轨　　迹

杨学渊

江苏人民出版社

内　容　提　要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分六部分，第一、第二两部分是关于轨迹的基础知识；第三、第四两部分阐述如何探求轨迹及如何检查求得的轨迹；第五部分是空间点的轨迹；第六部分是轨迹在作图上的应用；最后有小结。

轨　迹

杨　学　渊

*

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行

徐州印刷厂印刷

1979年12月第1版

1979年12月第1次印刷

印数：1—84500册

书号：13100·034　定价：0.47元

目　　录

一、预 备 知 识

轨迹是数学里的一个重要概念，它在生产实践和几何作图中都有应用。例如飞机在天空中飞翔，轮船在大海上航行，我们都要研究它们的航线，使飞机、轮船能安全、迅速地到达目的地。又如我们常常根据自动记录温度机所提供的曲线，研究某地在某时间内温度的高低和变化情况，为生产服务。这些都涉及轨迹问题。再如我们绘制机器零件的图样时，经常要用到“连接”的知识，它也是建立在轨迹知识基础之上的。因此，对于轨迹问题，应该有较系统的理解，才能掌握和运用这些知识，解决有关实际问题。同时，轨迹问题也是学习解析几何、数学分析等高等数学的基础知识之一。本书只研究点的轨迹，着重介绍点的轨迹的基本知识，平面上和空间里的基本轨迹定理，以及轨迹如何探求和怎样检查题解，通过例题，说明方法，提高读者分析问题和解决问题的能力。由于轨迹的基本知识中，要涉及命题的四种形式及其相互关系，以及命题的条件和结论间的逻辑关系，所以简要介绍这些内容，作为预备知识。

§1　数学命题的四种形式及其相互关系

我们知道，任何一部数学书的内容通常都是由一系列数学命题组织而成的。每一个数学命题由“条件”和“结论”两部分组成。例如命题“平面上一点如果到一条线段两端的

距离相等，那么这点在这条线段的垂直平分线上。”其中“平面上一点到一条线段两端的距离相等”是条件，而“这点在这条线段的垂直平分线上”是结论。有时叙述一个命题，也有只说出条件而略去结论的。例如“在平面上求到一条线段两端的距离相等的点所组成的图形”，就只说出条件而没说出结论，这时的命题就转化成问题的形式了。

最简单的命题只有一个条件和一个结论，这样的命题有四种形式，即原命题、逆命题、否命题和逆否命题。我们看下面的例子：

例 1 原命题：“如果一点在线段的垂直平分线上，那么这点到这条线段两端的距离相等。”（正确）

逆命题：“平面上一点如果到线段两端的距离相等，那么这点在这条线段的垂直平分线上。”（正确）

否命题：“平面上一点如果不在线段的垂直平分线上，那么这点到这条线段两端的距离不等。”（正确）

逆否命题：“如果一点到线段两端的距离不等，那么这点不在这条线段的垂直平分线上。”（正确）

例 2 原命题：“如果两角是对顶角，那么这两角相等。”（正确）

逆命题：“如果两角相等，那么这两角是对顶角。”（错误）

否命题：“如果两角不是对顶角，那么这两角不等。”（错误）

逆否命题：“如果两角不等，那么这两角不是对顶角。”（正确）

例 3 原命题：“如果 $a \neq 0$，那么 $a+b \neq 0$。”（错误）

逆命题：“如果$a+b\neq0$，那么$a\neq0$。”（错误）

否命题：“如果$a=0$，那么$a+b=0$。”（错误）

逆否命题：“如果$a+b=0$，那么$a=0$。”（错误）

一般地，若用A表示原命题的条件，用B表示它的结论，则命题的四种形式可以表达为：

原命题：“若A，则B。”

逆命题：“若B，则A。”

否命题：“若$\overline{A}$，则$\overline{B}$。”*

逆否命题：“若$\overline{B}$，则$\overline{A}$。”

