微积分习题解答

经济管理数学基础〔一〕 刘正根 丁京禹 朱南 刘丽 编

西南财经大学出版

经济管理数学基础（一）

微积分习题解答

刘正根　　丁京禹
朱　南　　刘　丽　编

西南财经大学出版社

责任编辑：左　强
封面设计：潘令宇

《微积分》习题解答
经济管理数学基础（一）

西南财经大学出版社出版　（成都市光华村）
四川省新华书店发行　郫县科技书刊印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32　印张13.75　字数298千字
1988年1月第一版　1988年1月第一次印刷
印数：1—26 000

书号：ISBN 7—81017—056—2/F·44

定价：3.25元

前　言

由我们编写的经济管理数学基础(一)—《微积分》(西南财经大学出版社,1988年版)已定为四川省高等教育自学考试经济管理类专业的教材。为便于广大读者作教材中的习题与概念题时参考,特配套编写了这本习题解答,书中部分习题有的给出一题多解，有的进行了题解分析，解法新颖。

为加强读者在计算和应用方面的训练以及开阔读者的视野，还在每章之后增添了补充题与题解，其中个别题难度较大，读者可根据自已的情况进行练习。

本书除可供高教自考、电大、函大、职大和经济管理类干部培训班学员学习参考外，还可供高等财经院校师生参考。

由于我们水平有限，书中一定有不少缺点和错误，敬请广大读者批评指正，谨此致谢。

编　者

1987年9月于光华园

目　　录

习 题 一

1．求下列函数的函数值.

（1） $f(x)=x^2+x-1$，求$f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{2})$.

解 $f(0)=0^2+0-1=-1$；

$f(-1)=(-1)^2+(-1)-1=-1$；

$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}$.

（2） $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$，求 $f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-\frac{3}{5})$.

解 $f(0)=\sqrt{\frac{1-0}{2+0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

$f(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1-1/2}{1+1/2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

$f(-\frac{3}{5})=\sqrt{\frac{1-(-3/5)}{2+(-3/5)}}=\sqrt{\frac{8/5}{7/5}}=\sqrt{\frac{8}{7}}$

$=2\sqrt{\frac{2}{7}}$.

(3) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，求 $f(0),f(\frac{1}{3}),f(-\frac{1}{2})$.

解 $f(0)=\lg\frac{1-0}{1+0}=\lg 1=0$;

$f(\frac{1}{3})=\lg\frac{1-1/3}{1+1/3}=\lg\frac{1}{2}=-\lg 2$;

$$f(-\frac{1}{2})=\lg\frac{1-(-\frac{1}{2})}{1+(-\frac{1}{2})}=\lg 3.$$

2. 证明下列各题.

(1) $f(x)=x^4-2x^2+3$. 证明 $f(x)=f(-x)$.

证明 $\because$ $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+3$
$=x^4-2x^2+3=f(x)$,

$\therefore$ $f(x)=f(-x)$.

(2) $f(x)=\operatorname{tg}x$，证明 $f(x)=-f(-x)$.

证明 $\because$ $f(-x)=\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x=-f(x)$,

$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$.

(3) $f(x)=a^x$，证明 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$;

$\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$，其中 $0<a\neq 1$

证明 $\because$ $f(x)\cdot f(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=f(x+y)$,

$\therefore$ $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$;

$\because$ $\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}=f(x-y)$,

$$\therefore \quad \frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$$

(4) $f(x)=\log_a x$，证明$f(x)+f(y)=f(xy)$；

$f(x)-f(y)=f(\frac{x}{y})$. $0<a\neq 1$

证明 $\because \quad f(x)+f(y)=\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

$$=f(xy),$$

$$\therefore \quad f(x)+f(y)=f(xy);$$

$$\because \quad f(x)-f(y)=\log_a x-\log_a y$$

$$=\log_a\frac{x}{y}=f(\frac{x}{y}),$$

$$\therefore \quad f(x)-f(y)=f(\frac{x}{y}).$$

3. 下列中的$f(x)$与$\varphi(x)$是否表同一函数？说明其理由.

(1) $f(x)=\ln|x|$，$\varphi(x)=\ln x$.

解 当 $x>0$时，有$\ln|x|=\ln x$，即

$$f(x)=\varphi(x);$$

当 $x<0$时，$f(x)=\ln|x|$有意义，而$\varphi(x)=\ln x$无意义。就是说，由于$f(x)=\ln|x|$的定义域是$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$；而$\varphi(x)=\ln x$的定义域是$(0, +\infty)$，因此两者不代表同一函数。

(2) $f(x)=x$，$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$.

