刚 架 计 算 的
弹 性 约 束 理 论 及 方 法

胡正顶　黄金华 著

煤 炭 工 业 出 版 社

序　　言

在作者从事设计工作的几十年当中，特别是在近20年的选煤厂设计工作中，和框架结构的接触较多，深感有必要对框架结构的计算问题进行一次较深刻的总结，提出更为有效的计算方法。

刚架的计算有许多方法，弯矩分配法、双向弯矩分配法、弯矩一次分配法、不均衡力矩传播法、形变分配法、卡尼法、调整分配法（自动侧移法）等等，这些都是行之有效的好方法。

作者在1970年推导了以“虚拟水平外力法”为主的几个方法，这些方法吸取了弯矩分配法和卡尼法的某些长处。此后作者试图建立一个较完整的理论体系，并提出计算方法。林氏弯矩一次分配法，是具有我国自己风格的好方法，但原方法是以弯矩为运算量，只能应用于开口刚架，对于含有闭合通路的较复杂的框架，实际上无法进行运算。为此，作者试图以形变（角变、位变）为运算量，对该方法进行大胆的改造与扩展。这就是建立弹性约束理论体系的最初设想。经过多年的研究，根据这一设想作者完成了非跨变刚架（框架）、跨变刚架（拱圈、折梁）的静力计算方法及框架的动力计算方法，并推导了所需公式。

1974年，作者将非跨变刚架的静力部分的文稿寄请钱令希先生审阅，得到钱先生的热情鼓励和指导，并对拙作给予了较高的评价。不久，作者将理论扩展到跨变刚架，建立起一个非跨变-跨变的统一方法，随后寄请大连工学院水利系水工结构专业教研组张瑞丰等老师审阅。张瑞丰等老师详细审阅了此稿，提出了许多有益的修改意见，并指出这个统一方法是非常有价值的。为了再扩大弹性约束理论的应用范围，作者用它对框架的动力计算进行研究，获得成功。有的算例得到了大连工学院水利系杨国贤副教授等老师的电算验证，并肯定了方法的正确性。

为了使弹性约束理论及方法获得新的生命力，我们建立了弹性约束理论的有限元法，并编制了主要的电算程序，列为第五章，为使用者提供方便。

本书第四、五章由胡正顶撰写，其余各章均是胡、黄两人共同撰写的。

书稿的最后审定是由中国矿业学院北京研究生部袁文伯教授完成的。

作者对先后参与本书审查的各位老师表示深切的谢意。

作　者

1984年12月

于河南平顶山

内 容 提 要

本书用作者建立的弹性约束理论及方法对刚架的计算作了较广泛和深入的研究。收敛异常迅速，是书中所述方法的最根本特点。将动力计算与静力计算统一起来，将跨变刚架与非跨变刚架（框架）统一起来，构成了本书与其他著作不同的特色。应用本书方法既可手算，又可电算；既可用于设计计算，又可作进一步的理论研究之用。

本书可供结构设计人员应用，亦可供院校师生作教学和自学时参考。

责任编辑：田 克 运

刚架计算的弹性约束理论及方法

胡正顶 黄金华 著

*

煤炭工业出版社 出版

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092mm $^{1}/_{16}$ 印张13

字数304千字 印数1—3,300

1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷

ISBN 7-5020-0113-1/TD·108

书号 2911 定价2.05元

目　录

第一章　绪　　论

§1.1　刚架计算方法概述

本书所研究的是刚架计算理论及方法。经过几十年的发展，刚架计算已有许多方法。其中，定点法、角变位移法、弯矩分配法、力法、形变法等是计算超静定刚架结构的基本方法。

定点法根据结构物构件的刚度和几何特性来确定构件左右二定点的位置，并通过定点由一端的已知弯矩确定另一端的未知弯矩。左右二定点的位置，可用数解法或图解法求出。

刚架结点的各杆端弯矩不同，但其角变相同（某些铰接者例外），故未知角变的数目比未知弯矩的数目要减少很多，这是角变位移法的优点。但是也还要解算联立方程组，这对于手算来讲，是其缺点。

弯矩分配法是美国克劳斯于1930年发表的方法，以后在工程界流传极广。该方法从角变位移方程出发，根据力学观点，使弯矩在结点按刚度分配，在结点间用与定点法相类似的办法进行传导，通过逐步逼近的过程，求出杆端最后弯矩。它完全避免了解算角变位移法中的联立方程组，也不需要计算或图解定点法中的左右二定点，此即为这种方法的最大优点。该方法计算简单，应用方便，为计算者所乐于接受。但对弯矩收敛缓慢之刚架，需要进行多次反复计算，才能得到令人满意的结果，这是它的一个缺点。

由上述基本方法，还可导出其它许多方法。

我国林同炎所创的弯矩一次分配法，是根据定点法的原理，采用了弯矩分配的办法。此法具有定点法的优点，避免了计算或图解定点位置的缺点；又兼有弯矩分配法计算简单、应用方便的优点，不存在收敛方面的缺点，能一次求出精确值。林法公式简洁，容易记忆，兼有前述方法之主要优点，实为不可多得的优良方法。

我国力学和结构学者钱令希、蔡方荫、俞忽、顾翼鹰、孟昭礼、郑朝强、魏琏等，在结构力学方面，都取得了有益的成果。例如钱令希的调整分配法、顾翼鹰的不均衡弯矩传播法、俞忽的集体分配法等都是好的方法。

柯劳塞克的形变分配法，以形变（主要为角变，也考虑了位变）为未知数计算无侧移刚架及简式侧移刚架，得出近似程度很高的结果，也是结构计算中别具一格的方法。

联邦德国卡尼法（见§2.6），在工程界广泛使用。该法从角变位移公式出发，推导了角变弯矩及位变弯矩等几个较为简单的公式。将角变弯矩与位变弯矩交叉运算，通过逐步逼近的途径，得出杆端的最后弯矩。卡尼法基本上是弯矩分配法的继承和发展。该法只研究了无侧移刚架及简式刚架，后经过我国结构工作者的扩充，使它成了对于复式刚架也适用的方法，扩大了应用范围。由于该法是逐步逼近，故对于一些收敛性缓慢的刚架，像弯矩分配法一样，也需要多次，甚至一、二十次的反复运算才能得出满意的结果。因此，有人提出利用其自动除误的特点，在运算过程中根据收敛情况采取有意改变弯矩大小的办法，促使收敛加快，这是一个很好的改进措施。