从上面的例子可以看出，一个命题的其它三种形式，都可以从原命题变化而得。所谓逆命题、否命题和逆否命题都是相对于原命题而言的。事实上，其中任何一种形式都可以作为原命题，一样可以从它出发制造出其它三种形式来。

从上面命题的四种表达形式，我们容易看出，它们之间存在着如下三种关系：

（1）互逆关系。原命题和逆命题是互逆的，否命题和逆否命题也是互逆的。

（2）互否关系。原命题和否命题是互否的，逆命题和逆否命题也是互否的。

（3）互为逆否关系。原命题和逆否命题是互为逆否的，逆命题和否命题也是互为逆否的。

命题的四种形式间的这些关系，可以用图1—1来表明（图见次页）。

我们知道，命题有的是正确的，有的是错误的，那么上述命题的四种形式之间，它们的正确和错误关系又是怎样的

---

*记号$\overline{A}$是否定A的意思，读做“不A”．其余仿此．

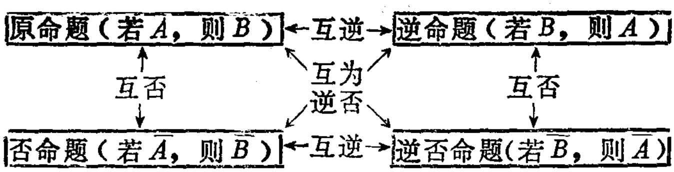

图1—1

呢？从所举的几个例子中，我们发现：互逆或者互否的两个命题，它们的正确性并不是一致的，可以两个都正确，可以两个都错误，也可以一个正确一个错误；而互为逆否的两个命题，它们的正确性却总是一致的，要正确就都正确，要错误就都错误。互为逆否的两个命题间的这种关系，并不是偶然的，我们可以给出证明。

已知 原命题“若A，则B。” （甲）

逆否命题“若$\overline{B}$，则$\overline{A}$。” （乙）

求证 ①若（甲）、（乙）中有一个正确，则另一个也正确。

②若（甲）、（乙）中有一个错误，则另一个也错误。

证明 ①假定（甲）、（乙）中有一个正确而另一个错误，比如说（甲）正确而（乙）错误，则根据逻辑思维的基本规律中的排中律，知（乙）的反面必正确，即“若$\overline{B}$，则A”正确。这就是说，“若$\overline{B}$，则A”和“若A，则B”要同时正确。于是从“$\overline{B}$”推得“B”，这是自相矛盾的。可见证明开头所作的假定是错误的。因此，若（甲）、（乙）中有一个正确，则另一个也必正确。

②假定（甲）、（乙）中有一个错误而另一个正确，比如说（乙）错误而（甲）正确，则根据上述①的证明，知道

当（甲）正确时（乙）也必正确，这就和假定相矛盾。可见证明开头所作的假定是错误的。因此，若（甲）、（乙）中有一个错误，则另一个也必错误。（证毕）

综上所述，我们证明了原命题和逆否命题的正确性总是一致的。同样，我们可以证明逆命题和否命题的正确性也总是一致的。

一般地，在两个命题中，如果其中任一个命题正确时，能够推出另一个命题也正确；任一个命题错误时，能够推出另一个命题也错误，那么这样的两个可以互推的命题叫做**等效命题**。由此可知：**互为逆否的两个命题是等效的，而互逆或者互否的两个命题一般并不等效。**

命题的等效性在数学上的作用很大，它不但可以使命题的证明手续简化，而且给命题的证明提供了新的途径。今后我们要判断一个命题的四种形式的正确性时，就不需要对四种形式全部证明，只要证明其中互逆或者互否的两种形式都正确就行了。还有一些命题，当我们直接证明原命题遇到困难时，可以改证和它等效的逆否命题，同样可以间接地达到目的。在下面的轨迹的研究中，可以看到命题的四种形式及其相互关系的广泛应用。