解 因$f(x)$定义域为$(-\infty, +\infty)$，

$\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$定义域为$[0, +\infty)$，

因此，两者不代表同一函数.

4．求下列函数的定义域.

（1） $f(x)=x^2-3x+1$.

解 当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$f(x)$都有意义，因此，定义域为$(-\infty,+\infty)$，或用集合形式记为$D=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

（2） $f(x)=\sqrt{3-2x}$.

解 $3-2x\geqslant 0$，即$x\leqslant\frac{3}{2}$，因此定义域为$(-\infty,\frac{3}{2}]$，或用集合形式记为$D=\{x|-\infty<x\leqslant\frac{3}{2}\}$.

（3） $f(x)=\frac{1}{x^2-5}$.

解 $x^2-5\neq 0$，即$x\neq\pm\sqrt{5}$，因此，定义域为$(-\infty,-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty)$.

（4） $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$.

解 $x^2-5x+4\geqslant 0$，即 $(x-1)(x-4)\geqslant 0$，解之得$x\leqslant 1$或$x\geqslant 4$. 因此，定义域为$(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$.

（5） $f(x)=\lg(x^2-7x+6)$.

解 $x^2-7x+6>0$，即$(x-1)(x-6)>0$，解得$x<1$，或$x>6$. 因此，定义域为$(-\infty,1)\cup(6,+\infty)$.

（6） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

解 定义域为$(-\infty,\ 2]$，或记为$D=\{x\mid -\infty<x\leqslant 2\}$.

5．下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？

（1） $y=\sqrt[3]{x^2}$.

解 函数的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$．在这个对称区间内任取一点x， $\because \sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}$，

$$\therefore\quad \sqrt[3]{x^2}\text{是偶函数.}$$

（2） $y=x-\dfrac{1}{3}x^3+x^5$,

解 任意$x\in D=(-\infty,\ +\infty)$，

$$\because\quad f(-x)=(-x)-\frac{1}{3}(-x)^3+(-x)^5$$

$$=-(x-\frac{1}{3}x^3+x^5)=-f(x),$$

$$\therefore\quad y=x-\frac{1}{3}x^3+x^5\text{是奇函数.}$$

（3） $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$, $(0<a\neq 1)$

解 函数的定义域为$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，对定

义域内的任意x，

$$\because \quad f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}$$

$$=-f(x),$$

$$\therefore \quad y=\frac{a^x+1}{a^x-1}\text{是奇函数.}$$

（4） $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，任取一点x，

$$\because \quad f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2}).$$

$$=\log_a\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

$$\therefore \quad y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})\text{为奇函数.}$$

6．说明下列函数在指定区间内的单调性。

（1） $y=f(x)=3x-5$, $(-\infty, +\infty)$.

解 当 x_1, $x_2\in(-\infty, +\infty)$ 且$x_2>x_1$时，恒有$f(x_2)=3x_2-5>3x_1-5=f(x_1)$. 所以$y=3x-5$是单调增加（严格的）。

（2） $y=x^2-2x+3$, $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$.

解 $\because$ $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$.

当$x_1, x_2\in(-\infty, 1)$且$x_2>x_1$时，有$f(x_2)<f(x_1)$.

即在（$-\infty$，1）内$f(x)$为单调减函数（严格的）。

当x_1，$x_2\in(1, +\infty)$且$x_2>x_1$时，有$f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$在（1，$+\infty$）内有单调增函数（严格的）。

（3） $y=2^{x-1}$，（0，$+\infty$）.

解 当 x_1，$x_2\in$（0，$+\infty$）且$x_2>x_1$时，有

$2^{x_2-1}>2^{x_1-1}$ 所以 $y=2^{x-1}$ 在（0，$+\infty$）为单调增函数（严格的）。

（4） $y=-\log_3 x$，（0，$+\infty$）.

解 当 x_1，$x_2\in$（0，$+\infty$）且$x_2>x_1$时，有

$\log_3 x_2>\log_3 x_1$

所以有$-\log_3 x_2<-\log_3 x_1$. 即$y=-\log_3 x$为单调减函数（严格的）。

7．求下列函数的反函数（习惯上的反函数）.

（1） $y=\sqrt[3]{2x-1}$

解 由 $y=\sqrt[3]{2x-1}$，有 $2x-1=y^3$，

即 $x=\frac{1}{2}(1+y^3)$，故 $y=\frac{1}{2}(1+x^3)$.