力法将超静定结构物赘余连系上的力作为未知量而建立起静定结构体系。写出变形协调条件的方程组，通过解算联立方程组的途径，求出这些未知力。

与之相反，形变法则将超静定结构物再添加附加连系，建立起各杆均为固定的超静定结构体系。写出平衡条件的方程组，然后通过解算联立方程组的途径，求出这些未知形变。

这两个方法由于需要解算联立方程组（这对于手算是不便的），故应用受到限制。现在电子计算机得到广泛的应用，因而这两个方法也自然获得了新的生命力。

为了比较完整地解决多种刚架的计算问题，我们根据工程设计实践经验，本着“一次计算，力争求精确值”的要求，总结和吸收前人、特别是我国力学和结构工作者的经验，提出了一个收敛非常迅速或者能一次得出精确值的弹性约束理论及方法——弹性形变传导法。这种理论及方法，物理概念明确，应用便利，可自动除误。

本理论及方法的基本概念，将在本章§1.4中阐述。第二章、第三章进一步将这一概念具体化。对于某些杆件在结点为铰接的情形一并作了考虑，特别是对装配式跨变结构。

应该指出，在以往的一些关于结构力学的书刊中，是将刚架区分为跨变刚架和非跨变刚架，分别予以处理的。但是，实际上不一定需要这样做，本书对两者做了统一解决。

§1.2 角变位移公式推导(一)——非跨变刚架

非跨变刚架系指梁受力后，梁的跨度(或柱两端的高差)不变的刚架。它的计算，最重要的是如何定义弯曲刚度的问题。对于侧移刚架还有侧移刚度的问题，但它可用弯曲刚度表示而非独立常数。

1. 弯曲刚度的定义及角变位移公式

弯曲刚度K，是指杆件另端固定时，本端产生单位正角变(无侧移)所需弯矩的大小(图1.2-1)。这里所定义的刚度和推导的公式适用于一般的变截面杆，等截面杆只是它的特例。由结构力学得知，等截面直杆的$K=\dfrac{4EI}{h_{ab}}$，其中I为截面的惯性矩。

这里特别指出弯曲刚度的定义，一方面是为了建立角变位移方程，另一方面是为了能与本法的弹性弯曲刚度作比较，了解其物理意义的差别。图中的C_{ab}为由a至b的弯矩传导系数，即为b端弯矩与a端弯矩之比值。将图中的a与b互换，便得到K_{ba}及C_{ba}。

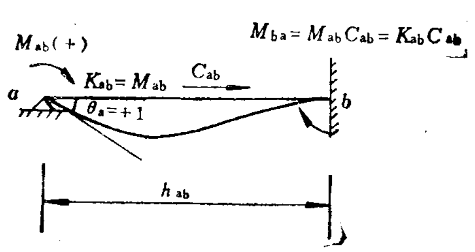

图 1.2-1

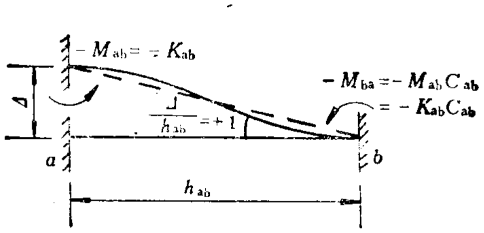

图 1.2-2

如位移引起的角变为$\Delta/h_{ab}=+1$(图1.2-2)，则根据上述刚度的定义，在a端产生的弯矩为$-M_{ab}=-K_{ab}$。根据前述弯矩传导系数的概念，此时在b端产生的弯矩为$-M_{ba}=$

$-K_{ab}\cdot C_{ab}$，即从a点以传导系数C_{ab}向b点传导的弯矩。将a与b互换，又可得到$-M_{ba}=-K_{ba}$及$-M_{ab}=-K_{ba}C_{ba}$。需要指出的是，上述刚度的定义以及弯矩传导的概念，是结构力学中的普遍概念，它对于变截面杆件也是成立的，仅将K及C用变截面杆件的数值代入即可。

剩下的还有荷载产生的固端弯矩M_{Fab}及M_{Fba}。

利用马克思斯威尔交互定理，容易得到$K_{ab}C_{ab}=K_{ba}C_{ba}$。马氏交互定理可述为：$a$点的单位角变在$b$点产生的弯矩(图1.2-3$a$)，等于$b$点的单位角变在$a$点产生的弯矩(图1.2-3$b$)，$M_{ba}=M_{ab}$

即
$$K_{ab}C_{ab}=K_{ba}C_{ba} \tag{1.2.1}$$

这是一个非常重要的公式，以后常会用到。

将上述各种情况下的弯矩相加，用角变及位移表示的弯矩公式(即角变位移公式)为(参见图1.2-4)[1]

$$\left.\begin{aligned} M_{ab}&=K_{ab}\left[\theta_a+C_{ab}\theta_b-(1+C_{ab})\frac{\Delta}{h_{ab}}\right]+M_{Fab}\\ M_{ba}&=K_{ba}\left[\theta_b+C_{ba}\theta_a-(1+C_{ba})\frac{\Delta}{h_{ab}}\right]+M_{Fba}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.2a}$$

