# 许莼舫初等几何四种

中国青年出版社

22·4 2703号

# 軌迹

提存阅览室

# 目　　次

# 作者的話

有些中学同学在学习平面几何学的时候，由于对基本概念了解得不够清楚，对定理和法則即使都明白也还不会灵活运用，因而难于获得良好的学习成果．作者因为有这样的感觉，才編写了这一套小書．这套書分《几何定理和証題》、《几何作图》、《軌迹》和《几何計算》四册．內容主要是：（1）帮助同学們透徹了解教科書里的材料；（2）把这些材料分类和总結，指导同学們怎样去运用，从而掌握解題的正确方法；（3）举示多量例題，对同学們作出較多的引导和启示，借此收到观摩的效果；（4）提供一些补充材料，使同学們扩大眼界，充实知識，提高理論基础，为进一步学习創造有利条件．

在平面几何学中的軌迹部分，原是进修高等数学的重要基础，但因这个概念比較抽象，在一般書里又不能解释得十分詳尽，所以同学們对它最感困难．

本書第一章，以充裕的篇幅，对学习軌迹应有的基本知識作了詳細的講解．关于軌迹要怎样去探求，怎样去証明，都經反复指导，使讀者在实际解題时不致有茫无头緒的感觉．

第二章用具体的实例，分別引出七条基本軌迹定理，再根据它們来用簡法解决許多軌迹問題．

另外有几个重要的軌迹題，也是在解別的軌迹題时需要

引用的，本書在第三章里举出它們的解法，并示应用的例子。

軌迹題原須分两方面証明，但一般对中学生的要求，只要能用簡法，把題中的軌迹归結到基本軌迹或已知的重要軌迹，从而在图中作出，并說明它是怎样的綫也就够了。本書主要是給中学生閱讀的，所以在第二、三两章的全部例題，都是用簡法来解的。在簡法中，虽然只确定了合于条件的点都在这綫上，但因中学程度所学得到的軌迹題比較簡单，如果这綫的某一部分上的点不合条件，很容易检查得出，我們只要把它剔除就是了。在程度較高的讀者，不妨将本書例題中所略去的部分自行补出，即加一段証明，証在这綫上的点都合条件。

本書第二、三两章的研究題，是分列在有关的軌迹定理的后面的。照这样編排，无异是提示了这一問題該用哪一条基本定理，使讀者在研究时获得便利，将来要解决别处遇到的杂題，自然可以事半功倍了。

在本書的最后一章里，因为軌迹和作图联系最多，所以举了一些应用軌迹的作图題，以补《几何作图》一書的不足。

本書在編写时虽經仔細斟酌，但錯誤之处还恐难免，希望讀者多多批評和指正。

許莼舫

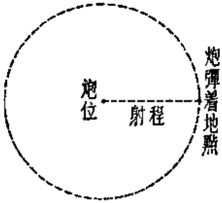
此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor

# 一 基本知識

## 怎样叫做軌迹

我們为了要保卫祖国安全，抵抗外来侵略，必須要加强国防建設．关于巩固国防的利器，象大炮、飞机之类，同学們一定都有一些初步的認識．这里先拿大炮做例子，来說明数学上的一件重要事实：

假定用一尊大炮来作一次射击演习，把这大炮固定在炮位上，使它能繞炮位自由旋轉，然后以一定的射程向各方发射．这时你可以看到，炮弹着地的各点刚正排列成一个圓形；这圓的圓心就是炮位，半径就是射程，象右图．假使炮弹着地的各点非常密集，你就看不到任何一点，而只見一整个的圓周——簡称圓，就是一条封閉的曲綫．这样不断地向各方发射，炮弹着地的点永远在这一条曲綫上，决不会到曲綫的外面去．

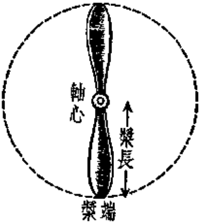



在上举的例子中，因为炮弹着地的各点必須和一个定点（就是炮位）有一定的距离（就是射程），所以集合而成这样的一个圓．“和一个定点有一定的距离”是一个条件，凡是在这圓上的点都适合这条件，而不在这圓上的点都不适合这条件．

