下面形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\partial_\mu A^a_-\cdot\partial_\mu A^a_+ + F^a_-\cdot F^a_+ + \frac{1}{2}\bar\psi^a\cdot i\partial\!\!\!/\psi^a + M\left(A^a_+\cdot F^a_+ + A^a_-\cdot F^a_- - \frac{1}{2}\bar\psi^a\cdot\psi^a\right)\\&+g_1\epsilon^{abc}\left(A^a_+\cdot A^b_+\times F^c_+ - A^a_+\cdot\bar\psi^b\times\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi^c\right.\\&\left.+A^a_-\cdot A^b_-\times F^c_- - A^a_-\cdot\bar\psi^b\times\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi^c\right),\end{aligned}\tag{6.1}$$

式中所有场都是 9 重态（$F^a_-\cdot F^a_+=F^{i\,a}_-F^{i\,a}_+$，等等。）而且费米分量 ψ^{ia} 是 Majorana 旋量。运动方程是

$$\begin{aligned}&-\partial^2A^a_\pm+MF^a_\mp+g_1\epsilon^{abc}\left(2A^b_\mp\times F^c_\mp-\bar\psi^b\times\frac{1\mp i\gamma_5}{2}\psi^c\right)=0,\\&F^a_\mp+MA^a_\pm+g_1\epsilon^{abc}A^b_\pm\times A^c_\pm=0,\\&(i\partial\!\!\!/-M)\psi^a-2g_1\epsilon^{abc}\left(A^b_+\times\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi^c+A^b_-\times\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi^c\right)=0。\end{aligned}\tag{6.2}$$

从这些方程得到，在树图近似下，真空期望值一定满足代数方程

$$\begin{aligned}&M\langle A^a_\pm\rangle+g_1\epsilon^{abc}\langle A^b_\pm\rangle\times\langle A^c_\pm\rangle=-\langle F^a_\mp\rangle,\\&M\langle F^a_\mp\rangle+2g_1\epsilon^{abc}\langle A^b_\mp\rangle\times\langle F^c_\mp\rangle=0。\end{aligned}\tag{6.3}$$

（当然我们要求真空是 Poincaré 不变量，因此 $\langle\partial^2A_\pm\rangle=0$，$\langle\psi\rangle=0$。）如果我们选择矩阵 $\langle A^{i\,a}_+\rangle$ 是对角的，则方程(6.3)大为简化。[由于这里所包含的任意一个矩阵都能通过 SU(2)×SU(2) 变换而对角化，因此不失去普遍性。] 这些方程本身意味着其它矩阵 $\langle A^{i\,a}_-\rangle$,$\langle F^{i\,a}_\pm\rangle$ 也一定是对角的。若用

$$\langle A^{i\,a}_+\rangle=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\tag{6.4}$$

表示 $\langle A_+\rangle$，则我们求出

$$\begin{aligned}&\langle A^{i\,a}_-\rangle=\mathrm{diag}\,(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*),\\&\langle F^{i\,a}_-\rangle=-\,\mathrm{diag}\,(M\lambda_1+2g_1\lambda_2\lambda_3,M\lambda_2+2g_1\lambda_3\lambda_1,M\lambda_3+2g_1\lambda_1\lambda_2),\end{aligned}\tag{6.5}$$

且方程（6.3）简化为

$$M^2\lambda_1+2Mg_1(\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3^*+\lambda_2^*\lambda_3)+4g_1^2\lambda_1(\lambda_2\lambda_2^*+\lambda_3\lambda_3^*)=0,\tag{6.6}$$

及其循环置换。

我们不去求（6.6）的通解，而是作一个限制性的假设 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$。实际上，我们选择了保持整体 SU(2) 对称的那些解。由于这个限制，方程（6.6）简化为

$$\lambda(M+2g_1\lambda)(M+4g_1\lambda^*)=0, \tag{6.7}$$

而且有三个不同的（宇称守恒）解。

$\lambda=0$ 的解对应于对称没有破缺的情形。$\lambda=-M/4g_1$ 的解给出

$$\langle A_{\pm}^{ia}\rangle=-\frac{M}{4g_1}\delta^{ia}, \quad \langle F_{\pm}^{ia}\rangle=-\frac{M^2}{8g_1}\delta^{ia},$$

它对应于超对称和 SU(2)×SU(2) 都破缺的情形。可以证明这个解是不稳定的：其中有些玻色子是快子。

$\lambda=-M/2g_1$ 的解给出 $\langle F_{\pm}\rangle=0$，因而保持超对称性[13]。实际上，通过考查有关这个解的弱微扰的传播性质，我们发现它是稳定的：超场破缺成为三个具有不同质量

$$M_0=M, \ M_1=0, \ M_2=2M \tag{6.8}$$

的部分［属于未破缺的 SU(2) 的 $I=0,1,2$ 表示］。同位旋负量部分是一个 Goldstone 超场。**也许值得强调一下，Goldstone 多重态除了包含一个标量和赝标量玻色子外，还包含了一个无质量的 Majorana 费米子。**虽然内部对称 SU(2)×SU(2) 破缺了，但超对称没有破缺。正是这个内部对称的破缺导致 Goldstone 费米子（同 Goldstone 玻色子一起）的出现。

现在考虑当拉氏量对称性推广到 $SU(2)_{定域}\times SU(2)_{整体}$ 时会发生什么情况。在第五节讨论的特殊规范下，这个拉氏量采取可重正化形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+gA_\mu\times A_\nu)^2+\frac{1}{2}\bar{\lambda}\cdot i\gamma_\mu(\partial_\mu\lambda+gA_\mu\times\lambda)\\&+\frac{1}{2}D_5^2+(\partial_\mu A_-^a+gA_\mu\times A_-^a)\cdot(\partial_\mu A_+^a+gA_\mu\times A_+^a)\\&+\frac{1}{2}\bar{\psi}^a\cdot i\gamma_\mu(\partial_\mu\psi^a+gA_\mu\times\psi^a)\\&-\sqrt{2}\,g\left(A_+^a\times\bar{\lambda}\cdot\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi^a+A_-^a\times\bar{\lambda}\cdot\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi^a\right)\\&+igA_+^a\times A_-^a\cdot D_5+F_-^a\cdot F_+^a+M\left(A_+^a\cdot F_+^a+A_-^a\cdot F_-^a-\frac{1}{2}\bar{\psi}^a\cdot\psi^a\right)\\&+g_1\epsilon^{abc}\left(A_+^a\cdot A_+^b\times F_+^c-A_+^a\cdot\bar{\psi}^b\times\frac{1+i\gamma_5}{2}\psi^c+A_-^a\cdot A_-^b\times F_-^c-A_-^a\cdot\bar{\psi}^b\times\frac{1-i\gamma_5}{2}\psi^c\right),\end{aligned} \tag{6.9}$$

在这里应理解有规范条件 $\partial_\mu A_\mu=0$。我们的目的只是要发现当 SU(2)×SU(2) 对称破缺成 SU(2) 时隐含在（6.9）中的激发谱。因此我们将利用（6.9）中明显的 $SU(2)_{定域}$ 对称性，把可重正化的 Landau 规范转换为幺正规范，在幺正规范中，谱可以简化。就是说，我们将采用如下规范条件

$$A^{[ia]}\equiv\frac{1}{2}(A^{ia}-A^{ai})=0 \tag{6.10}$$

式中 A^{ia} 表示 $A_{\pm}^{ia}$ 的实（标量）部分。实际上，超场的标量同位旋矢量部分已被“规范掉”。当然必须保留赝标量和旋量部分。