式中　K_{ab}、K_{ba}——a、b端的抗弯刚度；

C_{ab}、C_{ba}——由a至b、由b至a的弯矩传导系数；

θ_a、θ_b——a、b端的角变，以弧度计；

Δ——a与b端的相对位变（侧移、沉陷）；

M_{Fab}、M_{Fba}——a、b端的固端弯矩，应包括自己的符号（图1.2-4e）。

上式当$\Delta=0$时，是无侧移的情况。

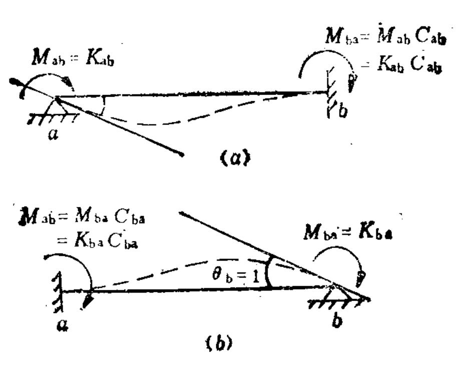

图 1.2-3

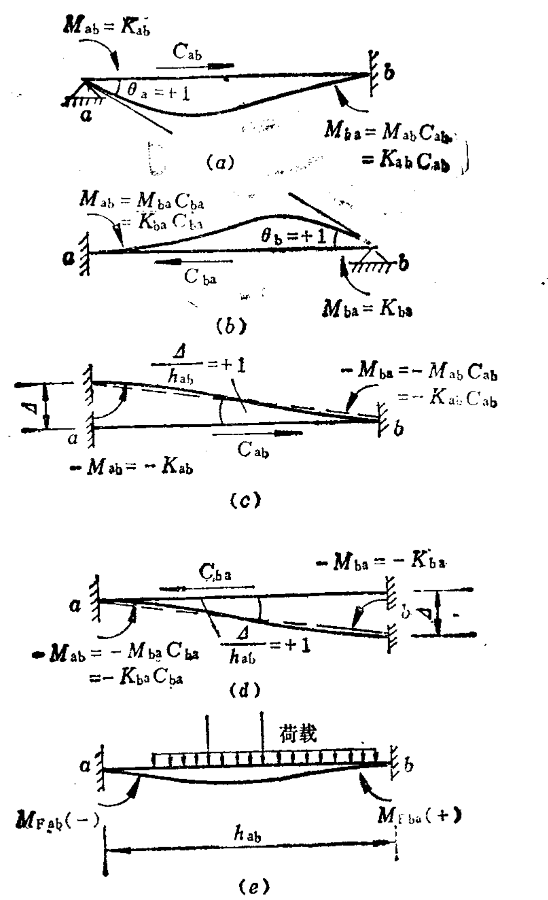

图 1.2-4

对于等截面杆件，$K_{ab}=K_{ba}=K$，$C_{ab}=C_{ba}=\frac{1}{2}$，上述公式简化成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=\frac{K}{2}\left(2\theta_a+\theta_b-\frac{3\Delta}{h_{ab}}\right)+M_{Fab}\\M_{ba}&=\frac{K}{2}\left(2\theta_b+\theta_a-\frac{3\Delta}{h_{ab}}\right)+M_{Fba}\end{aligned}\right\}\tag{1.2.2b}$$

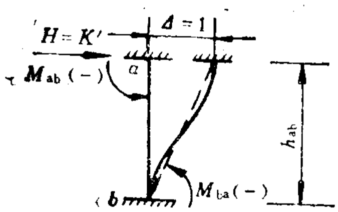

图 1.2-5

应该指出，在刚架静力计算中，往往只需用到弯曲刚度的相对值，这对于计算结果中的力是没有影响的。如选定某截面的$\bar{K}$为标准，则实际形变应该是计算结果中的形变除以$E\bar{K}$，其中E为材料的弹性模量。所以，弯曲刚度常称为相对弯曲刚度系数或刚度系数。变截面杆件的刚度系数已编制成表[1]，毋需计算。常用变截面直梁的形常数和载常数，列在本书附录一中。

2. 侧移刚度的定义

令$\Delta=1$，$\theta_a=\theta_b=M_{Fab}=M_{Fba}=0$，将式(1.2.2$a$)中的两式相加，用$h_{ab}$除之，异号，得到单位位变(侧移或沉陷)下的水平力，即所谓侧移刚度，用K'表示(图1.2-5)，它是

$$\begin{aligned}K'&=K'_{ab}=K'_{ba}\\&=\frac{K_{ab}(1+C_{ab})+K_{ba}(1+C_{ba})}{h_{ab}^2}\\&=H\end{aligned}\tag{1.2.3a}$$

对于等截面杆件$K_{ab}=K_{ba}=K$，$C_{ab}=C_{ba}=\frac{1}{2}$，上述公式简化成如下形式：

$$K'=\frac{3K}{h_{ab}^2}\tag{1.2.3b}$$

这个K'也常常称为相对侧移刚度系数或侧移刚度系数。

§1.3 角变位移公式推导(二)——跨变刚架

跨变刚架系指受力后，梁的跨度(或柱两端的高差)将发生变化的刚架。刚架中的这种杆件(拱圈、折梁等)称为跨变杆件，以后统称拱圈。计算跨变刚架时，除了需要计算刚度系数外，还要计算另外两个形常数T与J。

跨变刚架的刚度系数的定义仍如§1.2中所述，即另端固定，本端产生单位角变(无侧移)所需的弯矩。如图1.3-1所示。

图中的C_{ab}为由a端传至b端的弯矩传导系数，它可能为正也可能为负。这一点与直杆不同，故b端未画出弯矩方向。图1.3-1中的Q_{ab}称为交换系数T_{ab}，它的定义见(1.3.1)式后的符号说明。将a与b互换，便得到K_{ba}、C_{ba}、T_{ba}。

当b端固定，a端产生单位侧移(无角变)时(图1.3-2)，a、b端均出现弯矩和水平推力。这个水平推力称为跨变刚度系数J，而a端的弯矩称为交换系数T_{ab}，b端的弯矩称为交换系