这圓是許多适合同一条件的点集合而成的，好象玩具火車的环形軌道一样；也就是这样的許多点停留着的痕迹，所以称做是“适合指定条件的点的**軌迹**”。

接着再用飞机做例子，来說明軌迹的另外一个意义：

飞机的推进器，是用两片或多于两片的螺旋桨装在轉动軸上而成。当机器发动，推进器开始旋轉的时候，我們看見任何一片螺旋桨的外端，在围繞着軸心作圓周的运动。这样运动所經的圓周，是拿軸心做圓心，桨长做半径的。因为桨端和軸心的距离——等于桨长，是一定不变的，所以桨端在运动中的各位置，决不越出这圓的曲綫以外。这圓是一点依照指定的条件而运动所行的軌道，也就是一点在这样运动时足迹所經的路綫，所以称做是“这动点的軌迹”。




把上述軌迹的两种意义比較一下：后者所說的虽然只有一点，但这一点是动的，当它动到另外的位置，就产生第二点、第三点等，而这些点的性質，当然也都适合指定条件。又因这点不会动到一定的路綫以外，所以綫外的点就不会适合指定条件。可見这样的說法和前者好算是一样的。

可是，就基本上說，前者是用静止观点来解释的，后者是用运动观点来解释的。前者說明軌迹是适合指定条件的各点的总和，后者說明軌迹是一动点依照指定条件运动的路綫。軌迹的这两种意义我們必須好好理解，特别是后一种意义。

初学的人往往把几何图形看做靜止的、固定的，而不容易体会到表面上是靜止、固定的几何图形，也可以代表运动的观念。我們知道一切事物都是不断在运动发展的，我們如果只知道用靜止观点来看几何图形，不知不覺会养成用靜止观点去看一切事物的习慣，那就大錯特錯了。不过这并不是說用靜止观点来說明軌迹也是错誤的，因为事物虽然在不断运动发展，但也有相对的靜止，我們用靜止观点来說明軌迹，正是根据事物有相对靜止这个事实的。当然你不应該忘記靜止只是相对的。

利用运动观点来解释“一个动点和一个定点保持一定的距离而运动，它的軌迹是一个圓”，其实是再简单也沒有的。同学們在用两脚規画一个圓（或工匠用剪刀画圓）的时候，曾經注意到这一件事实嗎？两脚規的一只脚是一个針头，在紙上釘着的一点就是一个定点，另一脚上所附鉛笔的尖端就是一个动点，两脚作适当的张开，就是使二点間保持一定的距离，笔尖在紙上画成的一个圓，就是这一个动点运动一周所經的路綫，也就是这动点的軌迹。这原是在学习几何时常見的事实，不过同学們一般都不很注意罢了。

上面为便利起見，只举了一个軌迹是圓的例子。实际我們如果把指定的条件改变，那末軌迹的形状可能也跟着改变。普通在初等数学里面所討論的軌迹，除掉圓以外，有的是直綫——两端都无限，有的是綫段——两端都有限，有的是射綫——一端有限，另一端无限，有的是圓弧。在每一指定条件下的点，它的軌迹有时还不止一条綫。关于这許多不同的情况，我們为了叙述的方便，这里暂且不講，同学們讀到下面的

几节，自然会完全明了.

## 軌迹题的三种类型

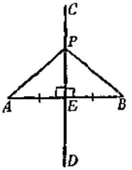
同学們已經学过了几何定理和証明題，一定都知道每一条定理或証明題总可分做“假設”和“終結”两部分. 假設是图形中已知的性質，終結是要我們証明的其他性質，可說只有这样的一种类型. 再就作图題来說，也包含两个部分，一是告訴我們已知的条件，一是吩咐我們要作怎样的图形，千題一律，找不到另外的一种类型. 現在我們要研究軌迹題了，軌迹題是不是也只有一种类型呢？这却和前面的完全不同，它的类型可以分做三种. 要知道詳細，必須先明了軌迹題的內容，究竟有哪几个部分？