§2　充分条件、必要条件、充要条件

从上面关于命题的四种形式及其相互关系的研究中，我们已经知道互为逆否的两个命题是等效的，而互逆或者互否的两个命题一般并不等效。为什么互逆或者互否的两个命题有的等效，有的不等效呢？这就需要进一步研究一个命题的条件和结论间的逻辑关系。

如果条件 A 具备了，那么结论 B 就成立。也就是说，具备了条件 A 就能充分保证结论 B 成立，这时我们叫条件 A 是结论 B 成立的**充分条件**。若用命题来说，当命题"若 A，则 B"正确时，其中 A 就是 B 的充分条件。例如，"若两个角是对顶角，则此两角相等"，这是正确的命题，所以其中"两角是对顶角"是"此两角相等"的充分条件。于是这个命题可以改述为"使两角相等的充分条件是此两角是对顶角。"由此可知：**如果一个命题是正确的，那么它的条件是结论的充分条件。**

如果条件 A 不具备，那么结论 B 就不成立。也就是说，要使结论 B 成立，条件 A 是必不可少的，这时我们叫条件 A 是结论 B 成立的**必要条件**。若用命题来说，当命题"若 $\overline{A}$，则 $\overline{B}$"正确时，其中 A 就是 B 的必要条件。例如，"若一个数不能被 3 整除，则此数就不能被 6 整除"，这是正确的命题，所以其中"一个数能被 3 整除"是"此数能被 6 整除"的必要条件。于是这个命题可以改述为"使一个数能被 6 整除的必要条件是此数能被 3 整除。"由此可知：**如果一个命题的否命题是正确的，那么原命题的条件是结论的必要条件。**

由于互为逆否的两个命题是等效的，当命题"若 A，则 B"正确时，命题"若 $\overline{B}$，则 $\overline{A}$"也必正确。所以当 A 是 B 的充分条件时，B 就是 A 的必要条件。并且倒过来也成立。由此可知：**如果一个命题是正确的，那么它的条件是结论的充分条件，而结论是条件的必要条件。**

如果条件 A 具备了，那么结论 B 就成立；并且条件 A 不具备时，结论 B 就不成立。也就是说，条件 A 既是结论 B 成立的充分条件，又是必要条件，这时我们叫条件 A 是结论 B

成立的充分而且必要条件（或者叫必要而且充分条件），简称充要条件。若用命题来说，当命题“若A，则B”和命题“若$\overline{A}$，则$\overline{B}$”（根据命题的等效性，也可以改用命题“若A，则B”和命题“若B，则A”）同时正确时，其中A就是B的充要条件。例如，“若一点在角的平分线上，则此点到这角的两边的距离相等”，和“若角内部的一点不在角的平分线上，则此点到这角的两边的距离不等”，这两个命题同时正确，所以其中“一点在角的平分线上”是“此点到这角的两边的距离相等”的充要条件。于是这两个命题可以合并叙述为“使角的内部一点到这角的两边的距离相等的充要条件是此点在这角的平分线上。”由此可知：**如果一个命题和它的否命题（或者逆命题）都是正确的，那么原命题的条件是结论的充要条件。**

显然，如果一个命题的条件是结论的充要条件，那么它的结论也是条件的充要条件，也就是说，这时这个命题的条件和结论互为充要条件。例如上述两个命题也可以合并叙述为“使一点在角的平分线上的充要条件是此点到这角的两边的距离相等。”

应该注意，在数学中，用术语“充要条件”来叙述的命题，有时也有改用“当且仅当”或者“必须且只须”等术语来叙述的。这里“当”或者“只须”是指的充分条件，而“仅当”或者“必须”是指的必要条件。例如下面的几种叙述实际上是一回事：