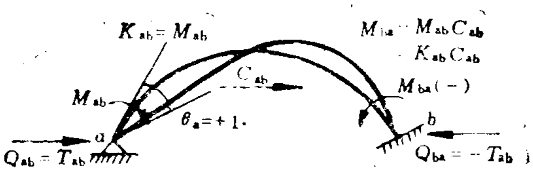

图 1.3-1

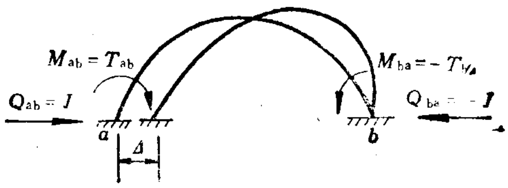

图 1.3-2

数T_{ba}。由力的交互定理易知，图1.3-1中的T_{ab}、T_{ba}应等于图1.3-2中的T_{ab}、T_{ba}。

剩下还有荷载作用下产生的固端弯矩及固端剪力M_{Fab}、M_{Fba}、Q_{Fab}、Q_{Fba}。

将图1.3-3中各种情形的弯矩和剪力相加，并利用等式$K_{ab}C_{ab}=K_{ba}C_{ba}$，则用角变和跨变(侧移差)表示的弯矩和剪力公式见下面的1.3.1式，亦即跨度刚架角变位移公式。形变及力的正、负号均示于图1.3-3中。

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=K_{ab}(\theta_a+C_{ab}\theta_b)+T_{ab}(\Delta_a-\Delta_b)+M_{Fab}\\M_{ba}&=K_{ba}(\theta_b+C_{ba}\theta_a)+T_{ba}(\Delta_b-\Delta_a)+M_{Fba}\\Q_{ab}&=T_{ab}\theta_a-T_{ba}\theta_b+J(\Delta_a-\Delta_b)+Q_{Fab}\\Q_{ba}&=T_{ba}\theta_b-T_{ab}\theta_a+J(\Delta_b-\Delta_a)+Q_{Fba}\end{aligned}\right\}\quad(1.3.1a)$$

式中 K_{ab}、K_{ba}——拱圈a、b端的刚度系数，单位为力×长度；

C_{ab}、C_{ba}——由a至b、由b至a的弯矩传导系数；

θ_a、θ_b——a、b端的角变，以弧度计；

Δ_a、Δ_b——a、b端的侧移，以长度计；

T_{ab}、T_{ba}——交换系数，单位为力。分别为$\theta_a=+1$、$\theta_b=0$及$\theta_b=+1$、$\theta_a=0$时，a与b两端的剪力。根据交互定理，它应等于$\theta_a=\theta_b=0$时，$\Delta_a=+1$、$\Delta_b=0$，及$\Delta_b=+1$、$\Delta a=0$两端的弯矩。

J——跨变刚度系数，单位为力/长度。即为当$\theta_a=\theta_b=0$且跨度$\Delta=+1$时，a、b两端的剪力；

M_{Fab}、M_{Fba}——a、b端的固端弯矩(图1.3-3e)；

Q_{Fab}、Q_{Fba}——a、b端的固端剪力(图1.3-3e)。

由(1.3.1a)式显见有$Q_{ab}=-Q_{ba}$。

对于几何对称的拱圈$K_{ab}=K_{ba}=K$，$C_{ab}=C_{ba}=C$，$T_{ab}=T_{ba}=T$，公式(1.3.1a)化简成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=K(\theta_a+C\theta_b)+T(\Delta_a-\Delta_b)+M_{Fab}\\M_{ba}&=K(\theta_b+C\theta_a)+T(\Delta_b-\Delta_a)+M_{Fba}\\Q_{ab}&=T(\theta_a-\theta_b)+J(\Delta_a-\Delta_b)+Q_{Fab}\\Q_{ba}&=T(\theta_b-\theta_a)+J(\Delta_b-\Delta_a)+Q_{Fba}\end{aligned}\right\}\quad(1.3.1b)$$

显然，$Q_{ab}=-Q_{ba}$。

在§1.1中曾提到，本方法考虑了某些杆件为铰接的情况，特别是装配式跨变结构。对于某些杆件为铰接的情况，将在弹性形常数的有关章节里研究。此处只研究装配式跨变结构的问题，这些结构的结点一般均属铰接。

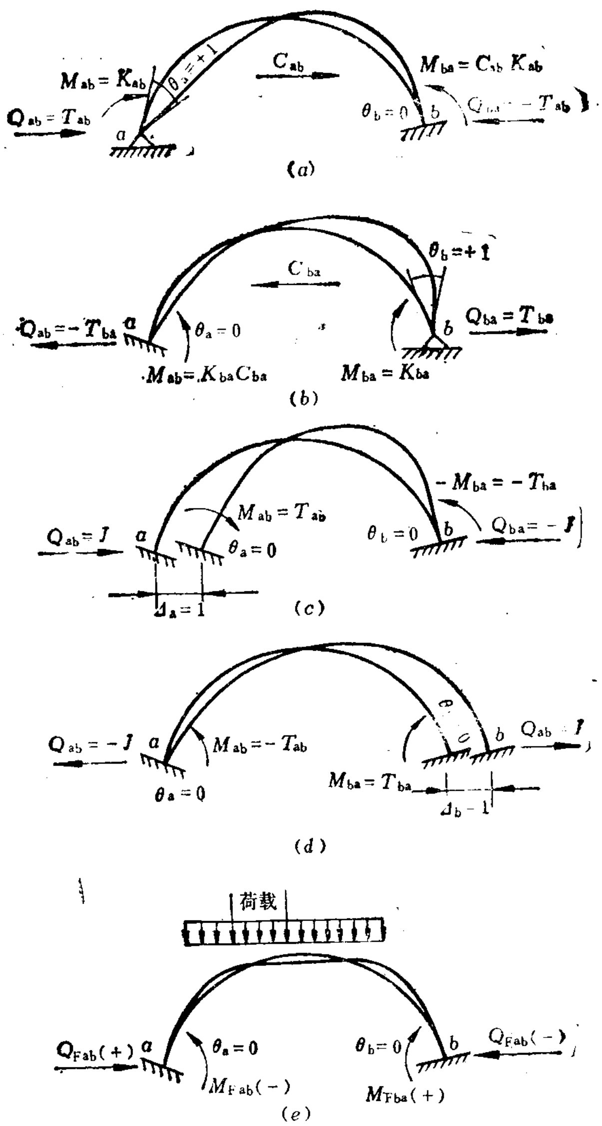

图 1.3-3

这时，需要的原始形常数只有J，载常数只有P(水平推力)。这两个常数根据虚功原理直接求出，反觉简捷。但也可由式(1.3.1)演算出来，附录三中列出了这些常数。

根据J的定义，在式(1.3.1)中，令$\varDelta_a=0$，$\varDelta_b=1$，$M_{ab}=M_{ba}=M_{Fab}=M_{Fba}=0$，容易得到下列方程(图1.3-4)

$$J^m=Q_{ba}=T_{ba}\theta_b-T_{ab}\theta_a+J$$

$$K_{ab}(\theta_a+C_{ab}\theta_b)-T_{ab}=0$$

$$K_{ba}(\theta_b+C_{ba}\theta_a)+T_{ba}=0$$

由第二、第三个方程解得

$$\theta_a=\frac{T_{ab}+T_{ba}C_{ba}}{K_{ab}(1-C_{ab}C_{ba})}$$

$$\theta_b = \frac{-(T_{ba}+T_{ab}C_{ab})}{K_{ba}(1-C_{ab}C_{ba})}$$

代入上面第一个方程中得到

$$J^m = J - \frac{T_{ab}^2K_{ba}+T_{ba}^2K_{ab}+2T_{ab}T_{ba}K_{ab}C_{ab}}{K_{ab}K_{ba}(1-C_{ab}C_{ba})} \tag{1.3.2a}$$

对于几何对称的拱圈，$K_{ab}=K_{ba}=K$，$T_{ab}=T_{ba}=T$，$C_{ab}=C_{ba}=C$。此时J^m可表示为

$$J^m = J - \frac{2T^2}{K(1-C)} \tag{1.3.2b}$$

再在式(1.3.1a)中，令$\Delta_a=\Delta_b=0$，根据两端弯矩为零的条件(图1.3-5)，得到

$$K_{ab}(\theta_a+C_{ab}\theta_b)+M_{Fab}=0$$
$$K_{ba}(\theta_b+C_{ba}\theta_a)+M_{Fba}=0$$

上二式联立解得

$$\theta_a = \frac{-M_{Fab}+M_{Fba}C_{ba}}{K_{ab}(1-C_{ab}C_{ba})}$$

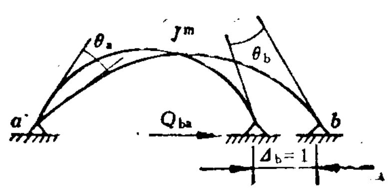

图 1.3-4

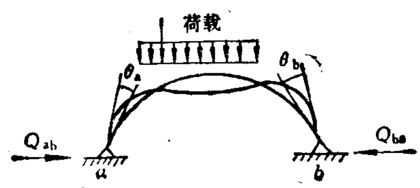

图 1.3-5

$$\theta_b = \frac{-M_{Fba}+M_{Fab}C_{ab}}{K_{ba}(1-C_{ab}C_{ba})}$$

代入式(1.3.1a)的第四式中，得到

$$P = -Q_{ba} = -Q_{Fba} - \frac{M_{Fab}(K_{ab}C_{ab}T_{ba}+K_{ba}T_{ab})-M_{Fba}(K_{ba}C_{ba}T_{ab}+K_{ab}T_{ba})}{K_{ab}K_{ba}(1-C_{ab}C_{ba})} \tag{1.3.3a}$$

对于几何对称的拱圈，简化成

$$P = -Q_{Fba} - \frac{T(M_{Fab}-M_{Fba})}{K(1-C)} \tag{1.3.3b}$$

其中M_F应包括自己的符号(图1.3-3e)。

跨变刚架中的拱圈，如上所述，需要采用四个形常数K、C、T、J。跨变刚架中的立柱(或墩)常是直杆，需要应用§1.2中的角变位移公式，只有形常数K、C。为与本节公式的形式统一，现将柱的形常数用T及J表示(图1.3-6)，此时角变位移公式为

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= K_{ab}\theta_a + T_{ab}\Delta_a + M_{Fab} \\ Q_{ab} &= T_{ab}\theta_a + J\Delta_a + Q_{Fab} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

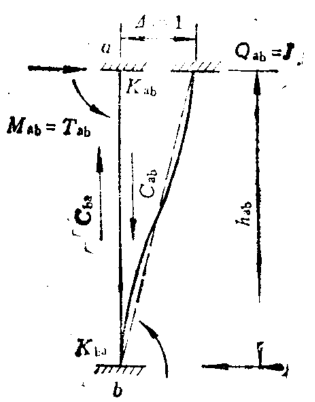

图 1.3-6

而T、J用K、C表示为

$$\left.\begin{aligned} T_{ab} &= \frac{-K_{ab}(1+C_{ab})}{h_{ab}} \\ J &= \frac{K_{ab}+K_{ba}+2K_{ab}C_{ab}}{h_{ab}^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.5}$$

其中J与式(1.2.3a)、式(1.2.3b)的K'是相同的($K_{ab}C_{ab}=K_{ba}C_{ba}$)。注意：柱的$T_{ab}$之值为负数。

§1.4 弹性约束状态的基本概念

以上两节的所有推导〔作为特例的式(1.3.2a)～(1.3.3b)除外〕均假定另端为固定，在此条件下求出形常数及载常数，这些常数是建立角变位移公式所必需的。

结构物的实际形变情况，除某些固定端或铰接端外，其结点或端点总是处于弹性约束状态之中，因此计算时考虑这种状态，是非常有益的。问题是如何考虑，用什么办法解决问题，才能使计算迅速、简便，结果精确或者很容易逼近精确值。

本书的基本观点是结点的弹性约束(对于角变及位变)，理论和公式都是建立在另端(结点)处于弹性约束状态的概念上的。

弹性约束状态，是指结点在结构物的全部构件共同作用、相互制约之下而形成的最终实际形变状态。

先阐述角变的弹性约束状态。如图1.4-1所示之无变位结构物。ab杆在b端与其它杆件相连结，当a端因M_{ab}作用产生弹性角变$\theta_a=+1$时，只要ΣK_{bj}为非固定，b端亦将产生某角变θ_b。与M_{ab}作用的同时，在b端亦产生某弯矩M_{ba}。用弯矩分配法在a与b间进行传导(图1.4-2)，并用K_{ab}代替a端之M_{ab}，得到

$$\overline{K}_{ab}^{m}=K_{ab}(1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ba})$$

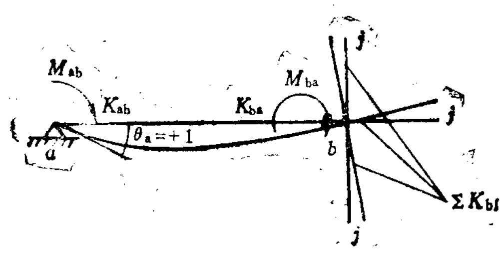

图 1.4-1

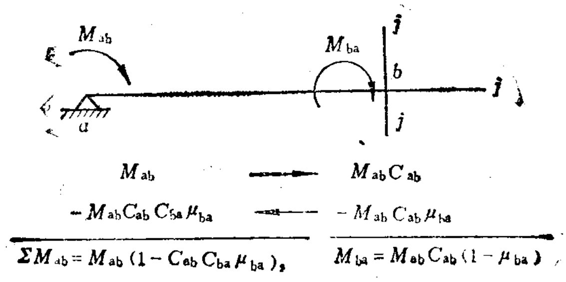

图 1.4-2

现求角变传导系数如下：

将图1.4-2中的M_{ab}、M_{ba}代入式(1.2.2)中，得到

$$M(1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ba})=K_{ab}(\theta_a+C_{ab}\theta_b)$$
$$M(C_{ab}-C_{ab}\mu_{ba})=K_{ba}(\theta_b+C_{ba}\theta_a)$$

解得

$$\theta_a=\frac{K_{ba}M(1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ba})-K_{ab}C_{ab}M(C_{ab}-C_{ab}\mu_{ba})}{K_{ab}K_{ba}(1-C_{ab}C_{ba})}$$

$$\theta_b=\frac{K_{ab}M(C_{ab}-C_{ab}\mu_{ba})-K_{ba}C_{ba}M(1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ba})}{K_{ab}K_{ba}(1-C_{ab}C_{ba})}$$

按定义：

$$C^m_{ab}=\frac{\theta_b}{\theta_a}=\frac{K_{ab}(C_{ab}-C_{ab}\mu_{ba})-K_{ba}C_{ba}(1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ba})}{K_{ba}(1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ba})-K_{ab}C_{ab}(C_{ab}-C_{ab}\mu_{ba})}$$

利用$K_{ab}C_{ab}=K_{ba}C_{ba}$，略加化简，得角变传导系数

$$C^m_{ab}=-C_{ba}\mu_{ba}$$

由图1.4-2，弯矩传导系数为

$$C'_{ab}=\frac{M_{ba}}{\Sigma M_{ab}}=C_{ab}\times\frac{1-\mu_{ba}}{1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ba}}$$

式中 μ_{ba}——ab杆b端之分配系数，$\mu_{ba}=\dfrac{K_{ba}}{K_{ba}+\Sigma K_{bj}}$。

如果b_j杆j端也是角变的弹性约束，则μ_{ba}中之ΣK_{bj}应用ΣK^m_{bj}代替。上述式子成为

$$\left.\begin{aligned}
&K^m_{ab}=K_{ab}(1-C_{ab}C_{ba}\mu^m_{ba})\\
&C^m_{ab}=-C_{ba}\mu^m_{ba}\\
&C_{abm}=\frac{M_{ba}}{\Sigma M_{ab}}=C_{ab}\frac{1-\mu^m_{ba}}{1-C_{ab}C_{ba}\mu^m_{ba}}\\
&\mu^m_{ba}=\frac{K_{ba}}{K_{ba}+\Sigma K^m_{bj}}
\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.1)$$

式中 K^m_{ab}——弹性刚度系数；

C^m_{ab}——弹性角变传导系数；

C_{abm}——弹性弯矩传导系数；

μ^m_{ba}——弹性分配系数。

如此类推可以计算出刚架各个杆端之上述系数。由上推导过程，可知：

（1）角变传导不能反复，只能向前。

（2）形常数K^m_{ab}等的计算只能是逐个进行。例如连续梁或单层刚架（开口刚架无侧移时）须从左端（或从右端）向右端（或向左端）逐个计算每跨右端（或左端）的形常数。

（3）对于多层无侧移刚架，另端的另端，经过某些转折，一定与本端联结。如图1.4-3所示之多层刚架（闭合刚架）的一部分，K^m_{ab}等弹性常数的求解与K^m_{da}有关，而K^m_{da}是要在K^m_{ab}求出之后才能决定。这就引出了矛盾，即所谓闭路循环的矛盾。要解决它只能采取逐步逼近的办法，即首先令某杆件之$K^m=K$，或者在有一定经验后，令K^m之值小于K，而后依次修正，这对结果的正确性是没有影响的。

在（2）中，所述单层刚架或连梁各形常数皆为精确值。在（3）中所述多层刚架各形常数只能是逐步逼近，但由于令另端为弹性约束，其收敛异常迅速。关于这一点，在第二章中还有分析，并用实例证实。

铰接是弹性约束状态的特殊情形。

再阐述侧移的弹性约束状态。如图1.4-4所示侧移结构物，ab杆两端均与其它杆联结。

a端有弯矩M作用时，采用弯矩分配法进行的计算亦列于同一图中，其极限和显然为

$$M_{ab}=M\frac{1-\mu_{ab}}{1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ab}\mu_{ba}}$$

$$M_{ba}=-M\frac{(1-\mu_{ba})\mu_{ab}C_{ab}}{1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ab}\mu_{ba}}$$

对于b端作用有$M_{Fba}=\lambda M_{Fab}=\lambda M$的情况，可利用上述公式，仅将$a$与$b$互换并将$M$

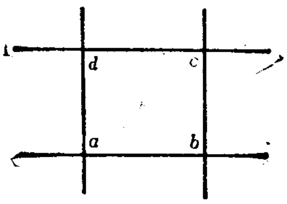

图 1.4-3

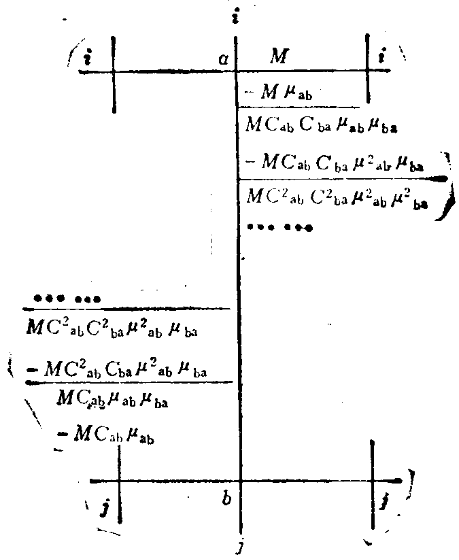

图 1.4-4

乘以λ即可。两端同时作用有M_{Fab}、M_{Fba}，其和除以h_{ab}，便是水平力，结果是

$$\frac{M_{ab}+M_{ba}}{h_{ab}}=\frac{M_{Fab}}{h_{ab}}\cdot\frac{1+\lambda+\mu_{ab}\mu_{ba}(C_{ab}+\lambda C_{ba})-\mu_{ab}(1+C_{ab})-\lambda\mu_{ba}(1+C_{ba})}{1-C_{ab}C_{ba}\mu_{ab}\mu_{ba}}$$

当i、j点均为弹性约束状态时，μ变成μ''。利用式(1.4.1)中之$C^m_{ab}=-C_{ba}\mu''_{ba}$，可将上式改写成

$$\frac{M_{ab}+M_{ba}}{h_{ab}}=\frac{M_{Fab}}{h_{ab}}\cdot\frac{1+\lambda+C^m_{ab}C^m_{ba}\cdot\dfrac{C_{ab}+\lambda C_{ba}}{C_{ab}C_{ba}}+C^m_{ba}\dfrac{1+C_{ab}}{C_{ab}}+\lambda C^m_{ab}\dfrac{1+C_{ba}}{C_{ba}}}{1-C_{ab}C_{ba}\mu''_{ab}\mu''_{ba}}$$

当$\theta_a=\theta_b=0$时，由侧移Δ产生的固端弯矩为

$$M_{Fab}=K_{ab}\left[-(1+C_{ab})\frac{\Delta}{h_{ab}}\right]$$

$$M_{Fba}=K_{ba}\left[-(1+C_{ba})\frac{\Delta}{h_{ab}}\right]$$

故有

$$\lambda=\frac{M_{Fba}}{M_{Fab}}=\frac{K_{ba}(1+C_{ba})}{K_{ab}(1+C_{ab})}$$

将它代入上式得到

$$\frac{M_{ab}+M_{ba}}{h_{ab}}=\frac{M_{Fab}}{h_{ab}}\cdot\frac{1+\dfrac{C^m_{ab}C^m_{ba}}{C_{ba}}+C^m_{ba}\dfrac{1+C_{ab}}{C_{ab}}+\left(1+\dfrac{C^m_{ab}C^m_{ba}}{C_{ab}}+C^m_{ab}\dfrac{1+C_{ba}}{C_{ba}}\right)\dfrac{K_{ba}(1+C_{ba})}{K_{ab}(1+C_{ab})}}{1-C_{ab}C_{ba}\mu''_{ab}\mu''_{ba}}$$

$$=\frac{M_{Fab}}{h_{ab}}\cdot\frac{K_{ab}(1+C_{ab})\left[1+C^m_{ba}\left(\dfrac{1+C_{ab}}{C_{ab}}+\dfrac{C^m_{ab}}{C_{ba}}\right)\right]+K_{ba}(1+C_{ba})\left[1+C^m_{ab}\left(\dfrac{1+C_{ba}}{C_{ba}}+\dfrac{C^m_{ba}}{C_{ba}}\right)\right]}{K_{ab}(1+C_{ab})(1-C_{ab}C_{ba}\mu''_{ab}\mu''_{ba})}$$

在上式中注意到$\dfrac{M_{Fab}}{K_{ab}(1+C_{ab})}=-\dfrac{\Delta}{h_{ab}}$

并令$\dfrac{M_{ab}+M_{ba}}{h_{ab}}=Q_{ab}=-P_{ab}$的大小恰好使$\Delta=1$，按侧移弹性刚度的定义，上式即为侧移弹性刚度(图1.4-5)。

$$J^m=\frac{K_{ab}(1+C_{ab})\left[1+C^m_{ba}\left(\dfrac{1+C_{ab}}{C_{ab}}+\dfrac{C^m_{ab}}{C_{ba}}\right)\right]+K_{ba}(1+C_{ba})\left[1+C^m_{ab}\left(\dfrac{1+C_{ba}}{C_{ba}}+\dfrac{C^m_{ba}}{C_{ab}}\right)\right]}{h^2_{ab}(1-C_{ab}C_{ba}\mu^m_{ab}\mu^m_{ba})} \tag{1.4.2}$$

式中 $\mu^m_{ab}=\dfrac{K_{ab}}{K_{ab}+\Sigma K^m_{ai}}$；

$\mu^m_{ba}=\dfrac{K_{ba}}{K_{ba}+\Sigma K^m_{bj}}$。

J^m亦可用K^m和C^m表示，在第二、第三章中都有这些表示式，它与式(2.2.2)实际上是相同的。

以上所推导的式子是以大家所熟知的弯矩分配法进行的。以后各章的推导则采用完全不同的、较为简捷的办法。这里先用弯矩分配法推导是为了使读者容易理解弹性约束状态的概念及如何应用这一概念。初步理解为什么可以求出精确值，为什么不能求出精确值，为什么应用本概念后收敛会异常迅速。同时也为了便于与林同炎的弯矩一次分配法进行比较。

铰接是角变弹性约束的特殊情形，也是侧移弹性约束的特殊情形。对于侧移而言，柱最多只一端为铰接，否则此柱没有意义。

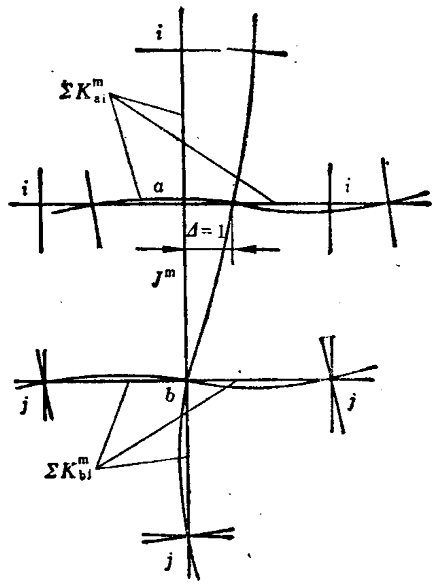

图 1.4-5

§1.5 林同炎的弯矩一次分配法

前已提及，林同炎的弯矩一次分配法是国际知名的结构工程专家林同炎教授所创的一个良好方法，但原法只限于无侧移的单层刚架。对于其它的刚架，该法需要进行重大的扩充与改进。本方法的目的之一即寓于此。当然，林法的观点是很可贵的，我们从中汲取了教益。

下面简略地推导一下林法，并指出与本法的联系。

角变位移方程(1.2.2a)，当$\Delta=0$(即无位移)时，为

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=K_{ab}(\theta_a+C_{ab}\theta_b)\\M_{ba}&=K_{ba}(\theta_b+C_{ba}\theta_a)\end{aligned}\right\} \tag{1.5.1a}$$

若b端固定，将弯矩M_{ab}加于a端，使$\theta_a=+1(\theta_b=0)$，则由刚度系数的定义，可得到(参看图1.2-3a)

$$M_{ab}=K_{ab}$$
$$M_{ba}=M_{ab}C_{ab}$$

若b端为铰接，则$M_{ba}=0$，由式(1.5.1a)的第二式(取$M_{ba}=0$)，得到$\theta_b=-C_{ba}$，代入式(1.5.1a)的第一式中，且令$\theta_a=+1$，得到

$$M_{ab}=K_{ab}(1-C_{ab}C_{ba})$$

此处M_{ab}是b端为铰接时，a端刚度系数的定义。

所谓角变的弹性约束，其角变量的大小必介于固定与铰接之间，当b端为弹性约束时，应有$0<|\theta_b|<C_{ba}$。仍使$\theta_a=1$，这时式（1.5.1a）又变为

$$\left.\begin{aligned}M_{ab}&=K_{ab}(1+C_{ab}\theta_b)=K^m_{ab}\\M_{ba}&=K_{ba}(\theta_b+C_{ba})\end{aligned}\right\}\qquad(1.5.1b)$$

并有

$$C_{abm}=\frac{M_{ba}}{M_{ab}}=\frac{K_{ba}(\theta_b+C_{ba})}{K_{ab}(1+C_{ab}\theta_b)}$$

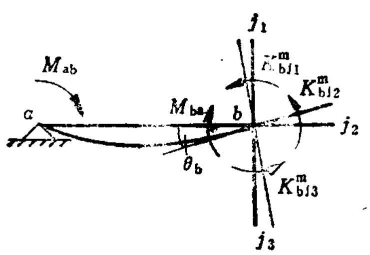

图 1.5-1

设与b相联之各杆的K^m已经求出，当b点有角变θ_b时，各杆的弯矩为（图 1.5-1）

$$\Sigma M_{bj}\left\{\begin{aligned}&M_{bj1}=K^m_{bj1}\theta_b\\&M_{bj2}=K^m_{bj2}\theta_b\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right.$$

根据b点的平衡条件

$$M_{ba}+\Sigma M_{bj}=0$$

将式（1.5.1）第二式及ΣM_{bj}代入此平衡条件中，得到

$$\theta_b(K_{ba}+\Sigma K^m_{bj})+K_{ba}C_{ba}=0$$

即

$$\theta_b=-C_{ba}\mu^m_{ba}$$

其中 $\mu^m_{ba}=\dfrac{K_{ba}}{K_{ba}+\Sigma K^m_{bj}}$，与式（1.4.1）相同。

将θ_b代入式（1.5.1b）的第一式及上述C_{abm}式中并利用$C_{ab}K_{ab}=C_{ba}K_{ba}$，得到

$$\left.\begin{aligned}K^m_{ab}&=K_{ab}(1-C_{ab}C_{ba}\mu^m_{ba})\\C_{abm}&=C_{ab}\,\frac{1-\mu^m_{ba}}{1-C_{ab}C_{ba}\mu^m_{ba}}\end{aligned}\right\}\qquad(1.5.2)$$

这就是林法的两个基本公式，它与式（1.4.1）中第一、第三式完全相同，其计算顺序及注意要点亦与式（1.4.1）后面的说明相仿。

将式（1.4.1）的第二式代入第三式中，得到

$$C_{abm}=C_{ab}\times\frac{1+\dfrac{C^m_{ab}}{C_{ba}}}{1+C_{ab}C^m_{ab}}\qquad(1.5.3a)$$

这就是林法中的弹性弯矩传导系数用本法中的弹性角变传导系数的表示式。对于等截面杆件为