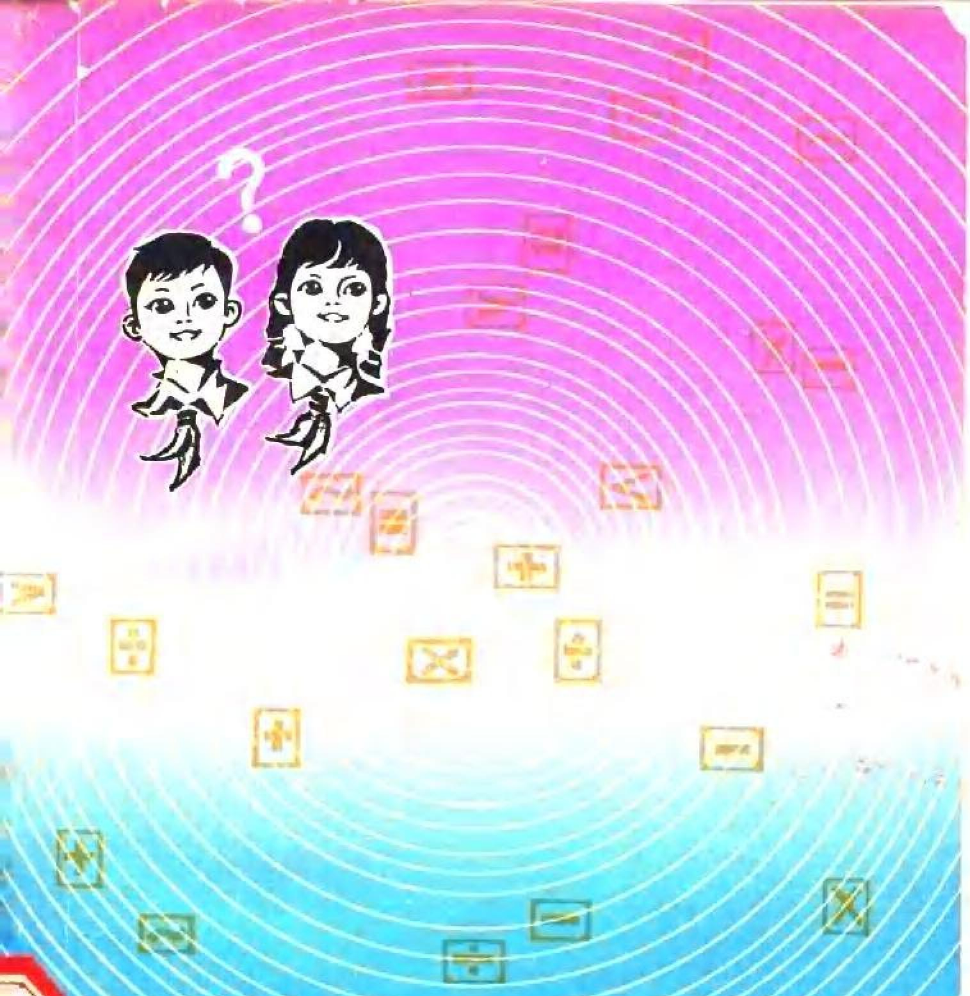


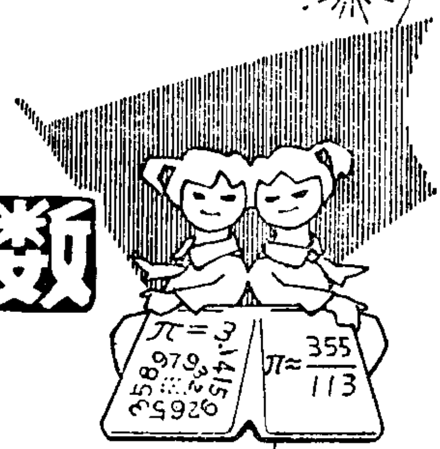
漫谈近似分数

MAN TAN JIN SI FEN SHU

上海教育出版社

漫谈近似分数

陈 永 明



上海教育出版社

内 容 提 要

这本小册子将通俗而浅近地告诉你：什么是近似分数，求近似分数的方法（连分数法、加成法等），以及近似分数在天文历法、科学研究、生产等方面的一些应用.