（1）四边形的两对角线互相平分是这个四边形成为平行四边形的充要条件；

（2）使四边形成为平行四边形的充要条件是这个四边形的两对角线互相平分；

(3) 四边形当且仅当它的两对角线互相平分时才成为平行四边形；

(4) 要使四边形成为平行四边形，必须且只须它的两对角线互相平分。

还应当注意，有些条件虽是使结论成立的充分条件，但不是必要条件，这时我们叫条件是使结论成立的**充分而非必要条件**（或**仅是充分条件**）。例如前面所讲的“两角是对顶角”虽然是“这两角相等”的充分条件，但不是必要条件（因为当两角不是对顶角时，这两角也可能相等），所以更深一步应该说“两角是对顶角”是“这两角相等”的充分而非必要条件。还有些条件虽是使结论成立的必要条件，但不是充分条件，这时我们叫条件是使结论成立的**必要而非充分条件**（或**仅是必要条件**）。例如前面所讲的“一个数能被3整除”虽然是“这个数能被6整除”的必要条件，但不是充分条件（因为当一个数能被3整除时，还不一定就能被6整除），所以更深一步应该说“一个数能被3整除”是“这个数能被6整除”的必要而非充分条件。

今后运用得较多的是“充要条件”这个术语。显然，用“充要条件”叙述的命题，实质上是合并原命题和否命题（或逆命题）而成的。所以在证明这个命题正确时，必须证明两个方面，即证明条件既是充分的，又是必要的。也就是说，必须证明原命题和否命题（或逆命题）同时正确。下面举例说明。

例4 证明：使角的内部一点到这角两边的距离相等的充要条件是这点在这角的平分线上。

证明 ①条件是充分的（即证明如果一点在角的平分线上，那么这点到这角两边的距离相等）。

设点M在$\angle AOB$的平分线OT上，作$MC\perp OA$于点C，作$MD\perp OB$于点D（图1—2）。则直角$\triangle OMC\cong$直角$\triangle OMD$，所以$MC=MD$。即点M到$\angle AOB$的两边OA、OB的距离相等。

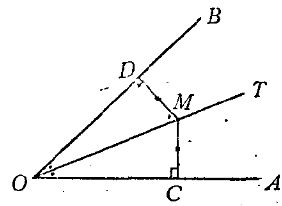

图 1—2

②条件是必要的（即证明如果角内部的一点不在这角的平分线上，那么这点到这角两边的距离不等）。

设点M'在$\angle AOB$的内部，但不在平分线OT上。不妨假定点M'在$\angle AOT$的内部（图1—3），作$M'E\perp OA$于点E，作$M'D\perp OB$于点D。设$M'D$和OT相交于点N，作$NC\perp OA$于点C，根据上面的证明①，知$NC=ND$。连结$M'C$，则在$\triangle M'NC$中，有$M'N+NC>M'C$，于是$M'D=M'N+ND=M'N+NC>M'C$，而在直角$\triangle M'CE$中，易知$M'C>M'E$。因此$M'D>M'E$，也就是$M'E\neq M'D$，即点M'到$\angle AOB$的两边OA、OB的距离不等。

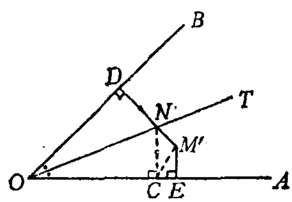

图 1—3

综合以上的①、②，知命题成立。（证毕）

顺便指出，本题的证明中的②，若改证“如果角内部的一点到这角两边的距离相等，那么这点在这角的平分线上”也可以，并且证法比较简便，证明如下：

设点M在$\angle AOB$的内部，且与$\angle AOB$的两边OA、OB的距离相等（图1—2），作$MC\perp OA$于点C，作$MD\perp OB$于点D，则$MC=MD$。连结OM，则直角$\triangle OMC\cong$直角$\triangle OMD$，故$\angle MOC=\angle MOD$，即OM平分$\angle AOB$。因为$\angle AOB$的平分线只有一条，所以点M在$\angle AOB$的平分线OT上。