諸位讀过了上面的一节，已經知道軌迹是一点在指定条件下运动所經的路綫. 所謂指定条件，象“和一个定点有一定的距离”等类，是最关紧要的. 因为这动点必須要有条件去限制它，才能作有規則的运动，从而产生軌迹；假使不受条件限制，这动点可以随便乱动，就无一定路綫，結果就无法求出軌迹. 可見这指定条件，是軌迹題中决不可少的一个重要部分. 有了指定条件以后，相应地就可以决定軌迹的形状；有的軌迹是圓，有的軌迹是直綫，这各种不同的形状，当然也是軌迹題中的重要部分. 假定我們在某一問題中，单說軌迹是圓，或是一直綫，这种說法不够具体. 因为形状虽都是圓，但圓心的位置各有不同，半径的长短也可能两样；同是直綫，就位置說，有的是平行于一已知直綫的，有的是垂直平分一已知綫段的，就

长短說,有的是无限的,有的是有限的. 所以我們单說軌迹是什么形状,还覚得不够,应該要連位置和长短一齐說出来,这才可以具体地画成图形.

綜合上述各点,知道軌迹題內容包含三个重要部分:第一是指定的条件,第二是軌迹形状,第三是軌迹的位置和长短.

軌迹題的內容,我們已經把它分析得很清楚了,但从題目的外表不一定能看到全部內容. 关于指定条件,是每一个軌迹題都須詳細叙明,可說是显露在外表的;至于其他两个部分,有的只发表形状,有的是全不发表,因而形成軌迹題的三种不同的类型. 要叙明这三种类型,无妨先举出它們的典型例子:




(1)一动点($P$)距一条定綫段($AB$)的两端等远,它的軌迹是一直綫($CD$),这直綫就是定綫段的垂直平分綫.

在这一道題中,"距一条定綫段的两端等远"就是指定条件,"一直綫"就是軌迹的形状,"定綫段的垂直平分綫"就是說明了它的位置必須通过定綫段的中点,且和定綫段垂直,长度是无限的. 这样已經把指定的条件,軌迹的形状,以及軌迹的位置和长短完全发表出来. 要解决这一道題,只須根据几何定理,給它一个証明,就可以了事,要算是最容易的.

(2)一动点距一条定綫段的两端等远,它的軌迹是一直綫.

这样只发表了条件和形状,究竟这軌迹是在什么地方?长短怎样?还隐藏在題目里面. 这种題目的解决办法,不象前面的那样簡单,必須先要探求出这直綫的位置和长短,然后再加以証明.

(3)一动点距一条定綫段的两端等远,求这动点的軌迹.

用这一个方式来提問題，它只說出了指定的条件，其余的全部隐藏起来，要我們一样一样去摸索，先探求这軌迹的形状，再探求这軌迹的位置和长短，最后才能把它証明。同前面的比較起来，这是最难解决的。

从上面的三个例子，我們把軌迹題分成如下的三种类型：

［第一类型］ 有条件，有形状，又有位置和长短。

［第二类型］ 有条件，有形状，但沒有位置和长短。

［第三类型］ 有条件，但沒有形状，更沒有位置和长短。

在这三种不同的类型中，我們可以看出，第一类型有假設，又有完全的終結，可以称做**軌迹定理**，只要給它証明一下就得；第二类型有假設，又有不完全的終結，也可称做軌迹定理；第三类型只有假設，沒有終結，这是**求軌迹題**，先要把这軌迹探求出来，然后才可以把它証明。我們从下一节起，依次講述軌迹的証明和探求的方法。

## 軌迹題要两面証

上节講过几何定理和作图題都只有一种类型，軌迹題却有三种类型，这是第一种区别。現在再說到每一定理或作图題都只要証明一次，但每一軌迹題却要連証两次，这是第二种区别。普通証明一个軌迹題，必先証順的一方面是正确的，接着再証逆的一方面也是正确的，这样才可以認为切实可靠。这必須要証明的两方面，可以写成如下的一般形式：

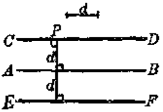
(a) 順的方面 凡在这綫① 上的点，都能适合指定条件。

① 所謂"这綫"，有时是一条綫，有时是几条綫，有时是无限长的綫，有时是有限长的綫。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor

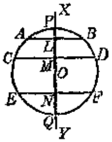
(b) 逆的方面　凡能适合指定条件的点，都在这綫上。

那末为什么要大費周折，一証再証呢？这里当然要說出一个道理来。




譬如有一个軌迹題："一动点 ($P$) 和一条定直綫 ($AB$) 保持一定的距离($d$)而运动，求这动点的軌迹。"我們探求到一条 $CD$ 直綫，它是平行于 $AB$，且和 $AB$ 的距离等于 $d$ 的，从"二平行綫处处等距离"的定理，可証"凡在 $CD$ 上的点，都和 $AB$ 有一定的距离 $d$"，就說所求的軌迹是一直綫 $CD$，这就犯下了錯誤。因为除 $CD$ 外，还有另一平行綫 $EF$ 也是所求的軌迹，已被忽略过去了。

可見証一道軌迹題，如果单証($a$)而不証($b$)，就只注意到这綫上的点能适合指定条件，沒考虑到能适合指定条件的点也許不全在这綫上，結果使求到的軌迹有不充足的弊病。




又如有一軌迹題："一动弦①在定圓内平行移动，求它的中点的軌迹。"我們假定这动弦在运动中的一个位置是 $AB$，中点是 $L$，从定理"通过圓的圓心和弦的中点的綫，必垂直于弦"，可証"动弦 $AB$ 的中点 $L$，常在过圓心 $O$ 而垂直于这弦的 $XY$ 綫上"，于是說所求的軌迹是一直綫 $XY$，无意間也造成了錯誤。因为这动弦常在圓内，它的中点决不会运动到圓外去，所以除 $PQ$ 綫段上的点能适合指定条件外，其余在 $PX$ 和 $QY$ 上的点，都是不适合条件的。因此，所求的軌迹只能說是綫段 $PQ$，而不能說是一直綫 $XY$。

可見单証($b$)而不証($a$)，就只注意到适合条件的点在綫上，沒考虑到綫上的点也許不完全能适合条件，結果使求到

① 通常所說的动弦，不但位置在变动，它的長短也是变动的。至于它的中点，能跟着它运动，当然是一个动点。

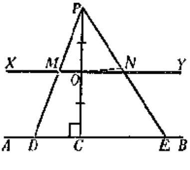
的軌迹中存在着不必要的部分。

綜上所述，知道証軌迹題若单顧一面，会使求到的軌迹发生太少或太多的弊病。不証($a$)就可能得不必要的軌迹，不証($b$)就可能得不充足的軌迹，因而我們可以称($a$)"在綫上的点合条件"是軌迹的**必要性**(也叫**純粹性**)，($b$)"合条件的点在綫上"是軌迹的**充足性**(也叫**完备性**)。

再說得明白一些，必要性的意思是綫上各点必須有同一性質——就是适合同一条件，找不出任何一点例外；通俗地講，每一題中的軌迹，必須具备"清一色"的性格。充足性的意思是綫上各点的性質必須和綫外各点的性質不同；通俗地講，每一題中的軌迹，必須具备"只此一家，別无分出"的性格。必要性和充足性应該同时証明，結果才算切实可靠。

为了要使同学們在实际証題时有所观摩起見，下面举一个具体的例子：

[范例 1] 一动綫段，一端固定在一点 $P$，另一端沿定直綫 $AB$ 而运动，那末它的中点的軌迹是一直綫，这直綫是 $AB$ 的平行綫，且距 $P$ 和 $AB$ 等远。




**假設**：定点 $P$ 和定直綫 $AB$，$PC \perp AB$，$O$ 是 $PC$ 的中点，过 $O$ 作 $XY \parallel AB$。

**求証**：一端是 $P$ 而另一端在 $AB$ 上的动綫段的中点的軌迹是 $XY$。

[思考] 要証 $XY$ 是这动点的軌迹，第(Ⅰ)步必須先証它的必要性，就是証"凡在 $XY$ 上的点都可以做題設綫段的中点"。第(Ⅱ)步要証它的充足性，就

是証“凡題設綫段的中点都在 $XY$ 上”.

**証**　(Ⅰ) 在 $XY$ 上任取一点 $M$, 連 $PM$, 延長交 $AB$ 于 $D$.

因为 $PO=OC$, $MO \parallel DC$, 所以 $PM=MD$ (过△一边中点而 $\parallel$ 另一边的綫, 必平分第三边), 就是 $M$ 做 $PD$ 的中点.