（2） $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$，得 $2^x=\frac{y}{1-y}$，

即 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$. 故 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

（3）$y=1+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

解 由 $y=1+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$，有 $x+2=(\frac{1}{2})^{y-1}$，

即 $x=(\frac{1}{2})^{y-1}-2$， 故 $y=(\frac{1}{2})^{x-1}-2$。

8．作出下列函数的图形．

（1） $y=x^2-2x$．

解 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$是一条抛物线，顶点$(1, -1)$，对称轴为$x=1$．（图1．1）

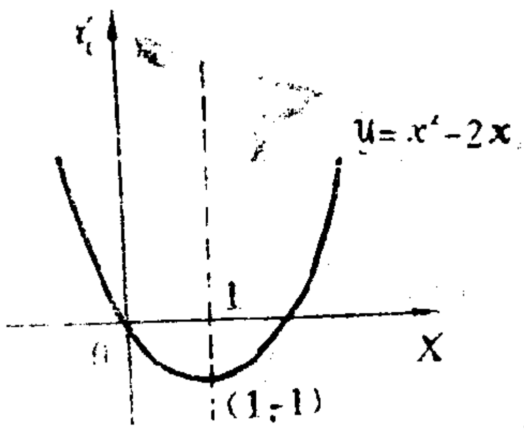

图1.1

2） $y=|x|$．

解 $x\geqslant 0$时，$y=x$；$x<0$时，$y=-x$。（图1.2）

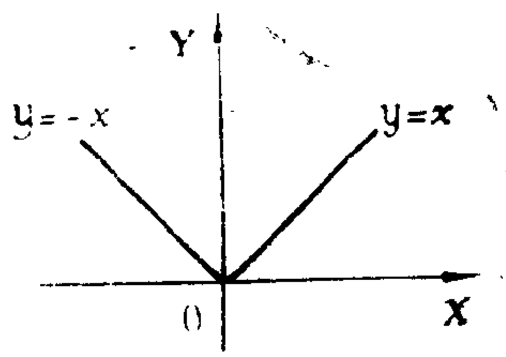

图1.2

（3）$\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ x+1, & x\geqslant 0. \end{cases}$

解 这是一个分段函

数，其图形由抛物线 $y=x^2-1$（$x<0$），直线 $y=x+1$（$x\geqslant 0$）所组成.（图1．3）

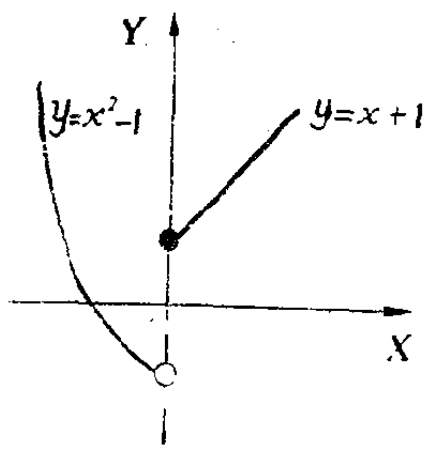

图1.3

9．指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

（1） $y=(2x-1)^3$.

解 $y=u^3$，$u=2x-1$，即 $y=(2x-1)^3$ 可认为是通过中间变量u的3次方复合而成的.

注 9大题中指的简单函数，通常是基本初等函数。但特殊地，对诸如 $ax+b$ 的函数我们也认为是简单函数（实际上，$ax+b$ 是由常值函数a、b与一次幂函数x复合而成的）。

（2） $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

解 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$，即y是u的指数函数，u是v的幂函数，v是x的一次函数，即 $y=e^{\sqrt{x+1}}$ 可认为是通过中间变量u，v复合而成的.

（3） $y=\lg\sin(x^2-1)$.

解 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=x^2-1$. 即可认为 $y=\lg\sin(x^2-1)$ 是通过u和v复合而成的.

（4） $y=5^{\cos^2 x}$，

解 $y=5^u$，$u=v^2$，$v=\cos x$，

即y是u的指数函数，u是v的幂函数，v是x的余弦函数。$v=5^{\cos^2 x}$ 可认为是通过中间变量u，v复合而成的。

（5） $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$，

解 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{t}$，$t=1-x^2$，即y是u的幂函数，u是v的反正弦函数，v是t的幂函数，t是x的二次函数。则可认为 $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$ 是通过中间变量u，v、t复合而成的.