末了，我们指出，今后我们要着重研究的轨迹命题，实质上就是用"充要条件"叙述的命题的一种变形，因此对"充要条件"的有关知识，必须很好掌握。

习　题　一

1．把下列各命题作为原命题，分别写出它们的逆命题、否命题和逆否命题，并且注明哪一个命题是正确的，哪一个是错误的：

（1）如果一个四边形内接于圆，那么它的一组对角互补。

（2）如果$a\neq 0$，那么$ab\neq 0$。

2．试证下列两个命题等效：

（1）欧几里德*第五公设："同一平面内两条直线和第三条直线相交，若其中一侧的两个同侧内角的和小于二直角，则此两直线必在这一侧相交。"

（2）普雷非尔**命题："通过不在已知直线上的一个已知点，在已知点和直线所确定的平面内，只可引一条直线和已知直线不相交。"

3．什么叫做充分条件、必要条件、充要条件？下列条件

---

*欧几里德（Euclid，约330—275B.C.）是古希腊数学家。

**普雷非尔（Playfair，1748—1819）是英国数学家。

是$\triangle ABC$中$AB=AC$的什么条件：

(1) $\angle B=\angle C$；　　(2) $\angle A=100°$，$\angle B=40°$；

(3) $\angle A$的平分线经过边BC的中点。

4。在(1) $a=b$、(2) $a=-b$、(3) $|a|=|b|$中，哪些是$a^2=b^2$的充分条件？哪些是$a^2=b^2$的必要条件？

5。在对角线相等、对角线互相平分、对角线互相垂直、对角线互相垂直平分中，哪些是四边形成为(1)平行四边形、(2)矩形、(3)菱形、(4)正方形的充分条件？哪些是必要条件？

6。把下列各定理及其逆定理合并写成一个用“充要条件”叙述的定理：

(1) 如果某数能被3整除，那么它的各位数字的和也能被3整除。

(2) 在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方。

7。填写“充分”、“必要”或“充要”在下列各题的虚线处，使所得的命题正确：

(1) 一个整数的个位数字为5是这个整数能被5整除的……………条件。

(2) 两个整数的和为偶数是这两个数都为偶数的……………条件。

(3) 多项式$f(x)$能被$(x-a)$整除的……………条件是$f(a)=0$。

(4) 实系数二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有两个相等实根的……………条件是$b^2-4ac=0$。

(5) $\alpha=\beta$是$\sin\alpha=\sin\beta$的……………条件。

(6) $\sin\theta=\frac{1}{2}$是$\theta=30°$的________条件。

(7) 斜率相等是两直线平行的________条件。

(8) 在三条线段a、b、c中$a+b>c$是这三条线段能组成一个三角形的________条件。

8。证明下列各题：

(1) 在$a>0$、$b>0$时，式子$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$成立的充要条件是$a=b$。

(2) 直角三角形的斜边是一条直角边的二倍的充要条件是此直角边所对的角等于30°。

二、轨迹的基本知识

§3　点的轨迹的意义

在生产实践和日常生活中，我们经常见到工厂里砂轮磨刀时迸出的火星，田野里铧犁耕地时形成的沟道，开炮时炮弹在空中飞行的弹道，以及人造地球卫星在太空中飞行的轨道等等。这些都给我们以点动成线的感觉。

平面上（或空间里）的一个动点，按照某个条件作了尽可能的移动时，就画出一个符合这个条件的所有点组成的图形。例如木工把一条绳子的一端结在木板的一个钉子上，另一端结上一支铅笔，拉紧绳子，使它绕着钉子在木板上旋转一周，那么铅笔尖就在木板上画出一个圆。铅笔尖在木板上移动时，始终和钉子保持一定的距离，而且作了尽可能的移动。这就是说，铅笔尖所画出的圆，它上面的点和钉子的距离都等于绳长，而且这个圆包含了木板上和钉子的距离等于绳长的所有的点。因此，可以说这个圆是“木板上和钉子的距离等于绳长”的所有的点组成的图形。

由此，我们抽象得到一般定义如下：

一个动点按照某个条件作了尽可能的移动时，它所经过的路线叫做这个**动点的轨迹**。

根据这个定义，圆就是平面上一个动点与一个定点保持定长距离而移动的轨迹。

这种用移动的观点来定义点的轨迹，首先说只有一个