(Ⅱ) 从 $P$ 到 $AB$ 上作任意綫段 $PE$, 取 $PE$ 的中点 $N$, 連 $ON$.

因为 $PO=OC$, $PN=NE$, 所以 $ON \parallel CE$ (△的中位綫定理).

但 $XY \parallel AB$, 所以 $ON$ 合于 $XY$ (过 $AB$ 綫外的同一点 $O$, 只能作 $AB$ 的一条平行綫), 就是 $PE$ 的中点 $N$ 在 $XY$ 上.

**总結**　从証明(Ⅰ), 知道凡在 $XY$ 上的点都适合指定条件, 从証明(Ⅱ), 知道凡适合指定条件的点都在 $XY$ 上, 所以这动点的軌迹是 $XY$.

**注意一**　上举的“思考”一項, 不过是表明証題前应有这一个思索的过程, 留給同学們作参考的; 在实际証題时当然不必明白写出.

**注意二**　一个軌迹題既分两方面証明, 最后还要作一个总結, 說明所求的軌迹确实是題中所說的某綫.

**注意三**　証軌迹題时, 不必象初学几何定理那样, 拘泥于刻板的形式. 不很重要的或显而易見的理由, 也可以酌量省略.

## 两面証的变通

我們認識了軌迹的必要性和充足性以后, 进一步来把这两种特性的本質和相互間的关系考察一下:

(a) 必要性　凡在这綫上的点, 都能适合指定条件.

(b) 充足性　凡能适合指定条件的点, 都在这綫上.

在这两个叙述中, 每一叙述都可分做两半段, (a) 的上半段“假使一点是在这綫上”是一个假設, 下半段“那末这点是适合指定条件的”是一个終結, 可見这一个叙述可以算作一条定理. 还有 (b) 的上半段“假使一点是适合指定条件的”是假設,

下半段"那末这点是在这綫上"是終結,也可以算作一条定理。$(b)$的假設和終結刚正是从$(a)$逆轉而成的。

諸位还記得在学习几何定理和証題的时候,我們說过定理可以从一变四嗎?这軌迹的必要性和充足性既然可以認作两条定理,而且它們的假設和終結又刚巧是逆轉来的,不是互相成为"逆定理"嗎?大家都知道,原定理正确时,它的逆命題不一定会跟着正确的①,无怪这两者必須分别証明,缺一不可了。

每一命題除掉可以变得一逆命題外,如果把"是这样"和"不是这样"对調过来,又可得一"否命題",如果既逆轉而又对調,所得的是"逆否命題"。我們无妨再照这样变化一下,得下列的两个命題:

$(a')$ 凡不适合指定条件的点,都不在这綫上。

$(b')$ 凡不在这綫上的点,都不适合指定条件。

其中$(a')$和$(a)$互成逆否命題,原命題和逆否命題的关系你还記得嗎?它們要正确就全正确,要不正确就全不正确,因而$(a')$和$(a)$可說是步調一致的。从$(a)$既可判定軌迹的必要性,从$(a')$就同样可以来判定。可見我們在証軌迹的必要性时,不証$(a)$而換証它的逆否命題$(a')$,也未尝不可。

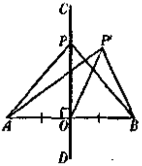
再,$(b')$原是$(a)$的否命題,但$(b')$和$(b)$也互成逆否命題,两者也取一致的步調。从$(b)$既可判定軌迹的充足性,那末从$(b')$也未尝不可以判定。我們要証軌迹的充足性,証$(b)$或証

① 一个叙述还不知道它是否正确时,应称命題而不称定理。

$(b')$总是一样的。

綜上两点，知道要証一軌迹题，虽然必须分两两証，但不必拘泥于上节所講的$(a)$和$(b)$，我們尽可便宜行事，任意变通，証必要性时，在$(a)$和$(a')$两者中任証一种；証充足性时，在$(b)$和$(b')$两者中任証一种就是。