我国是世界上研究分数最早的国家之一．书中也反映了我国古代运用、发展近似分数的情况.

这本书中学低年级同学就可以阅读，小学高年级同学在老师的辅导下也能看懂.

漫谈近似分数

陈永明 编

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　江苏苏州印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 4　字数 62,000

1978年6月第1版　1979年3月第2次印刷

印数 40,001—170,000 本

统一书号：7150·1803　　定价：0.27元

目　录

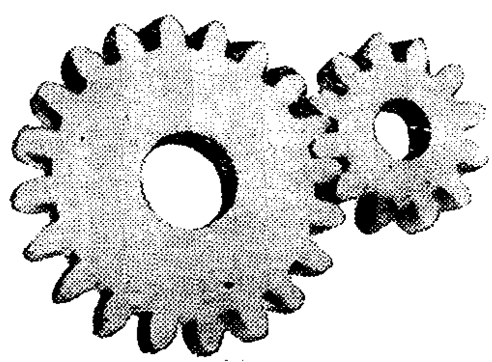
1. 从齿轮传动谈起 …………………………………………… 1
2. 公历的闰年是怎样安排的 ……………………………… 7
3. 一个"沙里淘金"的方法 ………………………………12
4. 连分数法 ……………………………………………………18
5. 渐近分数
　　——近似分数中的一员 ………………………………27
6. 近似分数的"好坏" ………………………………………33
7. 辗转相除和填表法
　　——连分数法的简化 …………………………………37
8. $\pi\approx\frac{355}{113}$
　　——祖冲之的密率 ……………………………………47
9. 0.618
　　——一个特殊的数 ……………………………………52
10. 夏历中隔几年出现一个闰月 …………………………60
11. 火星大冲
　　——观测火星的最好时机 ……………………………63
12. 加成法
　　——求近似分数的又一个方法 ………………………68
13. 再谈π和0.618 …………………………………………74
14. 带近似比重数的加成法(调日法) ……………………77
15. 填表法的根据是什么 ……………………………………86

16．小数分数对照表……………………………………………93
17．回到齿轮传动问题上来……………………………………99
18．举几个例子作为结束…………………………………107
附　录　　一、练习答案………………………………………113
　　　　　二、三位小数与分数对照表…………………………121

1 从齿轮传动谈起

大家都见到过齿轮，它是传动的重要零件。

两个齿轮的牙齿紧紧地"咬"在一起，形成犬牙交错的状态，我们就说：这两个齿轮"啮[niè]合"。两个齿轮中的一个是由动力设备（电动机、内燃机等）带动而先转的，叫做主动轮；由于主动轮的转动，另一个齿轮被迫转动，这个齿轮叫做被动轮。



我们来看两个齿轮啮合的情况。如果主动轮是40牙，被动轮是20牙，那么在主动轮转1圈的时间里，被动轮转了2圈，它们的比是

$$40:20=\frac{40}{20}=2.$$

这个比我们叫做转速比*，可以这样表示：

$$转速比=\frac{主动轮牙数(Z_1)}{被动轮牙数(Z_2)}.$$

如果知道了两个齿轮的牙数，用这个公式可以计算出转速比。

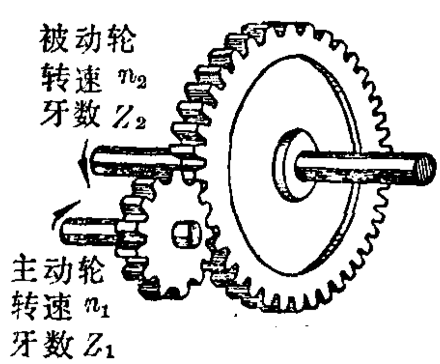
反过来，我们可以选择两个齿轮，使它们啮合后的转速比是2。不过这样选择的齿轮可以有很多对。譬如：主动轮60牙，被动轮30牙；主动轮80牙，被动轮40牙；……选择主动轮和被动轮的牙数的计算过程是很简单的，只要将转速比(看作是一个分数)的分子、分母都乘以(或除以)同一个不等于零的数**，然后将分子看作是主动轮的牙数 Z_1，分母看作是被动轮牙数 Z_2 就可以了。

转速比：$$\frac{2}{1}=\frac{2\times20}{1\times20}=\frac{40}{20},$$

---

* 在机械原理中，当两个齿轮啮合时，被动轮和主动轮的传动速度比(转速比)，和它们的牙数成反比：

$$传动速度比(转速比)=\frac{被动轮转速(n_2)}{主动轮转速(n_1)}=\frac{主动轮牙数(Z_1)}{被动轮牙数(Z_2)}.$$



** 分数的基本性质：分数的分子、分母都乘以同一个不等于零的数(叫做扩分)，或都除以同一个不等于零的数(叫做约分)，分数的值不变。

$$\frac{2}{1}=\frac{2\times30}{1\times30}=\frac{60}{30},$$

$$\frac{2}{1}=\frac{2\times40}{1\times40}=\frac{80}{40},$$

………………

符合要求的齿轮有很多对，可以根据实际情况选用。

如果要使转速比是 $\frac{1}{3}$，因为

$$\frac{1}{3}=\frac{20}{60}\left(=\frac{30}{90}=\frac{40}{120}=\cdots\right),$$

所以，可以选用20牙的主动轮和60牙的被动轮，……

如果要使转速比是0.125呢？因为

$$0.125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}=\frac{20}{160}\left(=\frac{30}{240}=\cdots\cdots\right),$$

所以，可以选用 $Z_1=20$ 牙，$Z_2=160$ 牙；……

如果要使转速比是0.56499，应该选用多少牙数的两个齿轮呢？

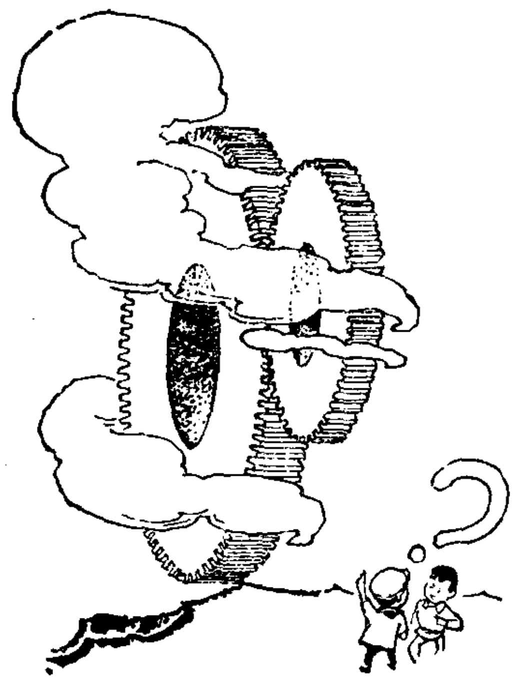
我们仍然采用上面的计算方法，可以得到

$$0.56499=\frac{56499}{100000}.$$

这个分数的分子、分母是互质数，所以它是最简分数*。因此就只能用56499牙的主动轮和100000牙的被动

---

* 除了1以外没有公共约数的两个整数叫做互质数。一个分子、分母是互质数的分数，就是最简分数。



轮. 这对数字实在太大了，如果齿轮的一颗牙齿厚5毫米的话，那么100000牙的齿轮，它的直径将达300多米，比四个上海国际饭店加起来还要高。有哪一台机器能装得下这么两个庞然大物！显然这是不切合实际的。

怎么办呢？我们用四舍五入的方法，可以得到

$$\frac{56499}{100000}\approx\frac{56500}{100000}=\frac{113}{200}.$$

就是说，如果选用 $Z_1=113$ 牙，$Z_2=200$ 牙，那么所得到的转速比近似等于 $\frac{56499}{100000}$. 它们之间仅相差

$$\frac{113}{200}-\frac{56499}{100000}=0.00001,$$

也就是误差十万分之一。这在机械中通常是允许的，而齿轮的牙数和直径却大大地减少了。

这里的分数 $\frac{113}{200}$，就是小数 0.56499 或者说是分数 $\frac{56499}{100000}$ 的近似分数。

近似分数对我们来说并不陌生。例如地球表面总面积约是五亿一千万平方公里；其中海洋面积是三亿六千一百零五万九千平方公里，陆地总面积是一亿四千九百五十万平方公里。我们说，海洋面积占地球表面积的 71%，陆地面积占地球表面积的 29%。

这里的$\frac{71}{100}$和$\frac{29}{100}$都是近似分数。但一般情况下，我们用误差较大、但简单得多的近似分数 $\frac{7}{10}$ 和 $\frac{3}{10}$ 来代替，反而使人感到简单明了。

又如当我们已经知道圆周长是 C，要求圆面积 S 时，可以用公式

$$S=\frac{1}{4\pi}C^2$$

来计算。但在实际应用时也有用

$$S\approx\frac{1}{12}C^2$$

或

$$S\approx\frac{8}{100}C^2$$

计算的。这里 $\frac{1}{12}$，$\frac{8}{100}\left(=\frac{2}{25}\right)$，就是 $\frac{1}{4\pi}$ 的两个近似分数。

所以说，研究近似分数是很有意义的。

练　　习

在一般设备简易的车床上，备有24只齿轮，供人们选择使用．它们的牙齿数分别是：20，25，30，35，40，40，45，50，55，60，60，65，70，75，80，85，90，95，100，105，110，115，120，127．要使两齿轮啮合后的转速比近似地等于0.2501，应该取哪两只？误差是多少？

2 公历的闰年是怎样安排的?

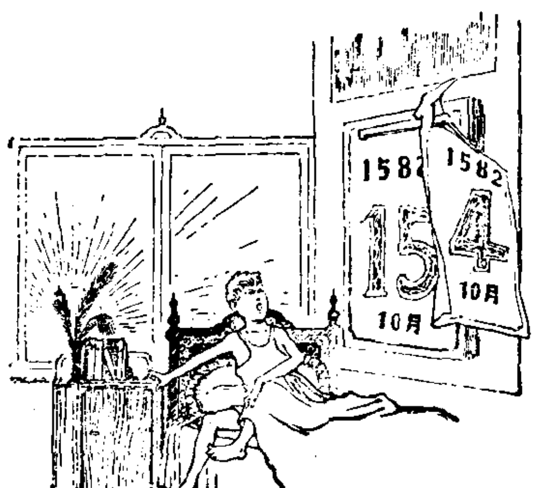
如果有人问你:一年有几天?你一定会不加思索地回答:365 天。或许你还会加上一句:这就是地球绕太阳一周的时间。确实,现在通用的公历(也叫阳历),是按照一年为 365 天计算的。

其实,一年 365 天仅仅是取整数而已。实际上,地球绕太阳一周是 365 天 5 小时 48 分 46 秒,所以"一年"(天文上叫做"回归年")是 365.2422 天。但是,在制订历法的时候,一年(叫"历年")总不能有个"零头"(0.2422 天)吧!只能按整数天计算。那么怎么算呢?一个历年算 365 天,少算了一点;算 366 天,又多算了一点,这就需要用设置"闰年"的办法来调节。就是有些年份包含 365 天,这些年份叫平年;有些年份包含 366 天,这些年份叫闰年(在二月份多一天)。通过置闰的办法,使较长时期内历年的平均天数尽可能接近回归年。那么按什么规则来设置闰年呢?

目前世界上通用的公历是从罗马的历法演变过来

的。公元前46年，他们开始使用名叫“儒略历”的历法，限于当时的科学水平，测得“回归年”是$365\frac{1}{4}$天。如果平年是365天，那么一年少算$\frac{1}{4}$天，四年共少算一天，所以第四年是闰年，366天，将这一天补足。因而“儒略历”采用了“四年一闰”的办法。应该指出，早在春秋中期，我国已有人测出“回归年”是365.25天，比西方早得多。

由于$365\frac{1}{4}$天比“回归年”的实际天数（365.2422天）多一些，大约每隔128年就多算了一天，所以到了1600多年以后，即在公元1582年，人们发现这个历法竟与实际的天文现象相差了十多天，因而不得不另用



新的历法。这多算的十多天怎么办呢?十分有趣的是，由当时罗马的统治者下令，从日历上“抹”去十天，把1582年10月4日之后的一天算作10月15日。出现了“四日夜长梦也长，醒来已是十五日”的怪事。

出现这样大的差错，从近似分数的角度来看，无非是将回归年的尾数0.2422近似地看成$\frac{1}{4}$，而这个近似分数的误差太大了。

那么怎样设置闰年才比较好呢?

回归年的尾数0.2422可化作近似分数$\frac{97}{400}$，就是把一回归年近似地看作是$365\frac{97}{400}$天。每一个平年如作为365天，那末少算了$\frac{97}{400}$天，400个平年共少算97天，因此，应该在400年里安排97个闰年。所以，现在的公历(也叫“格里历”)采用“400年97闰”。它是这样规定的：以公历纪元作标准，凡能被4整除的年份是闰年(如1976年，1980年)，这样400年有100个闰年；但逢百之年，必须要能被400整除的才是闰年(如1700年，1800年，1900年都不是闰年，而2000年是闰年)，这样100个闰年中减去了三个闰年，剩下97个闰年。

			闰　年
1961	1962	1963	1964
1965	1966	1967	1968
1969	1970	1971	1972
1973	1974	1975	1976
1977	1978	1979	1980
1981	1982	1983	1984

每四年一闰

$\boxed{1600}$ 闰年	2100
1700	2200
1800	2300
1900	$\boxed{2400}$ 闰年
$\boxed{2000}$ 闰年	

逢百之年每四百年一闰

由于

$$\frac{97}{400}-0.2422=0.2425-0.2422$$
$$=0.0003$$
$$=\frac{3}{10000}.$$

所以这样安排以后，要经过三千多年才相差一天，这是相当精确了。

“中国是世界文明发达最早的国家之一”。我国在遥远的古代，对天体运行的观测已经达到很高的水平。宋代发布的“统天历”（公元 1199 年），以 365.2425 天为一年，与格里历完全一样，但比格里历要早 383 年。我国明代就有人测得回归年为 365.242190 天，准确到十万分之一天。在没有精密仪器的古代，这是多么令人惊异的成绩！

3 一个“沙里淘金”的方法

对于第一节中的0.56499，你如果仔细思考一下将会发现，还可以继续使用四舍五入，得到数字更为简单的近似分数。例如：

$$0.56499=\frac{56499}{100000}\approx\frac{56000}{100000}=\frac{56}{100}.$$

但这个近似分数的误差是

$$0.56499-\frac{56}{100}=0.00499,$$

比$\frac{113}{200}$的误差要大得多了。

继续进行，还可以得到另一个近似分数：

$$0.56499=\frac{56499}{100000}\approx\frac{60000}{100000}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5};$$

甚至可以有

$$0.56499=\frac{56499}{100000}\approx\frac{100000}{100000}=\frac{1}{1}=1.$$

当然，它的误差太大，已没有什么实际意义了。