10. 生产某产品，其固定成本为b元，单位产品成本为a元，试将总成本C(x)表为产量x的函数.

解 通常，总成本=固定成本+变动成本.

当产量为x时，变动成本为ax元，

则总成本：$C(x)=ax+b$.

注 若题意还要求得出平均成本（即平均单位成本），则为 $\overline{C}(x)=\frac{ax+b}{x}=a+\frac{b}{x}$.

11. 用铁皮做一个容积为V的圆柱形罐头筒，试将它的表面积S表示成底半径r的函数.

解 设圆柱形的底半径为r，高为h，由题意有$V=\pi r^2h$，

$S=2\pi r^2+2\pi rh$. 但 $h=\frac{V}{\pi r^2}$ 故 $S=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$，

$0<r<+\infty$.

12. 拟建一个长方体水池，它的高与底面宽相等，底面长是底面宽的2倍，如果池底单位面积的造价是四周单位面积造价的1.5倍，试将总造价表示成池高的函数.

解 设池底宽为x，四周的单位面积造价为a元，

则池高为x，底面长为2x，底面积为$2x^2$，四周面积为$6x^2$. 底面单位面积造价为1.5a元。令总造价为y，于是

$y = 1.5a(2x^2) + a(6x^2) = 9ax^2, \qquad 0 < x < +\infty.$

13. 某电车路线共10站，票价规定：乘坐2站以下者收费5分，乘坐2—6站者收费1角，6站以上者收费1角5分，试将票价表为站数的函数并作图.

解 设票价为y(角)，站数为x，则由题意有

$$y = \begin{cases} 0.5, & 0 < x \leqslant 2 \\ 1, & 2 < x \leqslant 6 \\ 1.5, & 6 < x \leqslant 10. \end{cases}$$

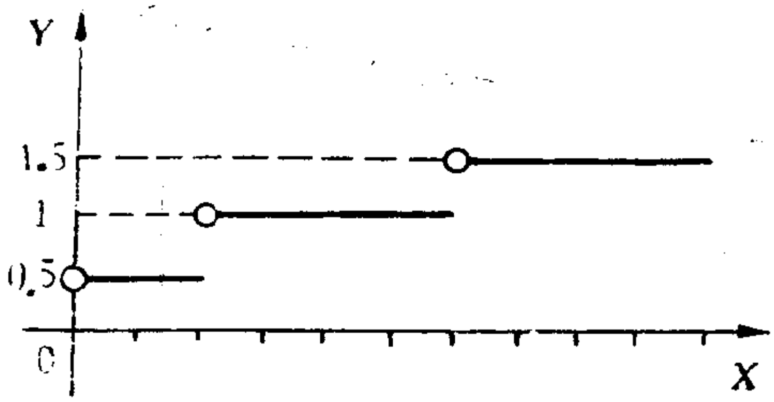

图1.4

14. 某种化肥1000吨，每吨定价130元，销售量在700吨以内时按定价出售，销售在700吨以上其超过部分按定价9折出售. 试将销售总收入表为销售量的函数.

解 设销售量为x，销售总收入为y. 则

$$y = \begin{cases} 130x, & 0 \leqslant x \leqslant 700; \\ 91000 + 0.9(130)(x - 700), & 700 < x \leqslant 1000. \end{cases}$$

15. 某产品年产量为x台，每台售价200元，当年产量在500台以内时，可以全部卖出，当年产量超过500台时，经广

告宣传后又可多售出200台，每台平均广告费20元，生产再多，本年就卖不出去了，试将本年的销售总收入R(x)表为年产量x的函数.

解 由题意有

$$R(x)=\begin{cases}200x, & 0\leqslant x\leqslant 500;\\ 100000+(200-20)(x-500), & 500<x\leqslant 700;\\ 200(500+200)-200\times 20=136000, & x>700.\end{cases}$$

定义域为 $[0,+\infty)$.

16．利用数列极限定义，证明下列极限.

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{n}=3$.

证明 任给 $\varepsilon>0$，由 $\left|\dfrac{3n+5}{n}-3\right|<\varepsilon$，有 $\dfrac{5}{n}<\varepsilon$，

即 $n>\dfrac{5}{\varepsilon}$。故取正整数 $N=[\dfrac{5}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，都有

$\left|\dfrac{3n+5}{n}-3\right|<\varepsilon$，

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n}=3.$$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

证明 任给 $\varepsilon>0$，由 $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon$，有 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，