［范例 2］ 一动点距一条定綫段的两端等远，它的軌迹是一直綫，这直綫就是定綫段的垂直平分綫。




**假設**：定綫段 $AB$，过 $AB$ 的中点 $O$ 作垂綫 $CD$。

**求証**：距 $A$、$B$ 等远的点的軌迹是直綫 $CD$。

［思考］ 要証这动点的軌迹是 $CD$，第（Ⅰ）步証$(a)$的必要性，就是証"在 $CD$ 上的点距 $A$、$B$ 等远"，第（Ⅱ）步証$(b')$的充足性，就是証"不在 $CD$ 上的点距 $A$、$B$ 不等远"。

証（Ⅰ）在 $CD$ 上任取一点 $P$，連 $PA$、$PB$。

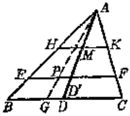
在$\triangle POA$、$\triangle POB$中，$AO=OB$，$\angle POA=\angle POB=90°$，$PO=PO$，所以$\triangle POA\cong\triangle POB$（边、角、边），$PA=PB$。

（Ⅱ）在 $CD$ 外任取一点 $P'$，連 $P'A$、$P'B$、$P'O$。

因为 $P'O$ 不是 $AB$ 的垂綫（过$AB$上的一点 $O$ 只能作 $AB$ 的一条垂綫），所以$\angle P'OA\neq\angle P'OB$。又因 $AO=OB$，$P'O=P'O$，所以 $P'A\neq P'B$（两个△的两組边相等，若夹角不等，那末第三边也不等）。

总結 从（Ⅰ）知 $CD$ 上的点合条件，从（Ⅱ）知不在 $CD$ 上的点不合条件，所以 $CD$ 是这动点的軌迹。

［范例 3］ 一动綫段平行于$\triangle ABC$的一边 $BC$，在这三角形內移动，它的中点的軌迹是一綫段，这綫段就是 $BC$ 上的



中綫。

**假設：** $AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中綫。

**求証：** 平行于 $BC$ 而在 $\triangle ABC$ 内的綫段，它的中点的軌迹是 $AD$。

［思考］ 先依 ($a'$) 証 $AD$ 的必要性，就是証“不是这些綫段的中点不在中綫 $AD$ 上”，再依($b$)証 $AD$ 的充足性，就是証“是这些綫段的中点，必在中綫 $AD$ 上”。

**証** (Ⅰ) 在 $\triangle ABC$ 内作任意綫段 $EF \parallel BC$，交 $AB$、$AC$ 于 $E$、$F$，在 $EF$ 上取 $P$ 点，但 $P$ 不是 $EF$ 的中点。連 $AP$，延长交 $BC$ 于 $G$。

因为 $EP:PF=BG:GC$（从一点所引三射綫，截两平行綫成比例綫段），且 $EP\neq PF$，就是 $EP:PF\neq 1$，用前式代入，得 $BG:GC\neq 1$，就是 $BG\neq GC$，$AG$ 不是 $\triangle ABC$ 的中綫，所以 $P$ 不在中綫 $AD$ 上。

(Ⅱ) 在 $\triangle ABC$ 内作 $HK\parallel BC$，交 $AB$、$AC$ 于 $H$、$K$，取 $HK$ 的中点 $M$，連 $AM$，延长交 $BC$ 于 $D'$。

因 $HM:MK=BD':D'C$（理由見前），且 $HM=MK$，就是 $HM:MK=1$，用前式代入，得 $BD':D'C=1$，就是 $BD'=D'C$，$D'$ 是 $BC$ 的中点，所以 $D'$ 必合于 $D$，$AD'$ 必合于 $AD$，$HK$ 的中点 $M$ 在 $AD$ 上。

总結　从(Ⅰ)知不合条件的点不在 $AD$ 上，从(Ⅱ)知合条件的点在 $AD$ 上，所以 $AD$ 是这动綫段的中点的軌迹。

## 研 究 題 一

(1) 一动綫段的一端固定在一点 $P$，另一端沿定直綫 $AB$ 而运动，假使依定比 $m:n$ 内分这綫段，那末它的分点的軌迹是一直綫，这直綫平行于 $AB$，且距 $P$ 和 $AB$ 的比等于定比 $m:n$。

(2) 平行四边形的一角合于定三角形 $ABC$ 的 $\angle A$，它的对角頂点在 $BC$ 上运动，那末它的两对角綫交点的軌迹是一綫段，这綫段是 $AB$、$AC$ 二边中点的連結綫。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor